١١



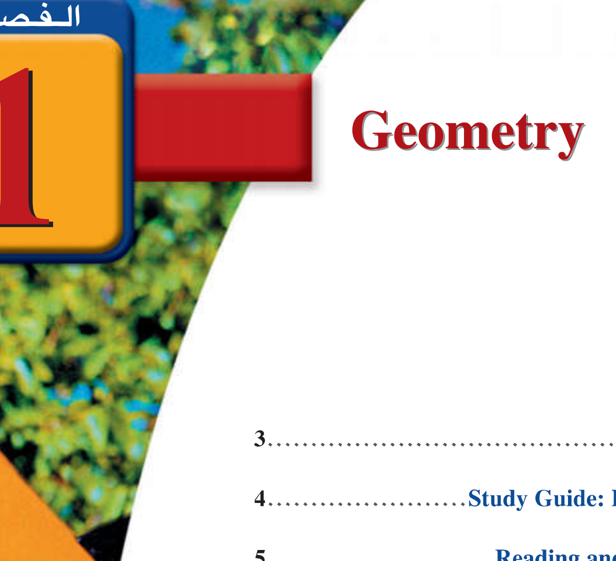
حكومة إقليم كوردستان ـ العراق
وزارة التربية ـ المديرية العامة للمناهج والمطبوعات

الرياضيات للجميع

كتاب الطالب
الصف الحادي عشر العلمي

الطبعة السابعة
٢٠١٥م / ٢٧١٥ كوردي / ١٤٣٦ هـ

الأشراف الفني على الطبع
عثمان پيرداود كواز
آمانج اسماعيل عبدي



Geometry الهندسة

الفصل 2

أنظمة المعادلات والمتباينات الخطية

Systems of Linear Equations and Inequalities



الفصل

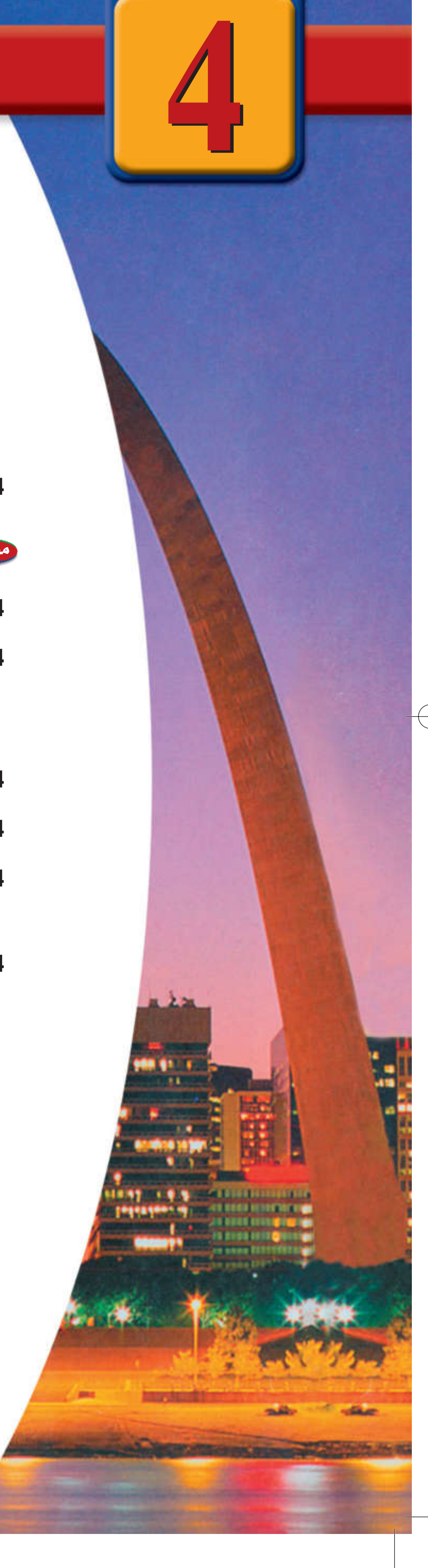
3

Matrices المصفوفات

الفصل 4

الدوال الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Functions



الفصل 5



خصائص الدوالّ

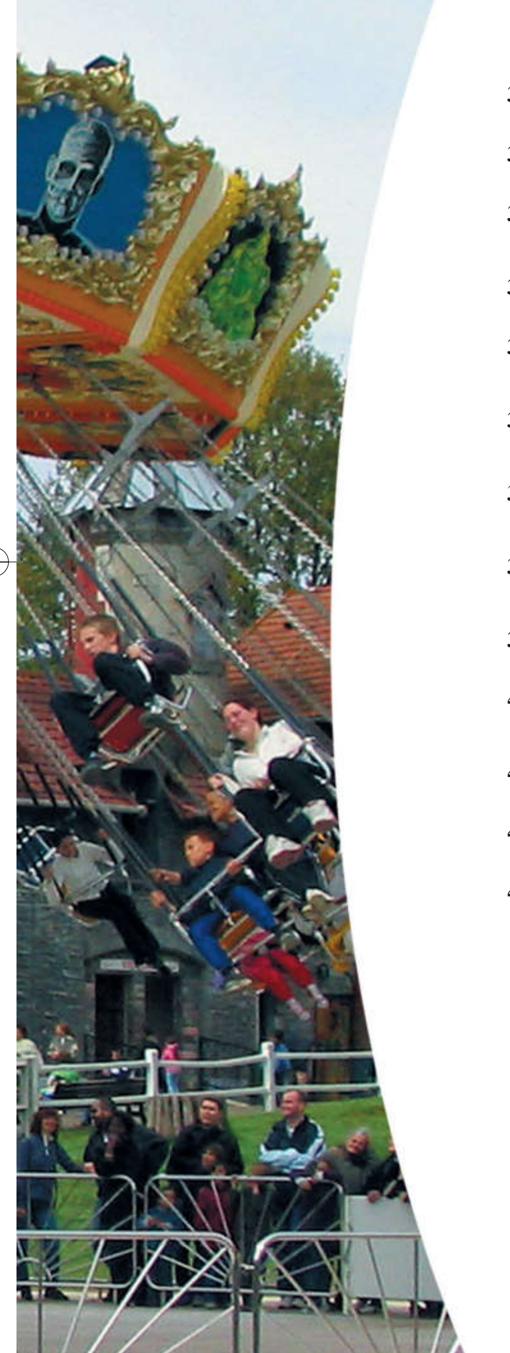
Properties of Functions

الفصل

6

المتتاليات والمتسلسلات

Sequences and Series



الفصل 7

علم المثلّثات

Trigonometry



الفصل

1

الهندسة Geometry

الفصل الأول

الدروس

الأجسام الذهبية

تُبيّن الصورة عددًا من رباعيّات الوجوه المتداخلة. يُمكنك استعمال البسوط لصنع نماذج لرباعيّات الوجوه ولأجسام هندسيّة أخرى.

هل أنت مستعد؟

المُفْرَدات

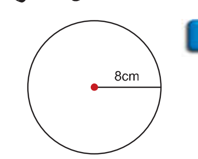
ارِبط كلّ مفردة بتعريفها الوارد إلى اليسار.

1	متوازي الأضلاع	**أ**	المسافة حول الدائرة
2	نصف القطر	**ب**	نسبة محيط الدائرة إلى قطرها
3	باي π	**ج**	جميع أضلاعه متطابقة
4	محيط الدائرة	**د**	المسافة بين مركز الدائرة ونقطة تقع عليها
		هـ	رباعي كل ضلع من أضلاعه موازٍ للضلع المقابل

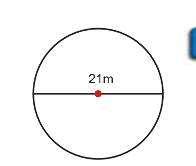
محيط الدائرة ومساحتها

جِد مساحة كل دائرة ومحيطها.

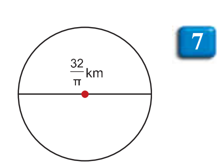
5



6



7



حساب المسافة وتحديد منتصف قطعة مستقيمة

جِد طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ وجِد إحداثيَّي منتصفها.

8 $A(-3, 2)$ وَ $B(5, 6)$

9 $A(-4, -4)$ وَ $B(2, -3)$

10 $A(0, 1)$ وَ $B(-3, 4)$

الدوائر البيانية

تُظهر الدائرة البيانية المقابلة توزّع السكان في مدينة، وعددهم 400 000 نسمة، وفق أعمارهم.

توزّع السكّان

الفئة العمرية	النسبة
تحت 18	27%
18 – 24	11%
26 – 44	30%
45 – 64	19%
فوق 65	13%

11 ما عدد السكان الذين تقع أعمارهم بين 18 وَ 24 سنة؟

12 ما عدد السكان الذين تقلّ أعمارهم عن 18 سنة؟

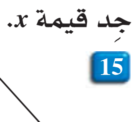
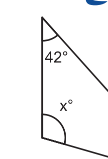
13 ما النسبة المئوية للسكان الذين تزيد أعمارهم على 44 سنة؟

14 ما عدد السكان الذين تزيد أعمارهم على 44 سنة؟

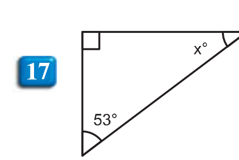
مجموع قياسات زوايا المثلّث

جِد قيمة x.

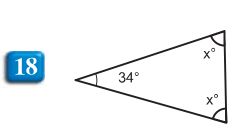
15

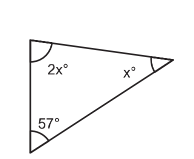
16



17



18



الفصل 1

دليل الدراسة: نظرة إلى الفصل

فـي المـاضـي

درست سابقًا

- المستوى الإحداثي.
- المثلّثات وزواياها.
- التحويلات الهندسية مثل السحب والدوران.
- القطع المستقيمة.
- حساب محيط الدائرة ومساحتها.
- قانون المسافة وإحداثيي المنتصف في المستوى الإحداثي.
- استعمال الدائرة لحل التمارين

فـي هذا الفصل

سوف تتعلّم

- الفضاء الإحداثي.
- المضلّعات وزواياها.
- تحويلاً هندسيًّا يُغيِّر القياسات.
- القطع المستقيمة الموجّهة أو المتَّجهات.
- المضلّعات المنتظمة وحساب مساحاتها.
- قانون المسافة وإحداثيي المنتصف في الفضاء الإحداثي.
- القطاعات والقطع الدائريّة وحساب مساحاتها وحساب طول القوس.

فـي المستقبـل

يُمكنك استعمال مهارات هذا الفصل

- لبناء أساس قويّ للدراسات العليا.
- لدراسة أمور تتعلَّق بموضوعات تتعلّمها.
- لحل مسائل تتعلّق بالهندسة الداخليّة والعمارة.
- لحساب المسافات وتفسير المعلومات الواردة في الصحف والمجلات.
- في الحياة اليوميّة.

المفردات	*Vocabulary*
الفضاء الإحداثي	3D coordinate system
المحدَّب	convex
المقعَّر	concave
المضلّع المنتظم	regular polygon
التكبير	enlargement
التصغير	compression
المتَّجه	vector
العامد	apothem
مركز الدائرة	center of the circle
مركز المضلّع المنتظم	center of a regular polygon
الزاوية المركزيّة	central angle
متعدّد الوجوه	polyhedron
طول القوس	arc length
القطاع الدائري	circular sector
القطعة الدائريّة	circular segment

نافذة على المفردات

لكي تألف بعض المفردات الواردة في هذا الفصل، تابع الخطوات التالية:

1. تعرّفت المستوى الإحداثي، كيف تساعدك هذه المعرفة على تصوّر **الفضاء الإحداثي**؟
2. معنى كلمة منتظم أنه يلتزم النظام. ماذا يعني تعبير **المضلّع المنتظم** في رأيك؟
3. عندما يقوم طبيب العيون بتوسيع عينك، فإن حدقتها تُصبح أكبر. ما معنى أن يكون شكل هندسي **تكبيرًا** لشكل هندسي آخر؟
4. يُعرّف البعض المتّجه على أنه قطعة مستقيمة موجّهة. كيف تستعمل هذا التعريف لتفهم ما يعنيه **المتّجه**؟
5. توحي كلمة عامد بوجود تعامد. هل ترى في تعريف **العامد** ما يؤكّد هذا الإيحاء؟
6. ما تعنيه كلمة مساحة؟ ما هي **مساحة الكرة** برأيك؟
7. أن تصف شيئًا بأنه مركزي يعني أنه موجود في المركز. كيف يساعدك ذلك على فهم تعبير **الزاوية المركزيّة** في الدائرة، وفي المضلّع المنتظم؟

الفصل 1



استراتيجية للقراءة: القراءة لحل مسألة

عندما تباشر قراءة نص مسألة لحلها قد تشعر بالإحباط تجاه ما تقرأ. عندما تنتهي من تمييز مختلف أجزاء المسألة وتترجمها إلى لغة الرياضيات، ستكتشف أن المسألة شبيهة بمسائل سبق لك حلّها.

إرشادات للقراءة

- ✓ اقرأ كل جملة ببطء. دوّن ما تعنيه الكلمات مع تقدّمك في القراءة.
- ✓ ارسم مخطّطًا. عنون المخطّط لكي يُخبرك عمّا يمثّله.
- ✓ اقرأ المسألة مجدّدًا قبل أن تباشر بحلّها.
- ✓ ترجم الكلمات والجمل إلى لغة الرياضيات.
- ✓ ارسم خطًّا تحت ما هو مطلوب لإبرازه.

استعمل الإرشادات أعلاه لفهم المسألة المقابلة

في نهاية يوم من التنزُّه في الجبال، أقام فريق المتنزهين مخيَّمًا على بعد 3 km شرقًا من نقطة الانطلاق وَ 7 km شمالاً، ويرتفع عنها 0.6 km. احسب المسافة بين المخيّم ونقطة الانطلاق.

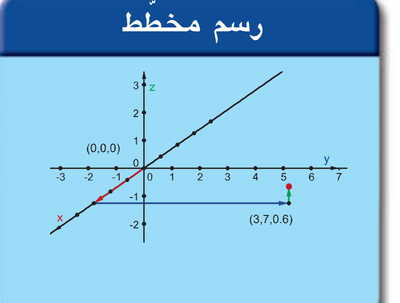
تمييز الكلمات المفاتيح

في نهاية يوم من التنزه في الجبال، أقام فريق المتنزّهين مخيّمًا يقع على بعد 3 km شرقًا من نقطة الانطلاق وَ 7 km شمالاً ويرتفع عنها 0.6 km. احسب المسافة بين المخيّم ونقطة الانطلاق.

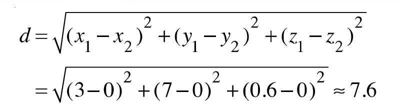
ترجمة النص إلى الرياضيات

يُمكن تمثيل نقطة الانطلاق بنقطة الأصل $(0, 0, 0)$. كما يُمكن تمثيل المخيّم بالنقطة $(3, 7, 0.6)$. يُمكن حساب المسافة باستعمال قانون المسافة في الفضاء الإحداثي.

رسم مخطّط



استعمل قانون المسافة في الفضاء الإحداثي لحساب المسافة بين المخيّم ونقطة الانطلاق.



$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$
$$=\sqrt{(3-0)^2+(7-0)^2+(0.6-0)^2}\approx 7.6$$

المسافة بين المخيّم ونقطة الانطلاق هي 7.6 km تقريبًا.

حاول

استعمل في المسألة أدناه الإرشادات التالية للقراءة. تحل المسألة.

- حدّد الكلمات – المفاتيح.
- ترجم كل جملة إلى الرياضيات.
- ارسم مخطّطًا يُمثّل المسألة.

1. أسطوانة ارتفاعها 4m ونصف قطرها 9m. ما أثر مضاعفة كل من هذين القياسين على حجم الأسطوانة؟

1-1 الفضاء الإحداثي

3D Coordinate system

الأهداف

يُمثّل النقاط والمعادلات الخطّية في الفضاء الإحداثي.

المفردات
Vocabulary

الفضاء الإحداثي
3D Coordinate system

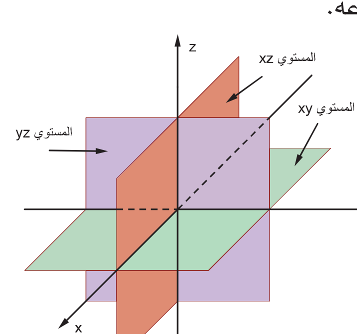
المحور الثالث
z-axis



لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

يُمكنك الفوز في مسابقة العثور على الكنز باستعمال نظام إحداثيّات ثلاثي الأبعاد، يساعدك على تحديد المواقع على الأرض.

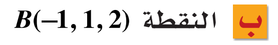
يُستعمل نظام GPS (الثلاثي الأبعاد) لتحديد المواقع عبر تحديد خطَّي الطول والعرض حيث يوجد الموقع، وتحديد ارتفاعه.



فكما أن المستوى الإحداثي هو المستوى المصحوب بنظام إحداثيّات يتحدّد موقع كل نقطة فيه بعددين هما الإحداثي الأوّل x والإحداثي الثاني y، فإن الفضاء الإحداثي هو الفضاء المصحوب بنظام إحداثيّات يتحدّد موقع كل نقطة فيه بثلاثة أعداد، هي **الإحداثي الأول x-coordinate** x **الإحداثي الثاني y-coordinate** y و **الإحداثي الثالث z-coordinate** z.

يتضمّن الفضاء الإحداثي 3 محاور هي **المحور الأول x-axis** و **المحور الثاني y-axis** و **المحور الثالث z-axis**. تحدّد هذه المحاور 3 مستويات إحداثيّة هي: **المستوى** xy و **المستوى** yz و **المستوى** zx.

مثـــال 1



رسم نقاط في الفضاء الإحداثي

ارسم كل نقطة في الفضاء الإحداثي.

أ النقطة $A(2, 3, -2)$

تحرّك انطلاقًا من نقطة الأصل وحدتين إلى الأمام على المحور الأوّل، ثم 3 وحدات إلى اليمين باتجاه موازٍ للمحور الثاني، ثم وحدتين إلى الأسفل باتجاه موازٍ للمحور الثالث.

ب النقطة $B(-1, 1, 2)$

تحرّك انطلاقًا من نقطة الأصل وحدة إلى الوراء على المحور الأوّل، ثم وحدة إلى اليمين باتجاه موازٍ للمحور الثاني، ثم وحدتين إلى الأعلى باتجاه موازٍ للمحور الثالث.

ج النقطة $C(-3, -3, 0)$

تحرّك انطلاقًا من نقطة الأصل 3 وحدات إلى الوراء على المحور الأوّل، ثم 3 وحدات إلى اليسار باتجاه موازٍ للمحور الثاني.

نقطة مراقبة

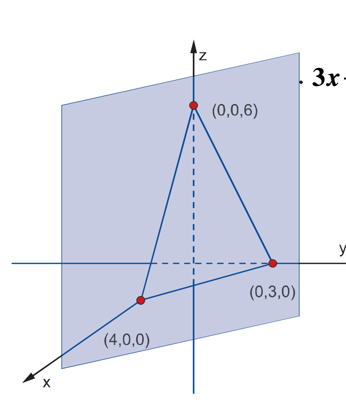
1. ارسم كل نقطة

أ النقطة $D(1, 3, -1)$ ب النقطة $E(1, -3, 1)$ ج النقطة $F(0, 0, 3)$

تذكّر أن معادلة المستقيم في المستوي الإحداثي هي معادلة خطيّة، $ax+by+c=0$ بالمتغيّرين x وَ y؛ وأن جميع النقاط (x, y)، في المستوي الإحداثي، التي يُحقّق إحداثيّاها هذه المعادلة الخطيّة تُشكّل هذا المستقيم. كما أن معادلة المستوي في الفضاء الإحداثي، هي معادلة خطيّة، $ax+by+cz+d=0$، بالمتغيّرات x وَ y وَ z؛ وأن جميع النقاط (x, y, z)، في الفضاء الإحداثي، التي تُحقّق إحداثيّاتها هذه المعادلة الخطيّة تُشكّل هذا المستوي. وبما أن ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تكفي لتحديد مستوٍ في الفضاء، فإن رسم تقاطعات المستوي، صاحب المعادلة $ax+by+cz+d=0$، مع محاور الإحداثيّات الثلاثة، كافٍ لتمثيل هذه المعادلة في الفضاء الإحداثي.

مثـــال 2 تمثيل معادلة خطّية في الفضاء الإحداثي

مثّل في الفضاء الإحداثي المعادلة الخطّية $3x+4y+2z=12$.



الخطوة 1 جِد تقاطعات المستوي مع محاور الإحداثيّات.

مع المحور الأول: $3x+4\times0+2\times0=12$ ؛ $x=4$

مع المحور الثاني: $3\times0+4y+2\times0=12$ ؛ $y=3$

مع المحور الثالث: $3\times0+4\times0+2z=12$ ؛ $z=6$

الخطوة 2 ارسم النقاط $(4, 0, 0)$ وَ $(0, 3, 0)$ وَ $(0, 0, 6)$ ثم ارسم المستوي الذي يمر في هذه النقاط.

مُساعَدة
لكي تجد تقاطع مستوٍ مع أحد المحاور، عوّض عن إحداثيّي المحورين الآخرين بـ 0، وحُلّ المعادلة الناتجة.



2. مثّل في الفضاء الإحداثي المعادلة الخطّية $x-4y+2z=4$

مثـــال 3 تطبيق على التكنولوجيا

من بين ألعاب الحاسوب الشائعة، لعبة تمثيل أدوار يقوم كل لاعب فيها ببناء حضارة. يُعطى، في البدء، كل لاعب 100 قطعة ذهبيّة لشراء الموارد. بعد ذلك، يتنافس اللاعبون لإبقاء حضاراتهم على قيد الحياة. من قواعد اللعبة أن ثمن وحدة الطعام قطعتان ذهبيّتان، وثمن وحدة الخشب 3 قطع ذهبيّة، وثمن وحدة الحجارة 5 قطع ذهبيّة.

أ اكتب معادلة خطيّة بثلاثة متغيّرات لتمثيل الوضع.

أرمز بالمتغيّر f لكميّة الطعام، وبالمتغيّر w لكميّة الخشب، وبالمتغيّر s لكميّة الحجارة.

100 قطعة ذهبيّة	=	ثمن الطعام	+	ثمن الخشب	+	ثمن الحجارة
100	=	$2f$	+	$3w$	+	$5s$

ب استعمل الجدول المقابل لتحديد كميّة الحجارة التي يستطيع كل لاعب أن يشتريها.

دانا: $2(20)+3(10)+5s=100$ ؛ $s=6$

زانا: $2(15)+3(15)+5s=100$ ؛ $s=5$

خسرو: $2(40)+3(5)+5s=100$ ؛ $s=1$

بيشرو: $2(25)+3(10)+5s=100$ ؛ $s=4$

اللاعب	كميّة الطعام	كميّة الخشب	كميّة الحجارة
دانا	20	10	■
زانا	15	15	■
خسرو	40	5	■
بيشرو	25	10	■

يستطيع دانا أن يشتري 6 وحدات حجارة بينما يستطيع زانا شراء 5 وحدات وخسرو وحدة واحدة وبيشرو 4 وحدات.

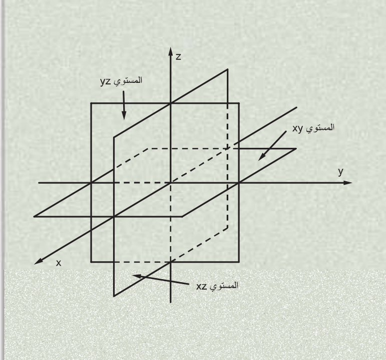


3. قرّر آزاد القيام برحلة سيرًا على الأقدام في عطلة نهاية الأسبوع. اشترى، تحضيرًا لرحلته، مصابيح ثمن الواحد منها 500 3 دينار، وفطائر ثمن الواحدة 500 1 دينار، وزجاجات ماء ثمن الواحدة منها 750 دينارًا. دفع آزاد 500 60 دينار ثمنًا لمشترياته.

أ) اكتب معادلة خطّية بثلاثة متغيّرات لتمثيل الحالة.

ب) اشترى آزاد 4 مصابيح وَ 24 زجاجة ماء. كم فطيرة يكون قد اشترى؟

فكِّرْ وناقش



1. افترض أن نقطة الأصل في الفضاء الإحداثي الذي أنت فيه تقع أمامك، أسفل الزاوية اليسرى من قاعة الصف. افترض أن طول وحدة القياس على محاور الإحداثيّات يساوي قدمًا واحدة. قدّر إحداثيّات موقع رأسك.
2. صِف مستويًا له تقاطعان فقط مع محاور الإحداثيّات.
3. **كن منظّمًا** انسخ المخطّط المقابل، ثم أكمله معَنونًا كل محور وكل مستوٍ وكل نقطة.



1-1 التمارين

تمارين موجّهة

1. **مفردات** وضِّح الفرق بين المستوي الإحداثي والفضاء الإحداثي.

انظر المثال 1

ارسم كل نقطة في الفضاء الإحداثي.

2. $(-3, -2, 1)$
3. $(0, 0, 2)$
4. $(1, 4, 5)$
5. $(-1, 2, 4)$

انظر المثال 2

مثّل كل معادلة في الفضاء الإحداثي.

6. $x+y+z=3$
7. $5x-2y-4z=10$
8. $1.5x+3y-2z=-6$

انظر المثال 3

9. **خطوات متعدّدة** الحمولة القصوى لشاحنة شركة التوزيع الوطنية هي طن واحد. تبلغ كتلة الثلاّجة 75 kg وكتلة غسّالة الصحون 50 kg وكتلة الفرن 100 kg.

أ) اكتب معادلة بثلاثة متغيّرات لتمثيل الحالة.

ب) أكمل الجدول الذي يُبيّن عدد كل نوع من الآلات الثلاث التي يُمكن للشاحنة نقلها.

ج) **تقدير** قدّر أكبر عدد ممكن من الآلات يُمكن للشاحنة أن تنقله.



تمــارين وحــلُّ مســائل

تمارين حــرّة

لحل التمارين	انظر المثال
17–10	1
23–18	2
24	3

ارسم كل نقطة في الفضاء الإحداثي.

10 $(2, -4, 3)$ **11** $(-1, 1, 4)$ **12** $(3, 0, 0)$ **13** $(1, -2, 0)$

14 $(-3, -3, -3)$ **15** $(5, 0, 2)$ **16** $(0, -3, 2)$ **17** $(-4, -1, 1)$

مثّل كل معادلة في الفضاء الإحداثي.

18 $x+y-z=-1$ **19** $2x-y+2z=4$ **20** $x+\frac{1}{2}y+z=-2$

21 $5x+y-z=-5$ **22** $8x+6y+4z=24$ **23** $3x-3y+2.5z=7.5$

24 **أحواض السمك** مع هفال 000 80 دينارٍ ليشتري أسماكًا يضعها في حوض السمك. ثمن السمكة الحمراء 000 10 دينارٍ، والسوداء 000 15 دينارٍ، والرمادية 500 2 دينارٍ.

أ اكتب معادلة بثلاثة متغيّرات لتمثيل الحالة.

ب أكمل الجدول الذي يُبيّن أعداد السمك التي يُمكن لهفال شراؤها.

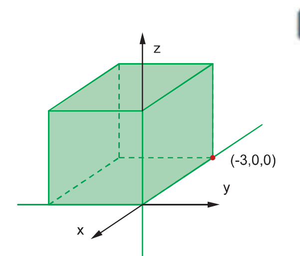
حمراء	سوداء	رمادية
2	2	■
■	1	10
3	■	2
5	1	■

25 **رياضة** تحسَب للاعب كرة السلّة النقاط بحسب ثلاثة أنواع من الرميات. رمية بنقطة رمية حرة ورمية بنقطتين ورمية بثلاث نقط. سجّل أحد اللاعبين 60 نقطة، 20 منها من رميات النقطة. حدِّد عدد الرميات المكنة من النوعين الآخرين.

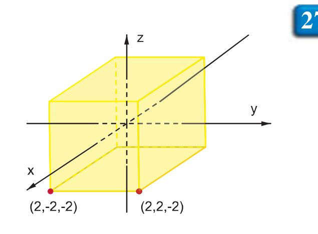
هندسة حدّد إحداثيّات رؤوس كل مكعّب.

26





27



28 **عمارة** خصّص المهندس 8 ملايين دينار لتبليط قاعة يلزمها 000 2 بلاطة. قرّر اختيار 3 أنواع من البلاط: الخشب والسيراميك والحجر. اشترى 400 بلاطة من السيراميك. هل يُمكن للمهندس تبليط ما تبقّى من أرض القاعة بالتساوي بين الخشب والحجر؟ أوضح إجابتك.

أسعار البلاط (ثمن البلاطة)
موزاييك: 500 1 دينار
حجر: 000 2 دينار
سيراميك: 000 4 دينار
خشب: 000 6 دينار

29 **تفكير ناقد** هل يُمثّل التحرّك على خط مستقيم ذهابًا وإيابًا تحرّكًا ثنائي البعدين؟ أوضح إجابتك.

30 **اكتب** اتصل بك زميلك هاتفيًّا وطلب أن تشرح له كيف يرسم الفضاء الإحداثي. كيف تشرح له؟

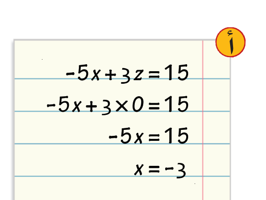
31 يستعمل المهندسون الفضاء الإحداثي لتصميم مشاريع البناء التي يقومون بها. وضع المهندس مصباحًا في النقطة (7, 12, 10) في تصميم تتمثّل فيه أرض العمارة بالمستوى xy، كما أن وحدة القياس على المحورين الأوّل والثاني تُمثّل قدمًا واحدة.

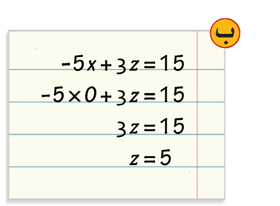
أ قرّر المهندس تعليق مصباحين جديدين يبعد كل منهما 4 أقدام عن المصباح الأوّل: أحدهما في الاتجاه الموجب للمحور الأوّل والآخر في الاتجاه الموجب للمحور الثاني. ما إحداثيّات موقع كل من نقطتَي تعليق المصباحين؟

ب يتدلّى كل من المصباحين قدمًا ونصفًا تحت نقطة تثبيته. ما إحداثيّات كل من المصباحين؟

ج قرّر المهندس رفع أرضيّة البناء 4 أقدام. ما الإحداثيّات الجديدة للمصباح الأوّل؟

32 **خطأ في التحليل** فيما يلي طريقتان لحساب تقاطع المستوى $-5x+3z=15$ مع المحور الأول. حدّد الطريقة الخطأ، وأوضح أين الخطأ.

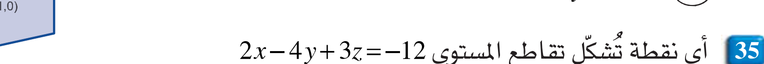

أ
$-5x+3z=15$
$-5x+3\times0=15$
$-5x=15$
$x=-3$


ب
$-5x+3z=15$
$-5\times0+3z=15$
$3z=15$
$z=5$

مُساعدة

في الفضاء الإحداثي، يكون:
الوراء باتجاه القيم السالبة للمحور x
الأمام باتجاه القيم الموجبة للمحور x
اليمين باتجاه القيم الموجبة للمحور y
اليسار باتجاه القيم السالبة للمحور y
فوق باتجاه القيم الموجبة للمحور z
تحت باتجاه القيم السالبة للمحور z.

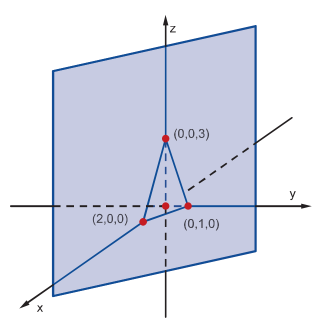




33 أي نقطة تقع وراء النقطة (1, 1, 4) بخمس وحدات؟

أ (−4, 1, 4)　ب (1, −4, 9)　ج (2, 3, 6)　د (6, 6, 9)

34 أي معادلة يُمثّل الرسم المقابل؟



أ $x+2y+3z=6$

ب $2x+y+3z=6$

ج $3x+6y+2z=6$

د $6x+3y+2z=6$

35 أي نقطة تُشكّل تقاطع المستوى $2x-4y+3z=-12$ مع المحور الثاني؟

أ (0, −3, 0)

ب (0, 0, −3)

ج (0, 3, 0)

د (3, 0, 0)

36 جِد تقاطع المستوى $5x-2y-4z=-3$ مع المحور الثالث.

تحدٍّ وتوسُّع

عندما تقتصر المعادلة الخطّية على متغيّرين في الفضاء الإحداثي، فإنها تتمثّل بمستوٍ موازٍ لأحد محاور الإحداثيّات. حدد المحور الذي يُوازي كل مستو.

37 $x+y=2$ **38** $y-2z=4$ **39** $x+z=3$ **40** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y=1$

اكتب معادلة للمستوي بمعرفة تقاطعاته مع محاور الإحداثيّات.

	مع المحور x	مع المحور y	مع المحور z
41	4	2	−1
42	25	50	10

مراجعة لولبية

اذكر اسم الجسم الهندسي بمعرفة عدد أضلاعه وعدد رؤوسه. (الصفوف السابقة)

43 5 رؤوس وَ 8 أضلاع **44** 6 رؤوس وَ 9 أضلاع **45** بلا رؤوس ولا أضلاع

46 **جمع التبرّعات** نظَّم نادي التضامن لأعضائه رحلة بالدرّاجات طولها 1920 km . قطع الأعضاء 120 km يوميًّا. كم يومًا استغرقت الرحلة. (الصفوف السابقة)

حُلَّ كل نظام خطّي. (الصفوف السابقة)

47 $\begin{cases} 5y=x \\ \frac{2}{5}x+7y=18 \end{cases}$ **48** $\begin{cases} 6x-y=5 \\ 4y-3x=1 \end{cases}$ **49** $\begin{cases} x+3y=6 \\ 2x-3y=9 \end{cases}$

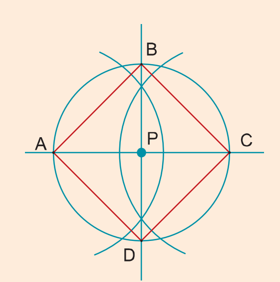


إنشاء المضلَّعات المنتظمة

Constructing regular polygons

سوف تتعلم في هذا النشاط كيف تُنشئ مضلّعًا منتظمًا باستعمال الدائرة المحيطة به.

نشاط 1

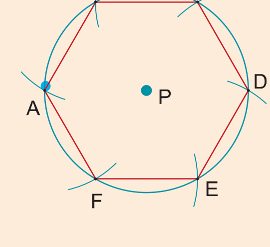


1. أنشئ دائرة مركزها النقطة P ثم ارسم القطر $\overline{AC}$.
2. أنشئ محور القطر $\overline{AC}$ وسَمِّ B و D نقطتَي تقاطعه مع الدائرة.
3. ارسم $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ و $\overline{CD}$ و $\overline{DA}$. حصلت على رباعي متطابق الأضلاع. وهو أيضًا متطابق الزوايا. إنه مضلّع منتظم من 4 أضلاع (مربّع).

حاول

1. صف طريقة أخرى لرسم مضلّع منتظم من 4 أضلاع.
2. تقع رؤوس الرباعي المنتظم على دائرة واحدة. ما العلاقة بين الرباعي والدائرة؟
3. **الثماني المنتظم** مضلّع ثماني متطابق الأضلاع ومتطابق الزوايا. استعمل منصّفات الزوايا لإنشاء ثماني منتظم انطلاقًا من الرباعي المنتظم الذي أنشأته في النشاط 1.

نشاط 2



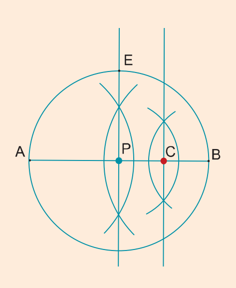
1. أنشئ دائرة مركزها النقطة P، ثم ارسم نقطة A عليها.
2. حافظ على انفراج الفرجال بقدر نصف القطر. انطلق من النقطة A لترسم على الدائرة نقاطًا متساوية البعد إحداها عن الأخرى. سَمِّ هذه النقاط B و C و D و E و F.
3. ارسم $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ و $\overline{CD}$ و $\overline{DE}$ و $\overline{EF}$ و $\overline{FA}$. حصلت على سداسي متطابق الأضلاع. وهو أيضًا متطابق الزوايا. إنه سداسي منتظم.



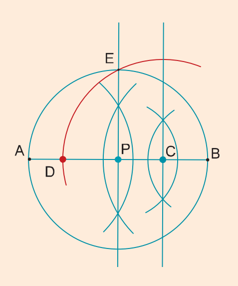
4. برّر كون المضلّع $ABCDEF$ سداسيًّا منتظمًا (توجيه: ارسم الأقطار $\overline{AD}$ و $\overline{BE}$ و $\overline{CF}$. أي نوع من المثلّثات حصلت عليه؟).
5. **المضلّع الاثنا عشري المنتظم** مضلّع من 12 ضلعًا متطابقًا و12 زاوية متطابقة. استعمل السداسي المنتظم لإنشاء مضلّع اثني عشري منتظم. أوضح طريقتك.

نشاط 3

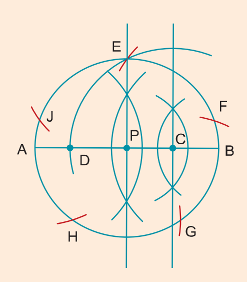
1. أنشئْ دائرة مركزها النقطة P، ثم ارسم القطر $\overline{AB}$.
2. أنشئْ محور $\overline{AB}$ وسمِّ E إحدى نقطتَي تقاطع المحور مع الدائرة.
3. أنشئْ منتصف نصف القطر $\overline{PB}$ ، وسمِّه C.
4. افتح الفرجار بمقدار CE. ضع رأس الفرجار عند C وارسم قوسًا يقطع $\overline{AB}$ عند نقطة تسمّيها D.
5. افتح الفرجار بمقدار ED. انطلق من النقطة E لترسم على الدائرة نقاطًا متساوية البعد إحداها عن الأخرى. سمِّ هذه النقاط F وَ G وَ H وَ J.
6. ارسم $\overline{EF}$ وَ $\overline{FG}$ وَ $\overline{GH}$ وَ $\overline{HJ}$ وَ $\overline{JE}$. حصلت على خماسي متطابق الأضلاع. وهو أيضًا متطابق الزوايا. إنه خماسي منتظم.



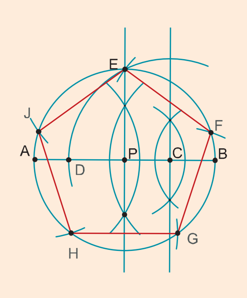
الخطوات من 1 إلى 3



الخطوة 4



الخطوة 5



الخطوة 6

حاول

6. **العشاري المنتظم** مضلّع من 10 أضلاع، متطابق الأضلاع ومتطابق الزوايا. استعمل الخماسي المنتظم لإنشاء مضلّع عُشاري منتظم. أوضح طريقتك.
7. احسب قياس كل زاوية في المضلّعات المنتظمة التي أنشأتها في النشاطات من 1 إلى 3 وأكمل الجدول التالي:

المضلّعات المنتظمة				
عدد الأضلاع	3	4	5	6
قياس كل زاوية	60°			
مجموع قياسات الزوايا	180°			

8. **اكتب مقولة** ما القاعدة العامة لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلّع منتظم من n ضلّعًا.
9. **اكتب مقولة** ما القاعدة العامة لإيجاد قياس كل من الزوايا الداخليّة لمضلّع منتظم من n ضلّعًا.

2-1 المضلّعات

Polygons



الأهداف

يُصنّف المضلّعات بالاستناد إلى أضلاعها وزواياها.

يجد قياسات الزوايا الداخليّة والخارجيّة لمضلّع ويستعملها.

المفردات
Vocabulary

ضلع المضلّع
Side of a polygon

رأس المضلّع
Vertex of a polygon

القطر
Diagonal

المضلّع المنتظم
Regular polygon

المُقعّر
Concave

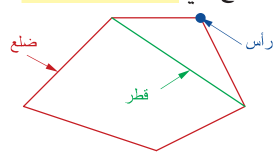
المحدّب
Convex

لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

يدخل النور إلى عدسة آلة التصوير عبر فتحة تكوّنها مجموعة من الشفرات، بحيث تتّخذ شكل مضلّع. (انظر المثال 5).

تذكَّر أنّ المضلّع شكل هندسي مغلق في المستوي، يتألّف من 3 قطع مستقيمة أو أكثر بحيث لا تكون قطعتان منها على استقامة واحدة، وبحيث تتقاطع كل قطعة مستقيمة مع قطعتين مستقيمتين فقط، واحدة عند كل طرف من طرفيها.

كل قطعة من هذه القطع المستقيمة هو **ضلع Side** للمضلّع. كل طرف مشترك بين ضلعين هو **رأس Vertex** للمضلّع. كل قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متجاورين من رؤوس المضلّع هي **قطر Diagonal** له.



عدد الأضلاع	الاسم
3	مثلّث
4	رباعي
5	خماسي
6	سداسي
7	سباعي
8	ثماني
9	تساعي
10	عشاري
11	أحد عشري
12	اثنا عشري

تستطيع تسمية مضلّع بعدد أضلاعه. يُبيّن الجدول بعضًا من هذه التسميات. فالمضلّع $ABCDE$ أعلاه خماسي.

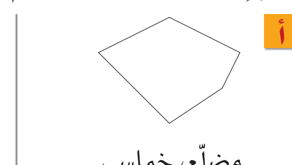
مثـــال 1 تمييز المضلّعات

تذكَّر

المضلّع شكل هندسي مغلق في المستوي يتألّف من 3 قطع مستقيمة أو أكثر تتقاطع عند أطرافها فقط.

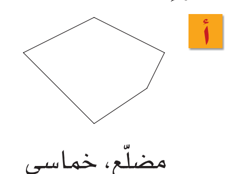
اذكر إن كان الشكل مضلّعًا أم لا. سمّه إن كان مضلّعًا.

أ



مضلّع، خماسي

ب



ليس بمضلّع

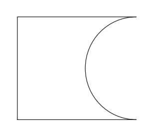
ج



مضلّع، ثماني

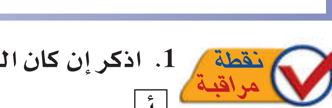


نقطة مراقبة



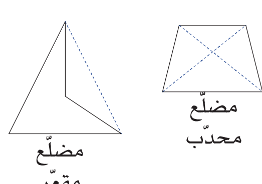
1. اذكر إن كان الشكل مضلّعًا أم لا. سمّه إن كان مضلّعًا.

أ ب ج



المضلّع المنتظم Regular polygon مضلّع جميع أضلاعه متطابقة (أي لها الطول نفسه) وجميع زواياه متطابقة (أي لها القياس نفسه).

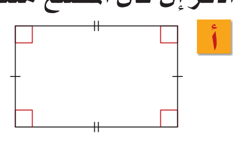
المضلّع **المقعّر Concave** مضلّع يتضمّن قطرًا على الأقل تقع بعض نقاطه خارج المضلّع. المضلّع **المحدّب Convex** مضلّع تقع جميع أقطاره داخل المضلّع. المضلّع المنتظم هو دومًا محدّب.



مثـــال 2 تصنيف المضلّعات

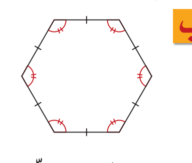
اذكر إن كان المضلّع منتظمًا أم لا، وإن كان محدّبًا أم مقعّرًا.

أ



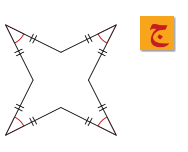
غير منتظم، محدّب

ب



منتظم، محدّب

ج



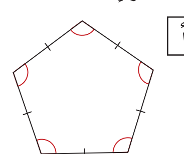


غير منتظم، مقعّر

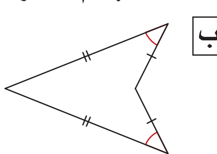


نقطة مراقبة **2. اذكر إن كان المضلّع منتظمًا أم لا، وإن كان محدّبًا أم مقعّرًا.**

أ



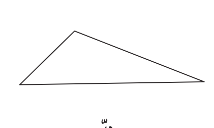
ب



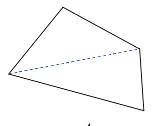
لكي تجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلّع محدّب، ارسم جميع أقطاره التي تنطلق من رأس واحد من رؤوسه. يُنشئ ذلك عددًا من المثلّثات. مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلّع هو مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمثلّثات كلّها.

تـذكّـر

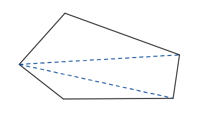
وفقًا لمبرهنة مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمثلّث، فإن هذا المجموع هو 180 درجة.



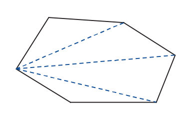
مثلّث



رباعي



خماسي



سداسي

المضلّع	عدد الأضلاع	عدد المثلّثات	مجموع قياسات الزوايا الداخليّة
مثلّث	3	1	$(1)\times180^\circ=180^\circ$
رباعي	4	2	$(2)\times180^\circ=360^\circ$
خماسي	5	3	$(3)\times180^\circ=540^\circ$
سداسي	6	4	$(4)\times180^\circ=720^\circ$
مضلّع من n ضلعًا	n	$n-2$	$(n-2)\times180^\circ$

يتبيّن في كل مضلّع أن عدد المثلّثات، الناتجة عن رسم الأقطار المنطلقة من أحد رؤوسه، يقل 2 عن عدد الأضلاع n. ينتج من ذلك أن مجموع قياسات زوايا تلك المثلّثات هو $(n-2)\times180^\circ$.



مبرهنة 1-1 مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلّع محدب

مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلّع محدّب له n ضلعًا هو $(n-2)\times180^\circ$.

سوف نقتصر فيما بعد على المضلعات المُحدّبة.

مثـــال 3 إيجاد قياسات الزوايا الداخليّة لمضلّع وإيجاد مجموعها

أ جِد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لثماني

$(n-2)\times180^\circ$ مبرهنة مجموع الزوايا الداخلية لمضلّع.

$(8-2)\times180^\circ$ عوّض عن n بقيمته.

1080° بسّط.

ب جِد قياس كل زاوية داخليّة في تُساعي منتظم.

الخطوة 1 جِد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للتساعي المنتظم.

$(n-2)\times180^\circ$ مبرهنة مجموع الزوايا الداخلية لمضلّع.

$(9-2)\times180^\circ=1260^\circ$ عوّض عن n بقيمته.

الخطوة 2 جِد قياس زاوية داخليّة واحدة.

$\frac{1260^\circ}{9}=140^\circ$ اقسم المجموع على 9 لأن جميع الزوايا متطابقة.

ج جِد قياس كل زاوية داخليّة في الرباعي المقابل.

$(4-2)\times180^\circ=360^\circ$ مبرهنة مجموع الزوايا الداخلية لمضلّع.

$m\hat{P}+m\hat{Q}+m\hat{R}+m\hat{S}=360^\circ$ مبرهنة مجموع الزوايا الداخلية لمضلّع.

$c+3c+c+3c=360$ عوّض.

$8c=360$ جمعّ الحدود المتشابهة.

$c=45$ اقسم كل طرف على 8.

P Q R S c° 3c° 3c° c°

$m\hat{P}=m\hat{R}=45^\circ$

$m\hat{Q}=m\hat{S}=3(45^\circ)=135^\circ$

نقطة مراقبة

3. أ جِد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلّع له 15 ضلعًا.

ب جِد قياس كل زاوية داخليّة في عُشاري منتظم.

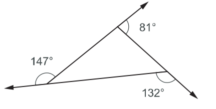
تـذكّـر

الزاوية الخارجيّة لمثلّث هي الزاوية الواقعة بين أحد أضلاع المثلّث وامتداد أحد الضلعين المجاورين له.

تم قياس كل زاوية خارجيّة في كل مضلّع من المضلّعين المقابلين. لاحظ أن مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة في كل مضلّع كان 360°.



$43^\circ+111^\circ+41^\circ+55^\circ+110^\circ=360^\circ$



$147^\circ+81^\circ+132^\circ=360^\circ$



مبرهنة 2-1 مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلّع

مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلّع محدّب هو 360°.

مثـــال 4 إيجاد قياسات الزوايا الخارجية لمضلّع وإيجاد مجموعها

أ جِد قياس كل زاوية خارجيّة لسداسي منتظم.

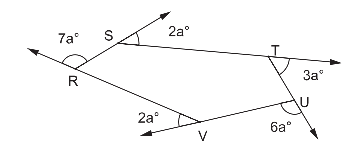
للسداسي 6 أضلاع وَ 6 رؤوس.

مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة هو 360° مبرهنة مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلّع.

قياس كل زاوية خارجيّة هو $\frac{360^\circ}{6}$ أو 60° اقسم على 6 لأن للسداسي المنتظم 6 زوايا خارجيّة متطابقة.

قياس كل زاوية خارجيّة في سداسي منتظم هو 60°.

ب جِد قيمة a في المضلّع المقابل.



$7a^\circ + 2a^\circ + 3a^\circ + 6a^\circ + 2a^\circ = 360^\circ$ مبرهنة مجموع الزوايا الخارجيّة لمضلّع.

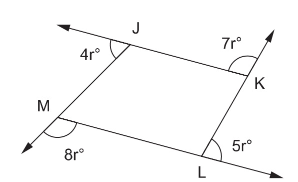
$20a = 360$ جمعّ الحدود المتشابهة.

$a = 18$ اقسم كل طرف على 20.

نقطة مراقبة

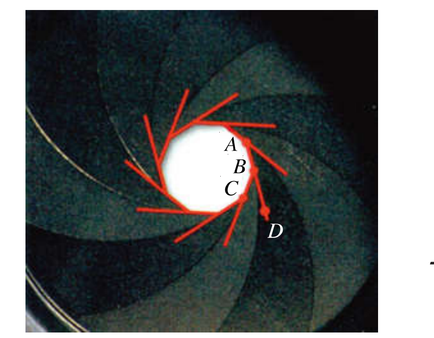
4. **أ** جِد قياس كل زاوية خارجيّة في مضلّع اثني عشري منتظم.

ب جِد قيمة r في المضلّع المقابل.



مثـــال 5 تطبيق على التصوير

تُشكّل 10 شفرات فتحة آلة التصوير. تتراكب الشفرات لكي تُشكّل مضلّعًا عُشاريًا منتظمًا. ما قياس $\widehat{CBD}$ ؟



$\widehat{CBD}$ زاوية خارجيّة في عُشاري منتظم. مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلّع هو 360° بالاستناد إلى مبرهنة مجموع الزوايا الخارجيّة لمضلّع. إذن:

$m\widehat{CBD} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ للعشاري المنتظم 10 زوايا خارجيّة متطابقة، لذا اقسم 360° على 10.

نقطة مراقبة

5. **ماذا لو...** افترض أن عدد الشفرات كان 8 بدلاً من 10. كم سيكون قياس كل زاوية خارجيّة؟

فكّر وناقش

1. ارسم خماسيًّا محدّبًا وخماسيًّا مقعّرًا. أوضح الفرق بين المضلّعين.
2. أوضح السبب الذي يمنعك من استعمال  $\frac{360^\circ}{n}$ لإيجاد قياس زاوية خارجيّة في مضلّع غير منتظم.
3. انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. اكتب في كل خليّة مقدارًا لإيجاد القيمة المحدّدة لمضلّع منتظم له n ضلعًا.



	الزوايا الداخليّة	الزوايا الخارجيّة
مجموع قياسات الزوايا		
قياس كل زاوية		

2-1 التمـاريـن

تمـاريـن موجّهـة

1 **مـفـردات** هل يكفي تطابق الأضلاع لكي يكون المضلّع منتظمًا؟ أوضح جوابك وأسنده بمثال.

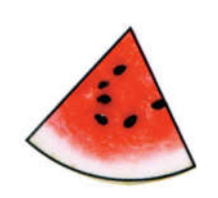
انظر المثال 1

اذكر إن كان كل شكل مضلّعًا أم لا. سَمِّ الشكل إذا كان مضلّعًا.

2


3

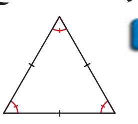

4

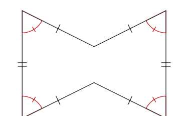

5


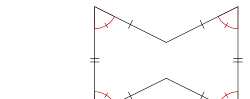


انظر المثال 2

اذكر إن كان المضلّع منتظمًا أم لا، وإن كان محدّبًا أو مقعّرًا.

6


7


8




انظر المثال 3

9 جِد قياس كل زاوية داخليّة في الخماسي المقابل.



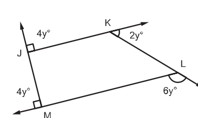
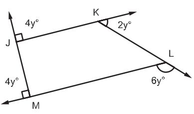
10 جِد قياس كل زاوية داخليّة في مضلّع اثني عشري منتظم.

11 جِد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلّع محدّب من 20 ضلعًا.



انظر المثال 4

12 جِد قيمة y في المضلّع المقابل.

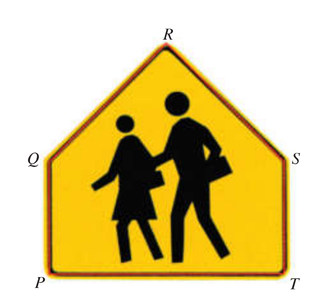



13 جِد قياس كل زاوية خارجيّة في خماسي منتظم.



انظر المثال 5

سلامة عامة استعمل إشارة السير المقابلة لحل التمرينين 14 و 15.



14 سَمِّ المضلّع بحسب عدد أضلاعه.

15 جِد $m\hat{Q}$ و $m\hat{S}$ علمًا بأن $\hat{P}$ و $\hat{R}$ و $\hat{T}$ زوايا قائمة وبأن $\hat{Q} \cong \hat{S}$.

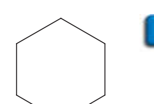
تمـاريـن وحلُّ مسـائل

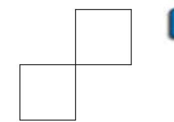


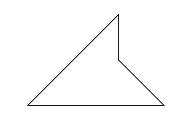
تمارين حرّة

لحل التمارين	انظر المثال
18–16	1
21–19	2
24–22	3
26–25	4
28–27	5

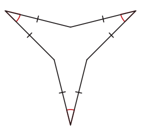
اذكر إن كان الشكل المرسوم مضلّعًا أم لا. سَمِّ الشكل إذا كان مضلّعًا.

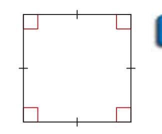
16


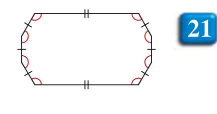
17


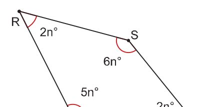
18


اذكر إن كان المضلّع منتظمًا أم لا، وإن كان محدّبًا أو مقعّرًا.

19


20


21




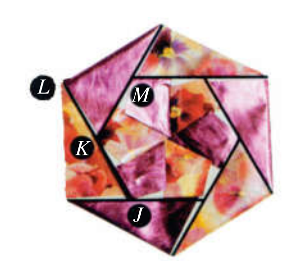
22 جِد قياس كل زاوية داخليّة في المضلّع المقابل.

23 جِد قياس كل زاوية داخليّة في مضلّع منتظم من 18 ضلعًا.

24 جِد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لسباعي.

25 جِد قياس كل زاوية خارجيّة في تساعي منتظم.

26 قياسات الزوايا الخارجيّة لخماسي هي $6a°$، $4a°$، $10a°$، $8a°$، $2a°$. ما قيمة a؟



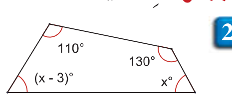
استعمل الصورة المقابلة لحل التمرينين 27 وَ 28.

27 جِد $m\widehat{JKM}$.

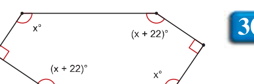
28 جِد $m\widehat{MKL}$.

الجبر جِد قيمة x في كل شكل.

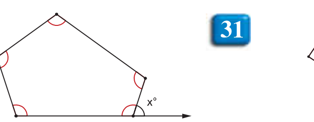
29



30



31



جِد عدد أضلاع المضلّع المناسب للوصف.

32 قياس كل زاوية داخليّة يساوي قياس كل زاوية خارجيّة.

33 قياس كل زاوية داخليّة يساوي 4 أضعاف قياس كل زاوية خارجيّة.

34 قياس كل زاوية خارجيّة يساوي $\frac{1}{8}$ قياس كل زاوية داخليّة.

سَمِّ المضلّع المنتظم الذي يساوي مجموع زواياه الداخليّة كلاً من التالي.

35 $540°$ **36** $900°$ **37** $1800°$ **38** $2520°$

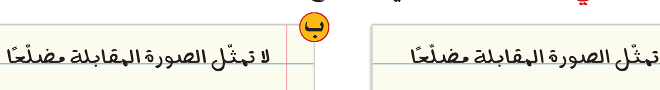
خطوات متعدّدة ما عدد أضلاع مضلّع منتظم وما قياس زاويته الداخليّة، علمًا أن قياس زاويته الخارجيّة هو:



39 $120°$ **40** $72°$ **41** $36°$ **42** $24°$

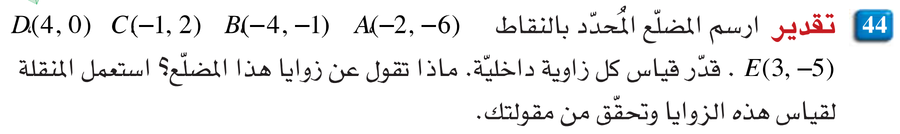
43 **خطأ في التحليل** أي استنتاج خاطئ؟ أين الخطأ؟



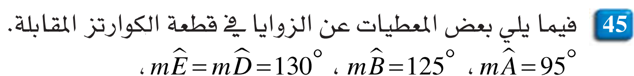


أ تمثّل الصورة المقابلة مضلّعًا

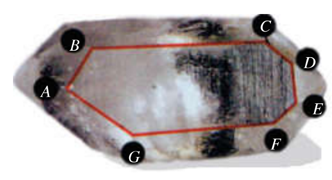
ب لا تمثّل الصورة المقابلة مضلّعًا



44 **تقدير** ارسم المضلّع المُحدّد بالنقاط $A(-2, -6)$ $B(-4, -1)$ $C(-1, 2)$ $D(4, 0)$ $E(3, -5)$. قدّر قياس كل زاوية داخليّة. ماذا تقول عن زوايا هذا المضلّع؟ استعمل المنقلة لقياس هذه الزوايا وتحقّق من مقولتك.



45 فيما يلي بعض المعطيات عن الزوايا في قطعة الكوارتز المقابلة.
$m\hat{A} = 95°$، $m\hat{B} = 125°$، $m\hat{E} = m\hat{D} = 130°$،
$m\hat{C} = m\hat{F} = m\hat{G}$



أ سَمِّ المضلّع $ABCDEFG$.



ب ما مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لهذا المضلّع؟

ج جِد $m\hat{F}$.



46 مضلّع منتظم محيطه 45 m وطول ضلع من أضلاعه 7.5 m. سمِّ هذا المضلّع.

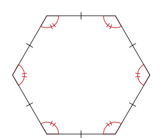
ارسمْ:

47 رباعيًّا منتظمًا

48 سباعيًّا مقعّرًا غير منتظم

49 خماسيًّا محدّبًا غير منتظم

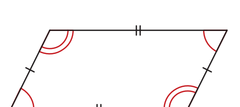
50 مضلّعًا أضلاعه متطابقة وزواياه غير متطابقة



51 **اكتب** استعمل مفردات الدرس لكي تطلق على المضلّع المقابل كل الصفات الممكنة

52 **تفكير ناقد** إلى أي شكل هندسي يقترب مضلّع منتظم بتزايد عدد أضلاعه؟





53 أي أوصاف تنطبق على الشكل المقابل؟

I. رباعي II. مقعّر III. منتظم

(أ) I فقط (ب) II فقط (ج) I و II (د) I و III

54 أيُّ وصف لا ينطبق على مضلَّع منتظم من 16 ضلعًا.

(أ) مضلّع محدّب

(ج) مجموع قياسات زواياه الداخليّة 2880°

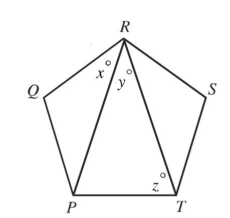
(ب) جميع أضلاعه متطابقة

(د) مجموع زواياه الخارجيّة 360°

55 ما $m\hat{C}$ في رباعي $ABCD$ علمًا بأن $m\hat{A}=45^\circ$ و $m\hat{B}=111^\circ$ و $m\hat{C}=2m\hat{D}$ ؟

(أ) 24° (ب) 68° (ج) 102° (د) 136°





56 تُشكّل قياسات الزوايا الداخليّة لخماسي محدّب متتالية أعداد يزيد كل منها، باستثناء الأول، 4 عن سابقه. جِد قياسات زوايا هذا الخماسي.

57 جِد قيم x و y و z في الخماسي المقابل علمًا بأنه منتظم.

58 **خطوات متعدّدة** المضلّع $ABCDEFGHJK$ عُشاري منتظم. تم تمديد الضلعين $\overline{AB}$ و $\overline{DE}$ لكي يلتقيا عند النقطة L خارج المضلّع. جِد $m\widehat{BLD}$.

59 **تفكير ناقد** هل تصح مبرهنة مجموع الزوايا الداخليّة للمضلّع على مضلّع مقعّر؟ ارسم شكلاً لإسناد جوابك.

مراجعة لولبية

حُلّ كل معادلة باستعمال التحليل. (الصفوف السابقة)

60 $x^2+3x-10=0$

61 $x^2-x-12=0$

62 $x^2-12x=-35$

في التمارين من 63 إلى 65، يُعطى طولا ضلعين من أضلاع مثلّث. عليك أن تجد حدّين يقع بينهما طول الضلع الثالث x. (الصفوف السابقة)

63 4 ؛4

64 12 ؛6

65 7 ؛3

في مثلّث قائم 90 – 60 – 30 ، جِدْ: (الصفوف السابقة)

66 طول الوتر علمًا بأن طول الضلع الأصغر للزاوية القائمة 6.

67 طول الضلع الأكبر للزاوية القائمة علمًا بأن طول الوتر 10.

3-1 التناسب الهندسي

Dilation



من يستعمل هذا الأمر؟

تستعمل برمجيّات الحاسوب الإحداثيّات للتكبير والتصغير.

الأهداف

يُطبّق خصائص التشابه في المستوى الإحداثي.

يُبرهن تشابه شكلين هندسيين باستعمال الإحداثيّات.

المفردات
Vocabulary

التناسب الهندسي
Dilation

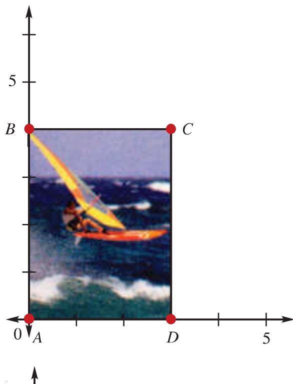
نسبة التحويل
Scale factor

تعتمد أكثر الصور التي تراها على الإنترنت بنية JPEG (format)، لأنها تسهّل تبادل الصور وانتقالها. عندما تجرّ بواسطة الماوس زاوية صورة من بنية JPEG بهدف تكبيرها أو تصغيرها، تحسب البرمجيّة قياسات الصورة الناتجة باستعمال الإحداثيّات والتشابه.

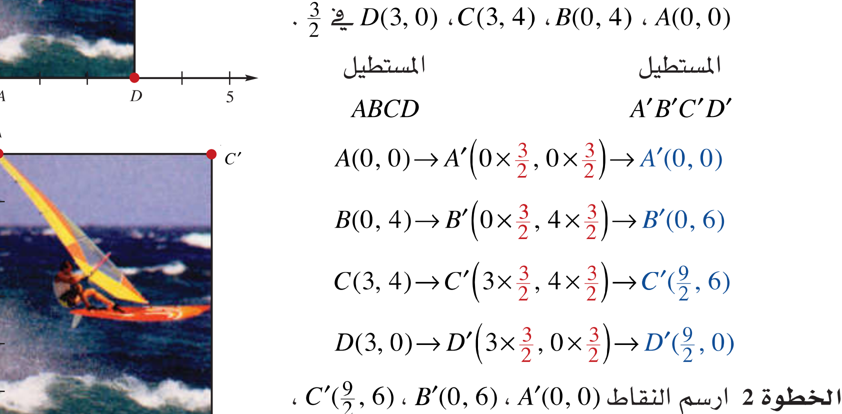
التناسب الهندسي Dilation تحويل هندسي يُغيّر قياسات شكل هندسي مع المحافظة على هيئته. الأصل والصورة في هذا التحويل هما شكلان متشابهان. **نسبة** هذا التحويل الهندسي **Scale factor** هي عدد حقيقي موجب $k \neq 1$ يُبيّن كم تم تكبير (أو تصغير) الصورة قياسًا على الأصل. صورة النقطة (x, y) بتناسب هندسي نسبته k هي النقطة (kx, ky) . يكون التناسب الهندسي **تكبيرًا** إذا كان $k > 1$ ويكون **تصغيرًا** إذا كان $k < 1$.

مثال 1 تطبيق على برمجيّات الحاسوب

يُبيّن الشكل المقابل موقع صورة من بنية JPEG. ارسم حدود الصورة الناتجة من تحويل الصورة الأصليّة بتكبير نسبته $\frac{3}{2}$.



الخطوة 1 اضرب إحداثيّات كل رأس من رؤوس الأصل، $A(0, 0)$ ، $B(0, 4)$ ، $C(3, 4)$ ، $D(3, 0)$ في $\frac{3}{2}$.



المستطيل $A'B'C'D'$	المستطيل $ABCD$

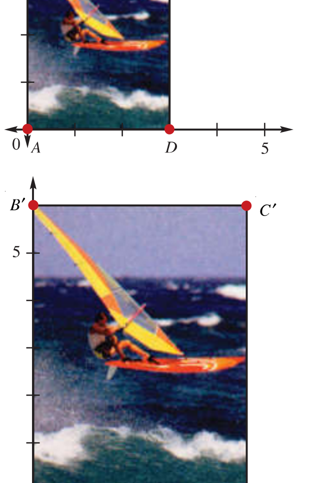
$$A(0, 0) \rightarrow A'\left(0 \times \frac{3}{2}, 0 \times \frac{3}{2}\right) \rightarrow A'(0, 0)$$

$$B(0, 4) \rightarrow B'\left(0 \times \frac{3}{2}, 4 \times \frac{3}{2}\right) \rightarrow B'(0, 6)$$

$$C(3, 4) \rightarrow C'\left(3 \times \frac{3}{2}, 4 \times \frac{3}{2}\right) \rightarrow C'\left(\frac{9}{2}, 6\right)$$

$$D(3, 0) \rightarrow D'\left(3 \times \frac{3}{2}, 0 \times \frac{3}{2}\right) \rightarrow D'\left(\frac{9}{2}, 0\right)$$

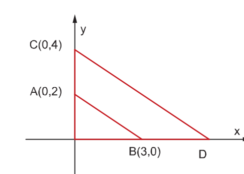
الخطوة 2 ارسم النقاط $A'(0, 0)$ ، $B'(0, 6)$ ، $C'(\frac{9}{2}, 6)$ ، $D'(\frac{9}{2}, 0)$ ثم ارسم المستطيل.





1. **ماذا لو...** ارسم حدود الصورة الناتجة من تحويل الصورة الأصليّة بتصغير نسبته $\frac{1}{2}$.

مثـــــال 2 إيجاد إحداثيّات شكل هندسي مشابه لشكل مُعطى



جِدْ إحداثيي النقطة D ونسبة التناسب الهندسي الذي يُحوّل النقطة B إلى النقطة D، ونوعه؛ علمًا بأن المثلّثين AOB وَ COD متشابهان.

بما أن المثلّثين متشابهان فإن $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

$\frac{2}{4} = \frac{3}{OD}$ عوّض عن كل قياس معروف بقيمته.

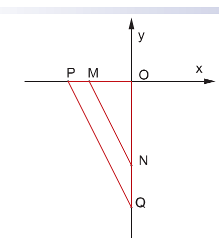
أو $2OD = 12$ خاصيةّ الضرب المتعامد.

$OD = 6$ اقسم كل طرف على 2.

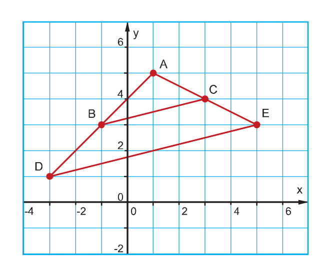
بما أن D تقع على المحور الأول. فإن إحداثيها الثاني يساوي 0. وبما أن $OD = 6$ فإن إحداثيها الأول يساوي 6. إحداثيا D هما $(6, 0)$. بما أن $(6, 0) = (3 \times 2, 0 \times 2)$ فإن نسبة التحويل هي 2 . إنه تكبير.

نقطة مراقبة

2. المثلّثان MON وَ POQ متشابهان حيث $M(-10, 0)$ ، $P(-15, 0)$ ، $Q(0, -30)$.
جِد إحداثيي N ونسبة التناسب الهندسي، ثم حدّد نوعه.



مثـــــال 3 البرهنة إحداثيًا على تشابه مثلّثين



المعطى: $A(1, 5)$ ، $B(-1, 3)$ ، $C(3, 4)$ ، $D(-3, 1)$ ، $E(5, 3)$.

المطلوب: برهن تشابه المثلّثين ABC وَ ADE.

الخطوة 1 ارسم النقاط، ثم المثلّثين.

الخطوة 2 استعمل قانون المسافة لحساب أطوال الأضلاع.

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{5}$$

$$AD = \sqrt{(-3-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$AE = \sqrt{(5-1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

الخطوة 3 جِد نسبة التشابه.

$$\frac{AB}{AD} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

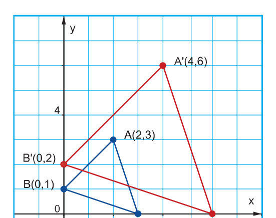
بما أن $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ وبما أن $\widehat{BAC} \cong \widehat{DAE}$ فإن المثلّثين متشابهان.



3. **المعطى:** $R(-2, 0)$ ، $S(-3, 1)$ ، $T(0, 1)$ ، $U(-5, 3)$ ، $V(4, 3)$.
المطلوب: برهن تشابه المثلّثين RST وَ RUV.

مثـــال 4 استعمال مبرهنة SSS لتشابه المثلّثات

ارسم المثلّث $A'B'C'$ صورة المثلّث ABC بتكبير نسبته 2.
تحقّق من تشابه المثلّثين.



الخطوة 1 اضرب إحداثيّات كل نقطة في 2 لتجد إحداثيّات المثلّث $A'B'C'$.

$$A(2,3)\rightarrow A'(2\times 2, 3\times 2)\rightarrow A'(4,6)$$
$$B(0,1)\rightarrow B'(0\times 2, 1\times 2)\rightarrow B'(0,2)$$
$$C(3,0)\rightarrow C'(3\times 2, 0\times 2)\rightarrow C'(6,0)$$

الخطوة 2 ارسم المثلّث $A'B'C'$.

الخطوة 3 استعمل قانون المسافة لحساب أطوال الأضلاع.

$$AB=\sqrt{(2-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$
$$A'B'=\sqrt{(4-0)^2+(6-2)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$
$$BC=\sqrt{(3-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{10}$$
$$B'C'=\sqrt{(6-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$
$$AC=\sqrt{(3-2)^2+(0-3)^2}=\sqrt{10}$$
$$A'C'=\sqrt{(6-4)^2+(0-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

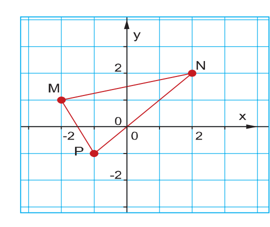
الخطوة 4 جِد نسبة التشابه.

$\frac{A'B'}{AB}=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=2$ ، $\frac{B'C'}{BC}=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=2$ ، $\frac{A'C'}{AC}=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=2$.

بما أن $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$ فإن المثلّثين $A'B'C'$ وَ ABC متشابهان.



4. ارسم صورة المثلّث MNP بتكبير نسبته 3. تحقّق من أن هذا المثلّث وصورته بالتكبير متشابهان.

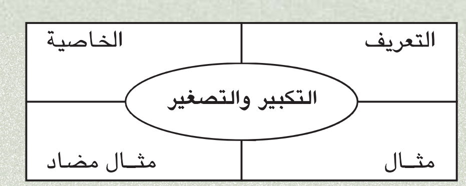


فكّر وناقش

1. إحداثيّات رؤوس المثلّث JKL هي $J(0,0)$ ، $K(0,2)$ ، $L(3,0)$. إحداثيّات رؤوس صورة هذا المثلّث بتناسب هندسي هي $J'(0,0)$ ، $K'(0,8)$ ، $L'(12,0)$. كيف تجد نسبة التناسب الهندسي؟ وكيف تحدّد نوعه؟



2. كن منظّمًا انسخ المخطّط أدناه ثم أكمله. دوِّن في كل إطار ما هو مطلوب.



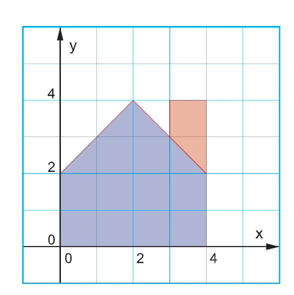
3-1 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** نسبة قياسات صورة شكل هندسي بتكبير أو تصغير هي ? . (التناسب الهندسي، نسبة التناسب الهندسي).

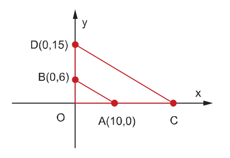
انظر المثال 1

2 **تصميم بياني Graphic Design** صمّم أحد المهندسين الشكل المقابل ليكون شعارًا لإحدى المؤسّسات. طلب مدير المؤسّسة من المهندس تكبير هذا الشعار بنسبة 2. ارسم الشعار بعد تكبيره.

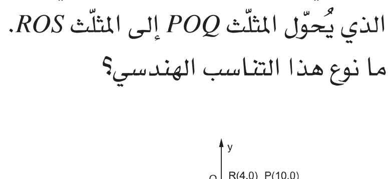


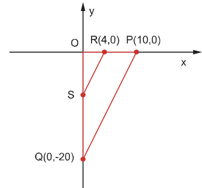
انظر المثال 2

3 المثلّثان AOB وَ COD متشابهان. جِد إحداثيي C ونسبة التناسب الهندسي الذي يُحوّل المثلّث AOB إلى المثلّث COD. ما نوع هذا التناسب الهندسي؟



4 المثلّثان ROS وَ POQ متشابهان. جِد إحداثيي S ونسبة التناسب الهندسي الذي يُحوّل المثلّث POQ إلى المثلّث ROS. ما نوع هذا التناسب الهندسي؟





انظر المثال 3

5 **المُعطى:** $A(0, 0)$ ، $B(-1, 1)$ ، $C(3, 2)$ ، $D(-2, 2)$ ، $E(6, 4)$.

المطلوب: برهن أن المثلّثين ABC وَ ADE متشابهان.

6 **المُعطى:** $J(-1, 0)$ ، $K(-3, -4)$ ، $L(3, -2)$ ، $M(-4, -6)$ ، $N(5, -3)$.

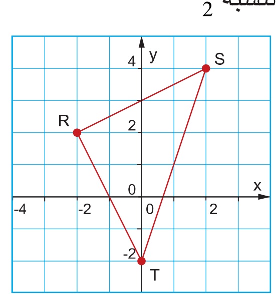
المطلوب: برهن أن المثلّثين JKL وَ JMN متشابهان.

انظر المثال 4

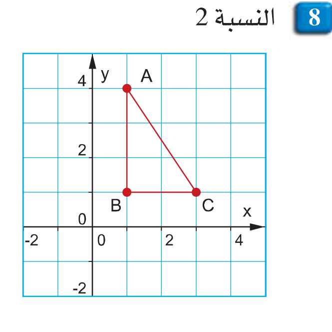
خطوات متعدّدة ارسم صورة كل مثلّث بالتكبير المُعطاة نسبته، ثم تحقّق من أن الصورة والأصل مثلّثان متشابهان.

7 النسبة $\frac{3}{2}$





8 النسبة 2



تمـــارين وحلُّ مســـائـل

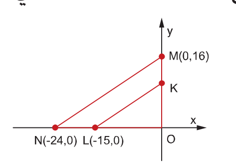
تمارين حرّة

لحل التمارين	أنظر المثال
10	1
12–11	2
14–13	3
16–15	4

9 **إعلانات** صمّمت إحدى وكالات الإعلان الرسم المقابل شعارًا لشهر التسوّق. ترغب الوكالة في تصغير هذا الشعار بنسبة النصف لطبعه على بطاقات. ارسم الشعار بعد تصغيره.

10 المثلّثان UOV وَ XOY متشابهان. جِد إحداثيي X ونسبة التناسب الهندسي الذي يُحوّل المثلّث UOV إلى المثلّث XOY. ما نوع هذا التناسب الهندسي؟

11 المثلّثان MON وَ KOL متشابهان. جِد إحداثيي K ونسبة التناسب الهندسي الذي يُحوّل المثلّث MON إلى المثلّث KOL. ما نوع هذا التناسب الهندسي؟



12 **المُعطى :** $D(-1, 3)$، $E(-3, -1)$، $F(3, -1)$، $G(-4, -3)$، $H(5, -3)$.
المطلوب: أثبت أن المثلّثين DEF وَ DGH متشابهان.

13 **المُعطى :** $M(0, 10)$، $N(5, 0)$، $P(15, 15)$، $Q(10, -10)$، $R(30, 20)$.
المطلوب: أثبت أن المثلّثين MNP وَ MQR متشابهان.

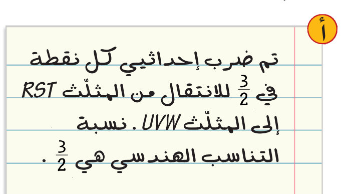
خطوات متعدّدة ارسم صورة كل مثلّث بعد تحويله تكبيرًا أو تصغيرًا بالنسبة k. بعد ذلك، تحقّق من أن المثلّث وصورته متشابهان.

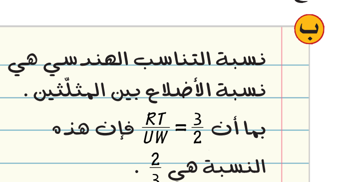
14 $J(-2, 0)$، $K(-1, -1)$، $L(-3, -2)$؛ $k = 3$.

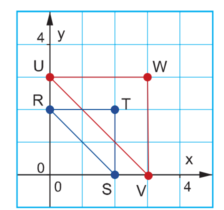
15 $M(0, 4)$، $N(4, 2)$، $P(2, -2)$؛ $k = \frac{1}{2}$.

16 **تفكير ناقد** هل التحويل الهندسي الذي يُحوّل النقطة (x, y) إلى النقطة $(2x, 4y)$ تناسب هندسي؟ أوضح جوابك.

17 **خطأ في التحليل** في ما يلي حلان لإيجاد نسبة التناسب الهندسي الذي يحوّل المثلّث RST إلى المثلّث UVW، أيهما خطأ؟ أوضح جوابك.



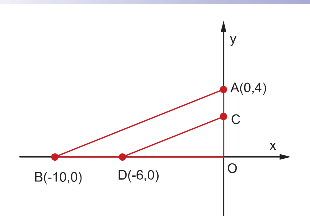




18 **اكتب** المثلّث $A'B'C'$ هو صورة المثلّث ABC بتناسب هندسي. ما العلاقة بين نسبة التناسب الهندسي ونسبة التشابه بين المثلّثين؟ أوضح جوابك.

19 ما إحداثيّات J وَ L، إذا اعتبرت أن كل وحدة على محورَي الإحداثيّات تُقابل 60 cm في الواقع؟ ارسم المثلّث في المستوى الإحداثي، ثم ارسم تكبيره بنسبة 3.





20 أي إحداثيّات تختار للنقطة C لكي يكون المثلّثان COD وَ AOB متشابهين؟

(أ) $(0, 2.4)$ (ج) $(0, 3)$

(ب) $(0, 2.5)$ (د) $(0, 3.6)$

21 المثلّث $A'B'C'$ هو نتيجة تكبير المثلّث ABC بنسبة 2. كم محيط $A'B'C'$ إذا كان محيط ABC 60؟

(أ) 30 وحدة (ب) 60 وحدة (ج) 120 وحدة (د) 240 وحدة

22 أي مثلّث DEF مشابه للمثلّث ABC؟

(أ) $D(1, 2)$ ، $E(3, 2)$ ، $F(2, 0)$

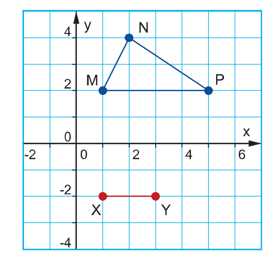
(ب) $D(-1, -2)$ ، $E(2, -2)$ ، $F(1, -5)$

(ج) $D(1, 2)$ ، $E(5, 2)$ ، $F(3, 0)$

(د) $D(-2, -2)$ ، $E(0, 2)$ ، $F(-1, 0)$

23 **جواب مختصر** تم تكبير $\overline{AB}$ ، حيث $A(3, 2)$ وَ $B(7, 5)$ ، بنسبة 3. كم طول الصورة $\overline{A'B'}$ ؟

تحدٍّ وتوسُّع



24 كم مثلّثًا أحد أضلاعه $\overline{XY}$ مشابه للمثلّث MNP؟

25 جِد إحداثيي Z بحيث يكون المثلّث XYZ مشابهًا للمثلّث MPN.

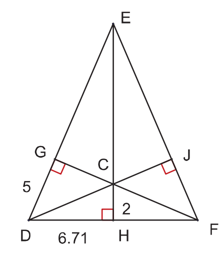
26 يقع ضلعا مستطيل على محورَي الإحداثيّات، بينما يقع أحد رؤوسه في نقطة الأصل من المستوي الإحداثي، ويقع رأس آخر على المستقيم $y=2x$. أثبت أن مستطيلين يُحقّقان الشروط السابقة متشابهان.

27 رؤوس المثلّث ABC هي $A(0, 1)$ ، $B(3, 1)$ ، $C(1, 3)$. جِد موقعين للرأس F في المثلّث DEF، حيث $D(1, -1)$ وَ $E(7, -1)$ ، لكي يكون المثلّثان متشابهين.

مراجعة لولبية

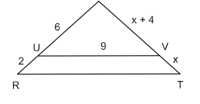
اكتب متباينة لتمثيل الحالة. (الصفوف السابقة)

28 تحمل رافعة 250kg على الأقل. تم تثبيت جسمين كتلة كل منهما 50kg على طرفَي عارضة الرافعة التي كتلتها 5kg. ارمز بالمتغيّر x إلى كتلة يُمكن أن تُضاف مجدّداً إلى العارضة. اكتب متباينة يُحقّقها x.



جِد طول كل قطعة مستقيمة علمًا بأن $\overline{DE} \cong \overline{FE}$.

29 $\overline{HF}$ **30** $\overline{JF}$ **31** $\overline{CD}$



جِد طول كل قطعة مستقيمة علمًا بأن المثلّثين RST وَ USV متشابهان.

32 $\overline{RT}$ **33** $\overline{VT}$ **34** $\overline{ST}$

4-1 المُتّجهات
Vectors

الأهداف

يجد طول متّجِه واتجاهه.

يستعمل المتّجهات وجمعها ليحل مسائل من الحياة اليوميّة.

المفردات
Vocabulary

المتّجِه
Vector

مكوّنُ المتّجِه
Component

طولُ المتّجِه
Magnitude

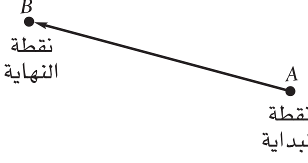
اتجاه المتّجِه
Direction



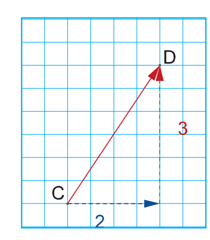
من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل ممارسو سباقات الزوارق النهريّة المتّجهات لكي يأخذوا في الحسبان تيّار الماء عندما يُخطّطون للسباق (المثال 5).

يُمكنك استعمال المتّجهات لتمثيل سرعة واتجاه جسم متحرّك. **المتّجِه Vector** كميّة تتحدّد بطولٍ واتجاه. يُمكنك تصوّر المتّجِه كما لو كان قطعة مستقيمة موجّهة. لتسمية المتّجِه أدناه، اكتب $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{u}$.



يُمكنك أيضًا أن تُسمّي المتّجه باستعمال مكوّنَيه. **مكوّنا المتّجه Components** عددان يدل أوّلهما على مدى **التحرّك الأفقي** والثاني على مدى **التحرّك العمودي** اللازمين للانتقال من نقطة البداية في المتّجه إلى نقطة النهاية فيه. تكتب المتّجه الذي مكوّنه الأوّل x ومكوّنه الثاني y على الصورة $\langle x, y\rangle$. مثلاً تكتب $\langle 2, 3\rangle$ للدلالة على المتّجه $\overrightarrow{CD}$.

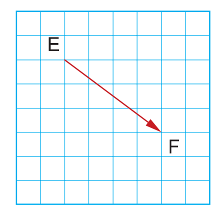


مثـــال 1 كتابة متّجه بمكوّنَيْه

اكتب كل متّجه بمكوّنَيْه.

أ المتّجه $\overrightarrow{EF}$

للانتقال من النقطة E إلى النقطة F، تتحرّك أفقيًّا 4 وحدات إلى اليمين، وَ 3 وحدات إلى الأسفل. المكوّن الأوّل هو 4+ والمكوّن الثاني هو 3−. المتّجه $\overrightarrow{EF}$ هو إذن المتّجه $\langle 4, -3\rangle$.



ب المتّجه $\overrightarrow{PQ}$ حيث $P(7, -5)$ وَ $Q(4, 3)$.

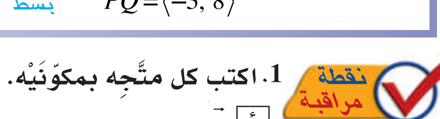
$\overrightarrow{PQ} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ اطرح إحداثيّي نقطة البداية من إحداثيّي نقطة النهاية.

$\overrightarrow{PQ} = \langle 4 - 7, 3 - (-5)\rangle$ عوّض عن كل إحداثي بقيمته.

$\overrightarrow{PQ} = \langle -3, 8\rangle$ بسّط

انتبــه!

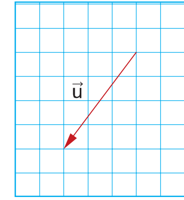
نستعمل الكتابة $\langle a, b\rangle$ للدلالة على مُتجه والكتابة (a, b) للدلالة على نقطة.

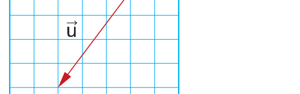


1. اكتب كل متّجِه بمكوّنَيْه.

أ $\vec{u}$

ب المتّجه $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(-1, 1)$ وَ $B(6, 2)$



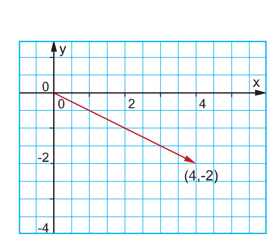


طول Magnitude المتّجه هو المسافة بين نقطة البداية ونقطة النهاية في المتّجه. يُكتب هذا العدد على الصورة $|\overrightarrow{AB}|$ أو $|\vec{v}|$.

عندما يُستعمل متّجه لتمثيل سرعة شيء متحرّك في اتجاه معيّن، فإن طول المتّجه يساوي سرعة الشيء المتحرّك. فطول المتّجه الذي يُمثّل حركة الزورق النهري يُمثّل سرعة الزورق.

مثـــال 2 إيجاد طول متّجه

ارسم المتّجه $\langle 4, -2 \rangle$ في المستوي الإحداثي. احسب طوله وقرّب الجواب إلى أقرب عُشر.



الخطوة 1 ارسم المتّجه في المستوي الإحداثي مستعملاً نقطة الأصل كنقطة بداية. نقطة النهاية هي النقطة $(4, -2)$.

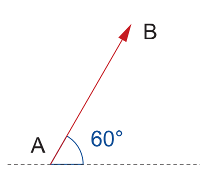
الخطوة 2 احسب طول المتّجه باستعمال قانون المسافة.



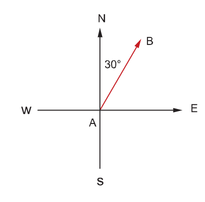
$$|\langle 4, -2 \rangle| = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{20} \approx 4.5$$



2. ارسم المتّجه $\langle -3, 1 \rangle$ في المستوي الإحداثي. احسب طوله، وقرّب الجواب إلى أقرب عُشر.



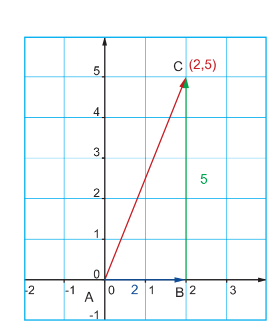
اتجاه Direction المتّجه هو الزاوية التي يُشكّلها مع مستقيم أفقي. تُقاس هذه الزاوية في الاتجاه المعاكس لحركة عقارب الساعة، انطلاقًا من الجزء الموجب من المحور الأوّل.



يُمكن التعبير أيضًا عن اتجاه المتّجه بتحديد الزاوية التي يُشكّلها مع أحد الاتجاهات الأربعة: شرق، غرب، شمال، جنوب. فاتجاه المتّجه المقابل $\overrightarrow{AB}$ هو شمال $-30^\circ-$ شرق أو شمال شرقي 30°.

مثـــال 3 إيجاد اتجاه متّجه

يمثّل المتّجه $\langle 2, 5 \rangle$ اتجاه الريح وسرعتها. ارسم المتّجه في المستوي الإحداثي، وجِد اتجاهه مقرّبًا إلى أقرب درجة.



الخطوة 1 ارسم المتّجه في المستوي الإحداثي مستعملاً نقطة الأصل كنقطة بداية. نقطة النهاية هي النقطة $(2, 5)$.

الخطوة 2 جِد الاتجاه. ارسم المثلّث القائم ABC. الزاوية التي يُشكّلها المتّجه مع الجزء الموجب من المحور الأول هي $\hat{A}$.

$\tan \hat{A} = \frac{5}{2}$ ينتج عن ذلك $m\hat{A} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \approx 60^\circ$.



3. يُمثّل المتّجه $\langle 7, 3 \rangle$ قوّة السحب التي تسحب بها القاطرة البحريّة مركبًا معطّلاً. ارسم المتّجه في المستوي الإحداثي، وجِد اتجاهه مقرّبًا إلى أقرب درجة.

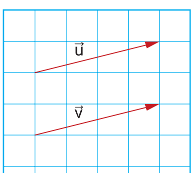


انتبــه!

B ●———● A

لاحظ أن $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ لأن اتجاه الأوّل مختلف عن اتجاه الثاني.

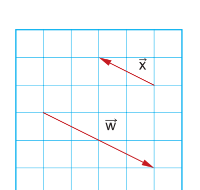
يتساوى متّجهان إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه. مثلاً: $\vec{u} = \vec{v}$. ليس من الضروري أن يكون لمتّجهين متساويين نقطة البداية نفسها ونقطة النهاية نفسها.



$|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2\sqrt{5}$

يتوازى متّجهان إذا كان مستقيماهما متوازيين. يُمكن لمتجهين متوازيين أن يختلفا في الطول. مثلاً: المتجهان $\vec{x}$ وَ $\vec{w}$ متوازيان.

إذا تساوى متّجهان فإنهما يتوازيان.

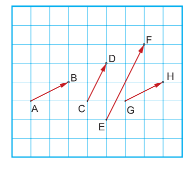


$|\vec{w}| = 2\sqrt{5}$

$|\vec{x}| = \sqrt{5}$

مثـــال 4 تمييز المتّجهات المتساوية والمتّجهات المتوازية

ميّز في الرسم المقابل:



أ المتّجهات المتساوية

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GH}$ ميّز المتّجهات التي لها الطول نفسه والاتّجاه نفسه.

ب المتّجهات المتوازية

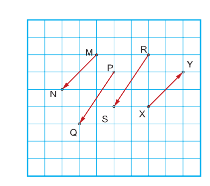
$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{GH}$ $\quad \overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{EF}$ ميّز المتّجهات التي لها الاتجاه نفسه أو اتجاهات متعاكسة.



4. ميّز في الرسم المقابل.

أ المتّجهات المتساوية.

ب المتّجهات المتوازية.



مُحصّلة Resultant متّجهين هي المتّجه الذي يُمثّل مجموعهما. لجمع متّجهين هندسيًّا، يُمكنك أن تستعمل طريقة **من الرأس إلى الذيل** أو طريقة **متوازي الأضلاع**.

اعلم و احفظ — **جمع المتّجهات**

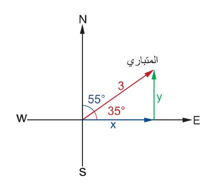
الطريقة	مثال
طريقة من الرأس إلى الذيل	
ضع نقطة البداية **للمتّجه الثاني** فوق نقطة النهاية **للمتّجه الأوّل**. **المحصّلة** هي المتّجه الذي تكون نقطة بدايته نقطة بداية المتّجه الأوّل ونقطة نهايته نقطة نهاية **المتّجه الثاني**.	$\vec{u}$، $\vec{v}$، $\vec{u}+\vec{v}$
طريقة متوازي الأضلاع	
استعمل نقطة واحدة كنقطة بداية للمتّجهين. أنشئ متوازي أضلاع بإضافة نسخة عن كل متّجه عند نقطة النهاية العائدة للمتّجه الآخر. **المحصّلة** هي المتّجه الذي تكون نقطة بدايته نقطة البداية المشتركة للمتّجهين ونقطة نهايته الطرف الآخر للقطر.	$\vec{u}$، $\vec{v}$، $\vec{u}+\vec{v}$

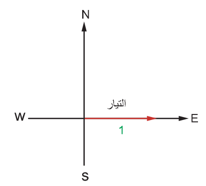
لكي تجمع متّجهين عدديًّا، اجمع مكوّنيهما. إذا كان $\vec{u}=\langle x_1, y_1\rangle$ وَ $\vec{v}=\langle x_2, y_2\rangle$ فإن $\vec{u}+\vec{v}=\langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle$.

مثـــال 5 تطبيق على الرياضة

انطلق زورق بسرعة 3 km/h في الاتجاه شمال شرقي 55° . هبّ تيار مائي بسرعة كيلومتر واحد في الساعة باتجاه الشرق. كم صارت سرعة الزورق؟ وكيف صار اتجاهه؟ قرّب السرعة إلى أقرب عُشر والاتجاه إلى أقرب درجة.

الخطوة 1 ارسم المتّجهين اللذين يمثّلان حركة الزورق وحركة التيّار.





الخطوة 2 اكتب متّجه حركة الزورق بمكوّنيه.

طول المتّجه الذي يُمثّل حركة المتباري هو 3 km/h وهو يُشكّل زاوية قياسها 35° مع الاتجاه الموجب للمحور الأول.

$\cos 35^\circ = \frac{x}{3}$. ينتج من ذلك $x=3\cos 35^\circ \approx 2.5$.

$\sin 35^\circ = \frac{y}{3}$. ينتج من ذلك $y=3\sin 35^\circ \approx 1.7$.

المتّجه الذي يمثّل حركة المتباري هو $\langle 2.5, 1.7\rangle$.

الخطوة 3 اكتب متّجه التيّار بمكوّنيه.

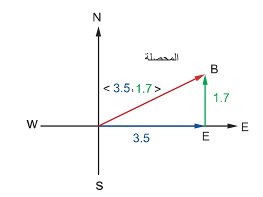
بما أن التيّار يتحرّك بسرعة كيلومتر واحد باتجاه الشرق فإن مكوّنه الأول يساوي 1 ومكوّنه الثاني يساوي 0. المتّجه الذي يمثّل حركة التيّار هو $\langle 1, 0\rangle$.

الخطوة 4 جِد محصلة المتّجهين وارسمه.

اجمع مكوّني المتّجه الأوّل مع مكوّني المتّجه الثاني.

$\langle 2.5, 1.7\rangle+\langle 1, 0\rangle=\langle 3.5, 1.7\rangle$.

محصّلة المتّجهين هي المتّجه $\langle 3.5, 1.7\rangle$.



الخطوة 5 جِد طول المحصّلة واتجاهها.

طول المحصّلة هو السرعة الفعليّة للمتباري.

$|\langle 3.5, 1.7\rangle|=\sqrt{(3.5-0)^2+(1.7-0)^2}\approx 3.9$.

السرعة الفعليّة للمتباري هي 3.9 km/h تقريبًا.

يتحدّد اتجاه المحصّلة بالزاوية التي تُشكّلها مع الجزء الموجب من المحور الأوّل.

$\tan \hat{A}=\frac{1.7}{3.5}$. ينتج من ذلك $m\hat{A}=\tan^{-1}\left(\frac{1.7}{3.5}\right)\approx 26^\circ$.

اتجاه المحصّلة هو شمال شرقي -64° تقريبًا لأنّ $90^\circ-26^\circ=64^\circ$.

تـذكَّـرْ

تساعد كتابة متّجه بمكوّنيه على تحديد مدى التحرّك أفقيًّا وعموديًّا، للانتقال من نقطة البداية إلى نقطة النهاية.



5. **ماذا لو...؟** افترض أن المتباري كان يتحرّك بسرعة 4 km/h في الاتجاه شمال شرقي 55° . ما السرعة الفعليّة للمتباري؟ وما اتجاه حركته؟ قرّب السرعة إلى أقرب عُشر والاتجاه إلى أقرب درجة.

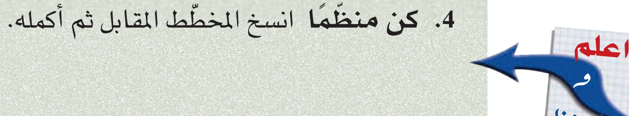
فكِّر وناقش

1. أوضح لماذا لا يمكن اعتبار القطعة المستقيمة التي طرفاها $(0, 0)$ وَ $(1, 4)$ متّجهًا.
2. افترض أنك تعرف مكوّني متّجه. كيف تجد طوله من دون استعمال قانون المسافة؟
3. صِف كيف تجمع متّجهين عدديًّا.
4. **كن منظّمًا** انسخ المخطّط المقابل ثم أكمله.

التعريف	التسمية
متّجه	
أمثلة	أمثلة مضادة

اعلم و احفظ

4-1 التمارين



تمارين موجّهة

مفردات استعمل مفردات الدرس لكي تُجيب عن كل سؤال.

1 إذا كان لمتّجهين الطول نفسه والاتجاه نفسه، فإنهما __?__ . (متساويان، متوازيان)

2 إذا كان لمتّجهين الاتجاه نفسه أو اتجاهان متعاكسان فإنهما __?__ . (متساويان، متوازيان)

3 يدل __?__ المتّجه على كِبَره. (طول، اتجاه)

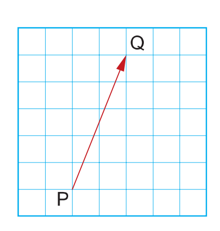
انظر المثال 1

اكتب كل متّجه بمكوّنيه.

4 $\overrightarrow{AC}$ حيث $A(1, 2)$ وَ $C(6, 5)$.

5 المتّجه الذي نقطة بدايته $M(-4, 5)$ ونقطة نهايته $N(4, -3)$.

6 المتّجه $\overrightarrow{PQ}$ المقابل.



انظر المثال 2

ارسم كل متّجه في المستوي الإحداثي. جد طوله مقرّبًا إلى أقرب عُشر.

7 $\langle 1, 4\rangle$ 8 $\langle -3, -2\rangle$ 9 $\langle 5, -3\rangle$

انظر المثال 3

ارسم كل متّجه في المستوي الإحداثي. جد اتجاهه مقرّبًا إلى أقرب درجة.

10 المتّجه $\langle 4, 6\rangle$ الذي يُمثّل تيّار الماء في نهر.

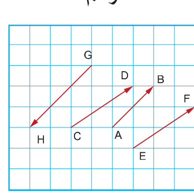
11 المتّجه $\langle 5, 1\rangle$ الذي يُمثّل حركة طائرة.

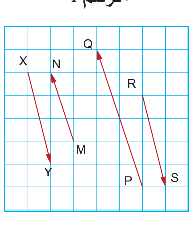
12 المتّجه $\langle 6, 3\rangle$ الذي يُمثّل حركة سهم.

انظر المثال 4

ميّز كلاً ممّا يلي.





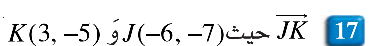


13 المتّجهات المتساوية في الرسم 1.

14 المتّجهات المتوازية في الرسم 1.

15 المتّجهات المتساوية في الرسم 2.

16 المتّجهات المتوازية في الرسم 2.



تمارين وحلّ مسائل

لحل التمارين	انظر المثال
19–17	1
22–20	2
25–23	3
29–26	4
30	5

اكتب كل متّجه بمكوّنيه.

17 $\overrightarrow{JK}$ حيث $J(-6, -7)$ وَ $K(3, -5)$

18 $\overrightarrow{EF}$ حيث $E(1.5, -3)$ وَ $F(-2, 2.5)$

19 $\vec{W}$ (في الرسم المقابل).

ارسم كل متّجه في المستوي الإحداثي. جِد طوله مقرّبًا إلى أقرب عُشر.

20 $\langle -2, 0 \rangle$

21 $\langle 1.5, 1.5 \rangle$

22 $\langle 2.5, -3.5 \rangle$

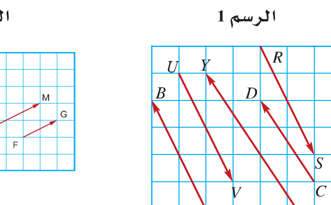
ارسم كل متّجه في المستوي الإحداثي. جِد اتجاهه مقرّبًا إلى أقرب درجة.

23 المتّجه $\langle 4, 1.5 \rangle$ الذي يُمثّل حركة باخرة.

24 المتّجه $\langle 3.5, 2.5 \rangle$ الذي يُمثّل حركة غوّاصة.

25 المتّجه $\langle 2, 5 \rangle$ الذي يُمثّل حركة قذيفة.

ميّز كلاً ممّا يلي.



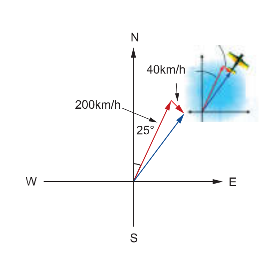
26 المتّجهات المتساوية في الرسم 1.

27 المتّجهات المتوازية في الرسم 1.

28 المتّجهات المتساوية في الرسم 2.

29 المتّجهات المتوازية في الرسم 2.

30 **طيران** يقود طيّار طائرته الخاصّة بسرعة ثابتة تبلغ 200 km/h باتجاه شمال – 25° – شرق. تواجه الطائرة رياحًا سرعتها 40 km/h باتجاه جنوب – 45° – شرق. ما السرعة الحقيقيّة للطائرة؟ ما اتجاهها الفعلي؟ قرّب السرعة إلى أقرب عُشر، والاتجاه إلى أقرب درجة.



اجمع كلّ متجهين.

31 $\langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 6 \rangle$

32 $\langle -3, 4 \rangle + \langle 5, -2 \rangle$

33 $\langle 0, 1 \rangle + \langle 7, 0 \rangle$

34 $\langle 8, 3 \rangle + \langle -2, -1 \rangle$

35 **تفكير ناقد** هل يتمتّع جمع المتّجهات بخاصّيّة التبديل؟ أي هل المتّجهان $\vec{u}+\vec{v}$ وَ $\vec{v}+\vec{u}$ متساويان؟ استعمل طريقة من الرأس إلى الذيل لجمع المتّجهات بهدف إيضاح الجواب.

اكتب كل متّجه بمكوّنَيْه، مقرّبًا إلى أقرب عُشر.

36 الطول 15؛ الاتجاه 42°

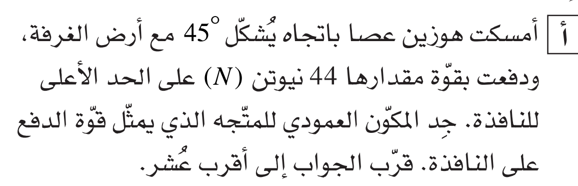
37 الطول 7.2؛ الاتجاه 9°

38 الطول 12.1؛ الاتجاه شمال – 57° – شرق

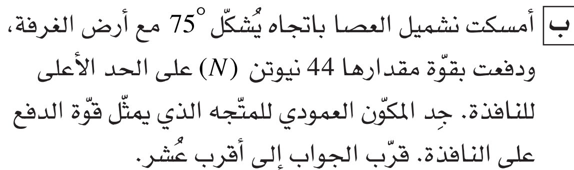
39 الطول 5.8؛ الاتجاه شمال – 22° – شرق

40 **فيزياء** لغرفة الصف نافذة قريبة من السقف تُستخدم عصا لإغلاقها.

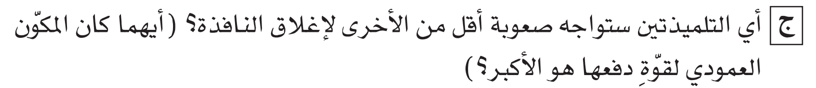
أ) أمسكت هوزين عصا باتجاه يُشكّل 45° مع أرض الغرفة، ودفعت بقوّة مقدارها 44 نيوتن (N) على الحد الأعلى للنافذة. جِد المكوّن العمودي للمتّجه الذي يمثّل قوّة الدفع على النافذة. قرّب الجواب إلى أقرب عُشر.



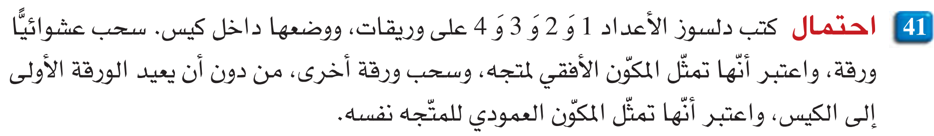
ب) أمسكت نشميل العصا باتجاه يُشكّل 75° مع أرض الغرفة، ودفعت بقوّة مقدارها 44 نيوتن (N) على الحد الأعلى للنافذة. جِد المكوّن العمودي للمتّجه الذي يمثّل قوّة الدفع على النافذة. قرّب الجواب إلى أقرب عُشر.



ج) أي التلميذتين ستواجه صعوبة أقل من الأخرى لإغلاق النافذة؟ (أيهما كان المكوّن العمودي لقوّةِ دفعها هو الأكبر؟)



41 **احتمال** كتب دلسوز الأعداد 1 وَ 2 وَ 3 وَ 4 على وريقات، ووضعها داخل كيس. سحب عشوائيًّا ورقة، واعتبر أنّها تمثّل المكوّن الأفقي لمتجه، وسحب ورقة أخرى، من دون أن يعيد الورقة الأولى إلى الكيس، واعتبر أنّها تمثّل المكوّن العمودي للمتّجه نفسه.



أ) ما احتمال أن يكون المتّجه $\langle 1, 2\rangle$ ؟

ب) ما احتمال أن يكون المتّجه موازيًا للمتّجه $\langle 1, 2\rangle$ ؟

42 **تقدير** استعمل المتّجه $\langle 4, 6\rangle$ لإكمال كل مما يلي.

أ) رسم المتّجه على ورقة بيانيّة.

ب) تقدير اتّجاه المتّجه مقرّبًا إلى أقرب درجة.

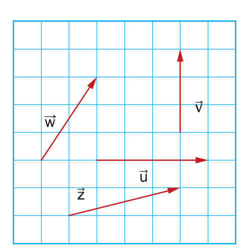
ج) قياس الزاوية التي يُشكّلها المتّجه مع مستقيم أفقي باستعمال المنقلة.

د) حساب اتجاه المتّجه باستعمال مكوّنَيْه.

هـ) المقارنة بين التقدير الذي قمت به في السؤال ب وبين القياس الذي أجريته في السؤال ج والحساب الذي أجريته في السؤال د.

خطوات متعدّدة **جِد طول كل متّجه وحدّد اتّجاهه.**

قرّب الطول إلى أقرب عُشر والاتجاه إلى أقرب درجة.



43 $\vec{u}$

44 $\vec{v}$

45 $\vec{w}$

46 $\vec{z}$

جِد، لكل متّجه، متّجهًا آخر له الطول نفسه، ولكن باتجاه مختلف، ثم متّجهًا له الاتجاه نفسه، ولكن بطول مختلف.

47 $\langle -3, 6\rangle$ **48** $\langle 12, 5\rangle$ **49** $\langle 8, -11\rangle$

خطوات متعدّدة **اجمع المتّجهين ثم جِد طول المحصّلة واتجاهها. قرّب الطول إلى أقرب عُشر والاتجاه إلى أقرب درجة.**

50 $\vec{u}=\langle 1, 2\rangle$ و $\vec{v}=\langle 2.5, -1\rangle$ **51** $\vec{u}=\langle -2, 7\rangle$ و $\vec{v}=\langle 4.8, -3.1\rangle$

52 $\vec{u}=\langle 6, 0\rangle$ و $\vec{v}=\langle -2, 4\rangle$ **53** $\vec{u}=\langle -1.2, 8\rangle$ و $\vec{v}=\langle 5.2, -2.1\rangle$



نافذة على تاريخ الرياضيات

اشتهر موبيوس بشريطته المبيّنة في الصورة، وهي شكل هندسي ثلاثي الأبعاد له وجه واحد وضلع واحد.



54 **تاريخ الرياضيات** نشر عالم الرياضيّات أوغست موبيوس August Möbius، في العام 1827، كتابًا أدخل فيه ما سمّاه «القطع المستقيمة الموجّهة»، أي ما يُعرف اليوم بالمتّجهات. شرح هذا العالم في كتابه كيفيّة ضرب متجه في عدد حقيقي. مثلاً: إذا كان المتّجه $\vec{v}$ يمثّل حركة سيّارة فإن المتّجه $2\vec{v}$ يُمثّل سيّارة ثانية تسير في الاتجاه نفسه وبسرعة تبلغ ضعف الأولى.

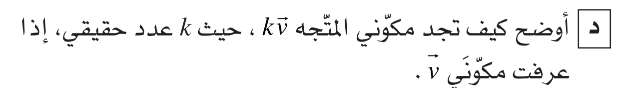


أ اكتب مكوّنَي كل من المتّجهين $\vec{v}$ و $2\vec{v}$.

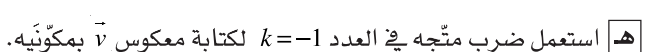


ب جِد طول كل من المتّجهين وقارن بين الطولين.

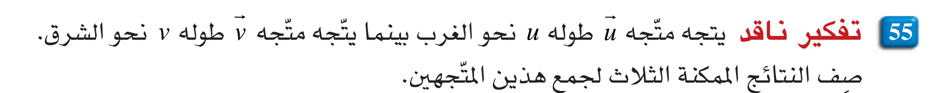
ج جِد اتجاه كل من المتّجهين وقارن بين الاتجاهين.



د أوضح كيف تجد مكوّني المتّجه $k\vec{v}$ ، حيث k عدد حقيقي، إذا عرفت مكوّنَي $\vec{v}$.



هـ استعمل ضرب متّجه في العدد $k=-1$ لكتابة معكوس $\vec{v}$ بمكوّنَيه.



55 **تفكير ناقد** يتجه متّجه $\vec{u}$ طوله u نحو الغرب بينما يتّجه متّجه $\vec{v}$ طوله v نحو الشرق. صِف النتائج الممكنة الثلاث لجمع هذين المتّجهين.



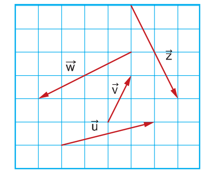

56 **اكتب** قارن بين القطعة المستقيمة ونصف المستقيم والمتّجه.



تحضير للاختبار



57 أي متّجه موازٍ للمتّجه $\langle 2, 1\rangle$ ؟



أ $\vec{u}$ ج $\vec{w}$

ب $\vec{v}$ د $\vec{z}$

58 يمثّل المتّجه $\langle 7, 9\rangle$ حركة مروحيّة. ما اتجاه هذا المتّجه مقرّبًا إلى أقرب درجة؟

أ 38° ب 52° ج 128° د 142°

59 يمثّل المتّجه $\langle 5, 11\rangle$ حركة باخرة. جِد طول هذا المتّجه مقرّبًا إلى أقرب وحدة.

(أ) 6 (ب) 7 (ج) 12 (د) 16

60 **جواب فقط** نقطة البداية للمتّجه $\overrightarrow{AB}$ هي $(-3, 6)$ ونقطة النهاية هي $(-5, -2)$. جِد طول $\overrightarrow{AB}$ مقرّبًا إلى أقرب عُشر.

تحدٍّ وتوسُّع

تذكّر أن الزاوية التي تحدّد اتجاه متّجه تُقاس انطلاقًا من الجزء الموجب من المحور الأوّل في الاتجاه المعاكس لحركة عقارب الساعة. جِد اتجاه كل متّجه مقرّبًا إلى أقرب درجة.

61 $\langle -2, 3\rangle$ **62** $\langle -4, 0\rangle$ **63** $\langle -5, -3\rangle$

64 **ملاحة** يخطّط ربّان الباخرة للإبحار في منطقة يسيطر عليها تيّار بحري باتجاه الشرق سرعته 4 km/h . جِد اتجاه حركة الباخرة وسرعتها لكي تكون سرعتها الفعلية 10 km/h ويكون اتجاهها الفعلي شمال $-75^\circ-$ شرق (بعد أخذ التيّار البحري بالاعتبار). قرّب السرعة إلى أقرب عُشر والاتجاه إلى أقرب درجة.

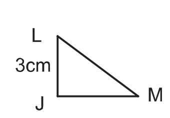
65 للوصول إلى الحديقة العامّة، سار شوان مسافة 3 km باتجاه شمال $-30^\circ-$ شرق، ثم 6 km باتجاه الشرق، ثم 4 km باتجاه شمال $-80^\circ-$ شرق. ما طول المتّجه الذي يمثّل انتقال شوان من بيته إلى الحديقة العامّة؟ وما اتجاهه؟ قرّب الطول إلى أقرب عُشر والاتجاه إلى أقرب درجة.

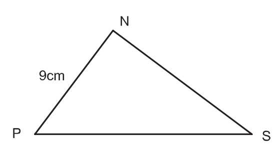
مراجعة لولبية

حُلّ بيانيًا كل نظام معادلات خطّيّة. (الصفوف السابقة)

66 $\begin{cases} x-y=-5 \\ y=3x+1 \end{cases}$ **67** $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2y+x=8 \end{cases}$ **68** $\begin{cases} x+y=5 \\ 3y+15=2x \end{cases}$

المثلّثان JLM وَ NPS متشابهان. محيط المثلّث JLM 12 cm ومساحته $6\ cm^2$. جِد القياس المطلوب. (الصفوف السابقة)





69 محيط المثلّث NPS **70** مساحة المثلّث NPS

الفصل 1



اختبارٌ جُزئيّ الدروسُ من 1-1 إلى 4-1

1-1 الفضاء الإحداثي

مثّل بيانيًا في الفضاء الإحداثي كلاً من النقاط التالية:

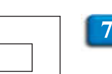
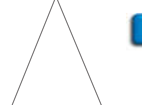
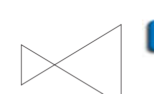
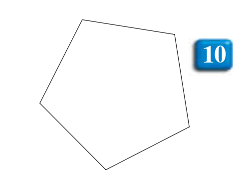
1 $(-3, 2, 1)$
2 $(2, -3, -2)$
3 $(3, 1, -3)$

ارسم في الفضاء الإحداثي كلاً من المستويات التالية:

4 $2x-2y+4z=8$
5 $2x+y-2z=-4.5$
6 $x+5y+3z=15$

2-1 المضلّعات

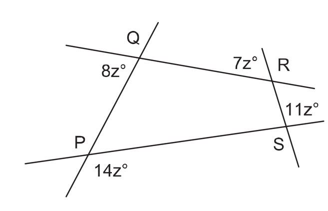
اذكر إن كان الشكل مضلّعًا، وسَمِّه إن كان كذلك.

7 
8 
9 
10 

11 جِد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلّع محدَّب من 16 ضلعًا.

12 عمود قاعدته سداسي منتظم. ما قياس كل من زواياه الداخليّة؟

13 يُبيّن الشكل المقابل مخطّطًا لحديقة مسوّرة. جِد قياس كل زاوية خارجيّة.



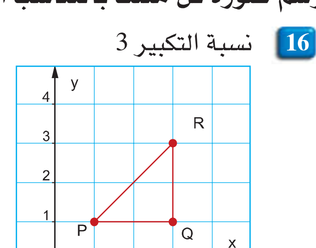
14 جِد قياس كل من الزوايا الخارجيّة لعُشاري منتظم.

3-1 التناسب الهندسي

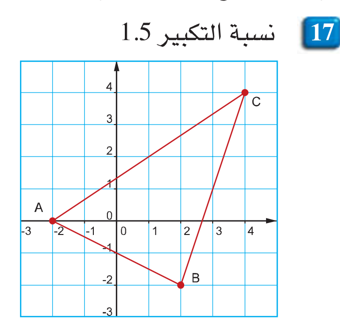
15 أثبت أن المثلّثين ABC وَ ADE، حيث $A(-1, 2)$ ، $B(-3, -2)$، $C(3, 0)$ ، $D(-2, 0)$ ، $E(1, 1)$ متشابهان.

ارسم صورة كل مثلّث بالتناسب الهندسي المحدّدة نسبته، وتحقّق من أن الأصل والصورة مثلّثان متشابهان.

16 نسبة التكبير 3



17 نسبة التكبير 1.5





4-1 المتّجهات

ارسم، في المستوي الإحداثي، كل متّجه؛ واحسب طوله مقرّبًا إلى أقرب عُشر.

18 $\langle 3, 1\rangle$
19 $\langle -2, -4\rangle$
20 $\langle 0, 5\rangle$

ارسم، في المستوي الإحداثي، كل متّجه؛ واحسب ميله مقرّبًا إلى أقرب درجة.

21 سرعة الريح ممثّلة بالمتّجه $\langle 2, 1\rangle$

22 تيّار الماء في نهر ممثّلاً بالمتّجه $\langle 5, 3\rangle$

23 قوّة نابض ممثّلة بالمتّجه $\langle 4, 4\rangle$

5-1 مساحة الدائرة والمضلّعات المنتظمة

Area of circles and regular polygons

الأهداف

يجد قانونًا لحساب مساحة الدائرة، وقانونًا لحساب محيطها، ويستعملها.

يجد قانونًا لحساب مساحة المضلّعات المنتظمة ويستعمله.

المفردات
Vocabulary

الدائرة
Circle

مركز الدائرة
Center of a circle

نصف قطر الدائرة
Radius of a circle

قطر الدائرة
Diameter of a circle

مركز المضلّع المنتظم
Center of a regular polygon

عامد المضلّع المنتظم
Apothem

الزاوية المركزيّة في المضلّع المنتظم
Central angle of a regular polygon

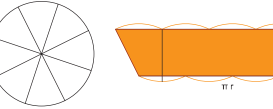
من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل قارعو الطبول طبولاً من قياسات مختلفة للحصول على أصوات معيّنة. تتحدّد الأصوات التي يُصدرها الطبل بمساحة وجهه الدائري (المثال 2).

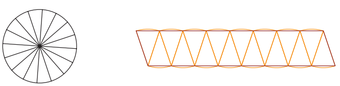
الدائرة Circle هي مجموعة نقاط المستوي التي تقع على المسافة نفسها من نقطة معيّنة هي **مركز Center** الدائرة. تلك المسافة تُسمّى **نصف قطر Radius** الدائرة وضعفها يسمّى قطر **Diameter** الدائرة. في الرسم المقابل، مركز الدائرة هو النقطة A ونصف قطرها هو $r=AB$ وقطرها هو $d=CD$.

نسبة محيط الدائرة C إلى قطرها d عدد حقيقي ثابت في كل الدوائر. إنه العدد غير النسبي π (اقرأه باي) بحيث يُمكنك أن تكتب $\pi=\frac{C}{d}$. إذا حسبت C بدلالة d، حصلت على قانون محيط الدائرة $C=\pi d$ أو $C=2\pi r$ لأن $d=2r$.

يُمكنك استعمال محيط الدائرة لإيجاد مساحتها. اقسم الدائرة ورتّب الأجزاء بحيث تحصل على شكل شبيه بمتوازي الأضلاع كما هو مبيّن أدناه.



تساوي قاعدة متوازي الأضلاع نصف محيط الدائرة تقريباً أو πr، بينما يساوي ارتفاعه نصف قطر الدائرة تقريباً. ينتج من ذلك أن مساحة الدائرة تساوي تقريباً $A\approx\pi r\times r=\pi r^2$.

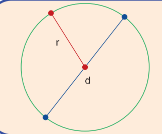


كلما ازداد عدد الأجزاء اقتربت مساحة متوازي الأضلاع من مساحة الدائرة، وكانت قيمتها التقريبيّة أقرب إلى قيمتها الحقيقيّة.

اعلم واحفظ

محيط الدائرة ومساحتها

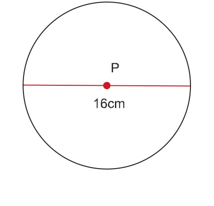
يُحسب محيط دائرة نصف قطرها r وقطرها d بالقانون $C=\pi d$ أو $C=2\pi r$
وتُحسب مساحتها بالقانون $A=\pi r^2$.



مثال 1 حساب محيط الدائرة ومساحتها

احسب المطلوب.

أ مساحة الدائرة المقابلة .



$A=\pi r^2$ قانون مساحة الدائرة.

$A=\pi(8)^2$ اقسم القطر على 2 لإيجاد نصف القطر، ثم عوّض عن نصف القطر بقيمته.

$A=64\pi$ بسّط.

مساحة الدائرة $A=64\pi\ \text{cm}^3$.




ب **نصف قطر دائرة محيطها 24π m .**

$C = 2\pi r$	قانون محيط الدائرة.
$24\pi = 2\pi r$	عوّض عن المحيط بقيمته.
$24 = 2r$	اقسم كل طرف على π .
$r = 12$	اقسم كل طرف على 2 .

ج **محيط دائرة مساحتها $9x^2\pi$ ، بدلالة π وَ x .**

الخطوة 1 احسب نصف القطر r بدلالة x .

$A = \pi r^2$	قانون المساحة.
$9x^2\pi = \pi r^2$	عوّض عن A بقيمتها.
$9x^2 = r^2$	اقسم كل طرف على π .
$3x = r$	خذ الجذر التربيعي.

الخطوة 2 احسب المحيط باستعمال قيمة نصف القطر.

$C = 2\pi r$	قانون المحيط.
$C = 2\pi(3x)$	عوّض عن نصف القطر بقيمته.
$C = 6x\pi$	بسّط.

نقطة مراقبة **1.** احسب، بدلالة π، مساحة دائرة محيطها $(4x-6)\pi$ cm .

مثـــال 2 تطبيق على الموسيقى

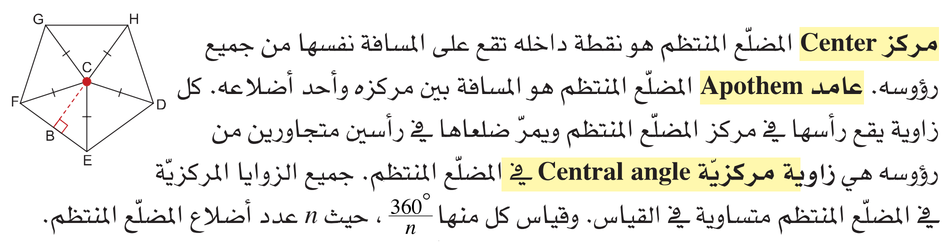
تتألّف بطّاريّة الطبول من ثلاثة طبول أقطارها 10 إنشات وَ 12 إنشًا وَ 14 إنشًا. جِد مساحة كل طبل، وقرّب الإجابات إلى أقرب عُشر.

القطر 10 إنشات	القطر 12 إنشًا	القطر 14 إنشًا
$r = \frac{10}{2} = 5 \quad A = \pi(5)^2$	$r = \frac{12}{2} = 6 \quad A = \pi(6)^2$	$r = \frac{14}{2} = 7 \quad A = \pi(7)^2$
$A \approx 78.5$	$A \approx 113.1$	$A \approx 153.9$
المساحة 78.5 إنشًا مربّعًا	المساحة 113.1 إنشًا مربّعًا	المساحة 153.9 إنشًا مربّعًا

مُساعدَة

يؤمّن المفتاح π في الحاسبة البيانيّة تقريبًا جيدًا لقيمة هذا العدد. انتظر حتى تنتهي من الحساب قبل أن تقرّب.

نقطة مراقبة **2.** احسب محيط كل طبل في المثال 2.



مركز Center المضلّع المنتظم هو نقطة داخله تقع على المسافة نفسها من جميع رؤوسه. **عامد Apothem** المضلّع المنتظم هو المسافة بين مركزه وأحد أضلاعه. كل زاوية يقع رأسها في مركز المضلّع المنتظم ويمرّ ضلعاها في رأسين متجاورين من رؤوسه هي **زاوية مركزيّة في Central angle** المضلّع المنتظم. جميع الزوايا المركزيّة في المضلّع المنتظم متساوية في القياس. وقياس كل منها $\frac{360^\circ}{n}$ ، حيث n عدد أضلاع المضلّع المنتظم.

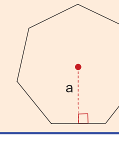
لإيجاد مساحة مضلّع منتظم من n ضلعًا، عامده a وطول ضلعه s، اقسمه إلى n مثلّثًا متساوي الساقين.

مساحة كل مثلّث: $\frac{1}{2}as$

مساحة المضلّع: $A = n\left(\frac{1}{2}as\right) = \frac{1}{2}a(ns)$ أو $A = \frac{1}{2}ap$ يرمز $p = ns$ إلى محيط المضلّع المنتظم.

اعلم و احفظ **مساحة المضلّع المنتظم**

تُحسب مساحة مضلّع منتظم عامده a ومحيطه p بالقانون $A = \frac{1}{2}ap$.



مثـــال 3 إيجاد مساحة مضلّع منتظم

جِد مساحة كل مضلّع منتظم مقرّبًا الجواب إلى أقرب عُشر.

أ سداسي منتظم ضلعه $6\ m$.

محيط المضلّع هو $36\ m$ (6×6). ينقسم السداسي المنتظم إلى 6 مثلّثات متساوية الأضلاع ضلع الواحد منها $6\ m$. ينتج عن ذلك أن عامد السداسي المنتظم هو $3\sqrt{3}$.

$A=\frac{1}{2}ap$ قانون مساحة المضلّع.

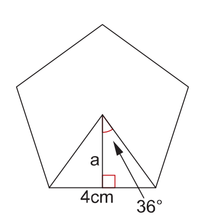
$A=\frac{1}{2}3\sqrt{3}\times36$ عوّض.

$A=54\sqrt{3}\approx93.5$ بسّط وقرّب إلى أقرب عُشر.



مساحة السداسي المنتظم هي $93.5\ m^2$ تقريبًا.

ب خماسي منتظم ضلعه $8\ cm$.



الخطوة 1 ارسم الخماسي المنتظم. ارسم مثلّثًا متساوي الساقين رأسه عند مركز المضلّع وقاعدته أحد أضلاع الخماسي. قياس الزاوية المركزيّة للمضلّع $\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$. ارسم منصّف الزاوية المركزيّة لتحصل على مثلّث قائم.

الخطوة 2 استعمل النسبة المثلّثيّة tan لإيجاد العامد a.

$\tan 36^\circ=\frac{4}{a}$ تعريف النسبة المثلّثيّة tan.

$a=\frac{4}{\tan 36^\circ}$ احسب قيمة a.

الخطوة 3 استعمل العامد وطول الضلع لحساب مساحة الخماسي المنتظم.

$A=\frac{1}{2}ap$ قانون مساحة المضلّع المنتظم.

$A=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\tan 36^\circ}\right)(5\times8)$ عوّض.

$A\approx110.1$ بسّط وقرّب إلى أقرب عُشر.

مساحة الخماسي هي $110.1\ cm^2$ تقريبًا.

تـذكَّـرْ

تان الزاوية في مثلّث قائم هو نسبة الضلع المقابل لها إلى الضلع المجاور لها.



3. احسب مساحة ثماني منتظم ضلعه $4\ m$.

فكِّرْ وناقش

1. أوضح العلاقة بين π ومحيط الدائرة.

2. اشرح كيف تحسب قياس الزاوية المركزيّة لمضلّع منتظم من n ضلعًا.

3. **كن منظّمًا** انسخ الجدول أدناه ثم أكمله.



المضلّع	عدد الأضلاع	المحيط	قياس الزاوية المركزيّة	العامد	المساحة
مضلّعات منتظمة ضلعها يساوي 1					
مثلّث					
مربّع					
سداسي					

GRADE11-CHAPTER 1 -13-final 5/13/13 3:52 PM Page 41

5-1 التمارين

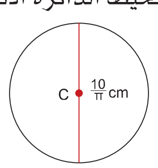
تمارين موجّهة

1 **مفردات** كيف تجد عامد مربّع ضلعه s ؟

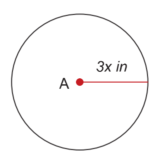
انظر المثال 1

جِد:

2 محيط الدائرة أدناه.



3 مساحة الدائرة أدناه.



4 محيط دائرة مساحتها $36\pi\ m^2$.

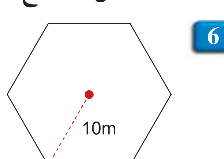
انظر المثال 2

5 **طعام** يقدّم مطعم الفرات للبيتزا ثلاثة حجوم من البيتزا أقطارها على التوالي 15 cm وَ 25 cm وَ 40 cm . احسب مساحة البيتزا من كل نوع مقرَّبة إلى أقرب عُشر.

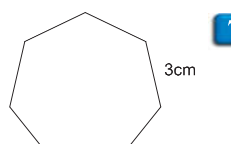
انظر المثال 3

جِد مساحة كل مضلّع منتظم مقرَّبةً إلى أقرب عُشر.

6



7



8 مثلّث متساوي الأضلاع عامده 2 cm .

9 دائرة محيطها 5 m .

تمارين وحلُّ مسائل

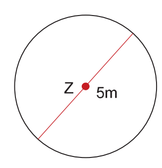
تمارين حرّة	
لحل التمارين	أنظر المثال
12-10	1
13	2
17-14	3

جِد بدلالة π :

10 مساحة الدائرة أدناه.

11 محيط الدائرة أدناه.





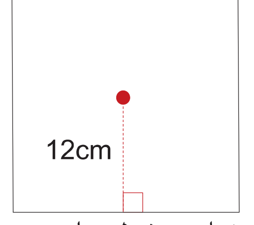
12 قطر دائرة محيطها 10 m.

13 **رياضة** يستعمل مدرّب الخيل 3 حلبات، أقطارها على التوالي: 7 m وَ 10 m وَ 13 m.
جِد مساحة كل حلبة مقرَّبة إلى أقرب عُشر.

جِد مساحة كل مضلّع منتظم مقرَّبةً إلى أقرب عُشر.

14

15



16 تساعي منتظم محيطه 144 m .

17 خماسي منتظم عامده 2 km .



جِد الزاوية المركزيّة لكل مضلّع منتظم.

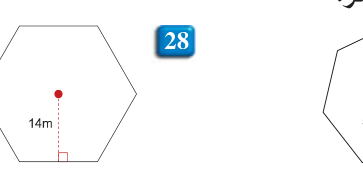
18 مثلّثمتساويالأضلاع **19** مربّع **20** خماسي **21** سداسي

22 سُباعي **23** ثُماني **24** تُساعي **25** عُشاري

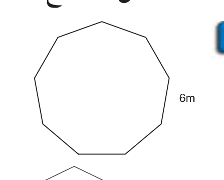


جِد مساحة كل مضلّع منتظم مقرَّبةً إلى أقرب عُشر.

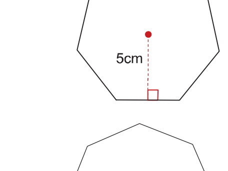
26



27



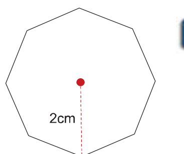
28



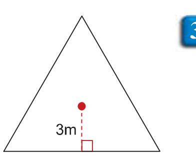
29

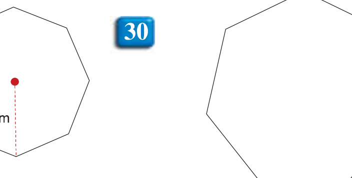


30

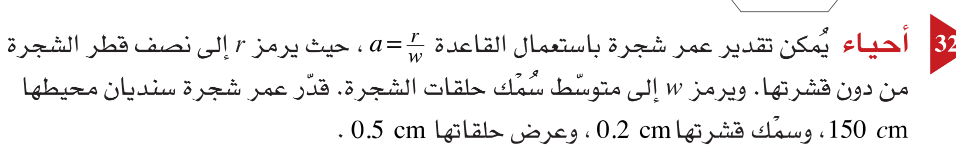


31





32 **أحياء** يُمكن تقدير عمر شجرة باستعمال القاعدة $a=\frac{r}{w}$ ، حيث يرمز r إلى نصف قطر الشجرة من دون قشرتها. ويرمز w إلى متوسّط سُمك حلقات الشجرة. قدّر عمر شجرة سنديان محيطها 150 cm، وسمك قشرتها 0.2 cm ، وعرض حلقاتها 0.5 cm .



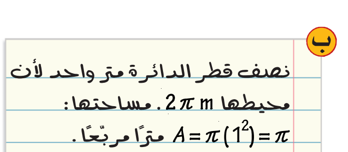
نافذة على الأحياء

يدرس علماء النبات حلقات الأشجار، ليستنتجوا ما طرأ من تغيّر على أنماط النماذج.

33 **خطأ في التحليل** حسب تلميذان مساحة دائرة محيطها 2π m .
من منهما الذي أخطأ؟ وأين؟



أ نصف قطر الدائرة 2 m لأنّ محيطها 2π m . مساحتها: $A=\pi(2^2)=4\pi$ مترًا مربّعًا.



ب نصف قطر الدائرة متر واحد لأنّ محيطها 2π m . مساحتها: $A=\pi(1^2)=\pi$ مترًا مربّعًا.



جِد القياس الناقص بدلالة π .

	القطر	نصف القطر	المساحة	المحيط
34	6	■	■	■
35	■	■	100	■
36	■	17	■	■
37	■	■	■	36π

38 **خطوات متعدّدة** يصمّم سالار حديقة تُحيط ببركة ماء شكلها سداسي منتظم ضلعه 60m . للحديقة شكل دائرة تبعد 10 m عن كل رأس من رؤوس البركة. ما مساحة الحديقة؟ قرّب الجواب إلى أقرب عُشر.

39 لإشارة التوقّف في قانون السير شكل ثماني منتظم، وهي تتوفّر بقياسين: 30 cm وَ 36 cm .

أ جِد مساحة الإشارة الأولى مقرّبة إلى أقرب عُشر.

ب جِد مساحة الإشارة الثانية مقرَّبة إلى أقرب عُشر.

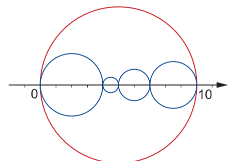
ج ما النسبة المئويّة للمساحة الإضافية من المعدن اللازمة لصنع إشارة من النوع الثاني بدلاً من إشارة من النوع الأول.

30 cm أو 36 cm STOP

40 **قياس** يستعمل بعض المهندسين عجلة تدور حول محور، لقياس المسافات عبر إدارة العجلة وإحصاء مرّات دورانها. جِد قطر هذه العجلة، علمًا بأن محيطها متر واحد.

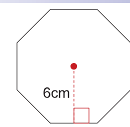


41 **تفكير ناقد** أي من الطاولتين التاليتين تتّسع للعدد الأكبر من الأشخاص: طاولة مستطيلة طولها 6 m وعرضها 4 m أم طاولة مستديرة قطرها 6 m؟ كم شخصًا تقريبًا يجلس إلى كل طاولة؟ وضّح أفكارك.



42 **اكتب** يقع مركز كل دائرة في الشكل المقابل على محور الأعداد. وضّح العلاقة بين محيط الدائرة الكبرى ومحيط كل من الدوائر الأخرى.





43 ما محيط الثماني المنتظم المقابل مقرّبًا إلى أقرب سنتيمتر؟

(أ) 5 (ب) 40 (ج) 20 (د) 68

44 أي نسبة تُمثّل العدد π من النسب التالية، حيث يرمز C إلى محيط دائرة ويرمز d إلى قطرها؟

(أ) $\frac{C}{d}$ (ب) $\frac{4C}{d^2}$ (ج) $\frac{d}{C}$ (د) $\frac{d}{2C}$

45 لدى آراس طاولة مستديرة الشكل قطرها 2 m. ترغب أن ترسم على وجه الطاولة نمطًا يتكوّن من مستطيل طوله 2 m وعرضه 1 m، وَ 4 مربّعات ضلع كل منها $\frac{1}{2}$ m . أي مما يلي يبرّر استحالة تحقيق ما تريده آراس؟

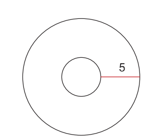
(أ) لن يبقى مكان على وجه الطاولة بعد رسم المستطيل.

(ب) لا يُمكن لآراس أن ترسم مستطيلاً طوله 2 m على وجه الطاولة.

(ج) لا يُمكن رسم المربّعات.

(د) لن يبقى مكان على وجه الطاولة لرسم 4 مربّعات ضلع كل منها $\frac{1}{2}$ m .

تحدٍّ وتوسُّع



46 يُبيّن الشكل المقابل دائرتين لهما المركز نفسه، ويزيد نصف قطر الكبرى بينهما 5 cm على نصف قطر الصغرى. جِد الفرق بين محيطي الدائرتين بدلالة π .

47 **جبر** اكتب قانونًا لحساب مساحة دائرة بدلالة محيطها.

48 **تفكير ناقد** بيّن أن مساحة مضلّع منتظم من n ضلعًا تقترب من مساحة الدائرة كلّما ازدادت قيمة n.

مراجعة لولبية

اكتب الدالّة الخطيّة التي تُمثّل كل جدول. (الصفوف السابقة)

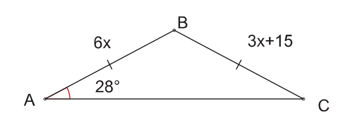
49

x	−2	0	5	10
y	−19	−13	2	17

50

x	−3	0	4	9
y	2	−1	−5	−10

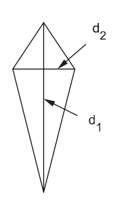
جِد: (الصفوف السابقة)



51 $m\hat{B}$ 52 AB



جِد: (الصفوف السابقة)



53 d_2 علمًا بأن $d_1=20$ والمساحة $A=14$.

54 مساحة شبه منحرف قاعدتاه 3 m وَ 6 m على التوالي وارتفاعه 4 m .

6-1 بعض قوانين الفضاء

Formulas in 3 dimensions



الأهداف

يستعمل قانون أولر لإيجاد عدد الرؤوس والأضلاع والوجوه في متعدّد وجوه.

يُطوّر قانون حساب المسافة في الفضاء، ويستعمله.

يُطوّر قانون حساب إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء، ويستعمله.

المفردات
Vocabulary

متعدّد الوجوه
Polyhedron

من يستخدم هذا الأمر؟

يستعمل الغطّاسون إحداثيّات الفضاء لإيجاد المسافة بين نقطتين تحت الماء. (مثال 5).

يتشكّل **متعدّد الوجوه Polyhedron** من 4 مضلّعات أو أكثر تتقاطع وفق أضلاعها فقط. كل من المنشور والهرم متعدّد وجوه في حين أن الأسطوانة والمخروط ليسا بمتعدّدي وجوه.

هذه الأجسام الهندسيّة ليست بمتعدّدات وجوه	هذه الأجسام الهندسيّة متعدّدات وجوه

هناك علاقة تربط بين عدد الرؤوس وعدد الأضلاع وعدد الوجوه في متعدّد وجوه.



قانون أولر Euler's formula

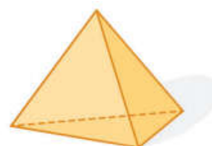
إذا كان V عدد رؤوس متعدّد وجوه وَ E عدد أضلاعه وَ F عدد وجوهه، فإن

$$V-E+F=2$$



استعمال قانون أولر

جِد أعداد الرؤوس والأضلاع والوجوه، واستعملها لتتحقّق من صحّة قانون أولر.



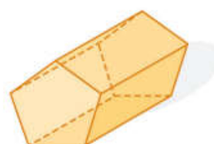
أ

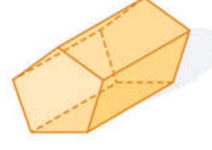
$V=4$ ، $E=6$ ، $F=4$

$4-6+4\stackrel{?}{=}2$ استعمل قانون أولر.

$2=2$ ✓ بسّط.



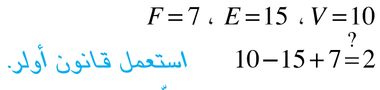




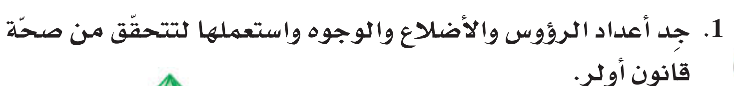
$V=10$ ، $E=15$ ، $F=7$

$10-15+7\stackrel{?}{=}2$ استعمل قانون أولر.

$2=2$ ✓ بسّط.

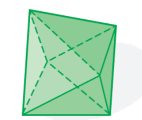


نقطة مراقبة



1. جِد أعداد الرؤوس والأضلاع والوجوه واستعملها لتتحقّق من صحّة قانون أولر.





ب





قطر متعدّد الوجوه هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسين ولا تنتمي إلى أيّ وجه من وجوهه. يُبيّن الرسم المقابل القطر d من أقطار متوازي مستطيلات. لكي تحسب طول هذا القطر، استعمل مبرهنة فيثاغورس مرّتين: $d^2 = h^2 + x^2$ ، $x^2 = \ell^2 + w^2$ ، مما يُعطي بعد التعويض عن x^2 بقيمته: $d^2 = h^2 + \ell^2 + w^2$.



قطر شبه المكعّب

طول القطر في متوازي مستطيلات (شبه مكعب) طوله ℓ وعرضه w وارتفاعه h، هو $d = \sqrt{h^2 + \ell^2 + w^2}$.

مثـــال 2 استعمال مبرهنة فيثاغورس في الفضاء

جِد:

أ طول القطر في متوازي مستطيلات طوله 3 cm وعرضه 4 cm وارتفاعه 5 cm .

$d = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}$ عوّض عن كل من ℓ و w و h بقيمته.

$= \sqrt{9 + 16 + 25}$ بسّط.

$= \sqrt{50} \approx 7.1$

طول القطر 7.1 cm تقريبًا.

ب ارتفاع متوازي مستطيلات طوله 12 m وعرضه 8 m وطول قطره 18 m .

$18 = \sqrt{8^2 + 12^2 + h^2}$ عوّض عن كل من d و ℓ و w بقيمته.

$(18)^2 = 8^2 + 12^2 + h^2$ ربّع كل طرف.

$324 = 64 + 144 + h^2$ بسّط.

$h^2 = 116$ احسب قيمة h^2

$h = \sqrt{116} \approx 10.8$ خذ الجذر التربيعي لكل طرف.

ارتفاع متوازي مستطيلات 10.8 m تقريبًا.

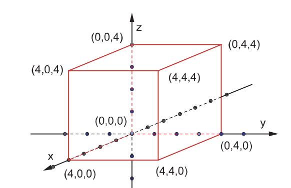


2. جِد طول القطر في مكعّب ضلعه 5 cm .

تذكّر أنّك تحتاج إلى إحداثيَّين لتحديد موقع نقطة في المستوي الإحداثي، وإلى 3 إحداثيّات لتحديد موقع نقطة في الفضاء الإحداثي. تذكّر أيضًا أن الفضاء الإحداثي يحتاج إلى 3 محاور إحداثيّات، كما هو مبيّن في المقابل. كل ثلاثيّة أعداد (x, y, z) تحدّد نقطة وحيدة في الفضاء الإحداثي كما أن كل نقطة تحدّد ثلاثيّة أعداد. لتحديد موقع النقطة $(2, 3, 4)$، انطلق من نقطة الأصل $(0, 0, 0)$ وتحرّك 3 وحدات إلى الأمام على المحور الأوّل، ثم وحدتين إلى اليمين على خط موازٍ للمحور الثاني، ثم 4 وحدات إلى أعلى، على خط موازٍ للمحور الثالث.

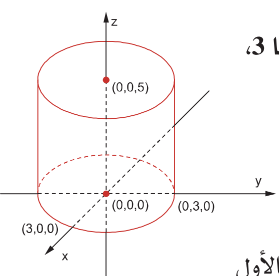
مثـــــال 3 رسم أجسام في الفضاء الإحداثي

أ ارسم مكعبًا ضلعه 4 وإحداثيات رؤوسه غير سالبة، أحدها نقطة الأصل.



للمكعّب 8 رؤوس هي النقاط $(0, 0, 0)$، $(0, 4, 0)$، $(0, 0, 4)$، $(4, 0, 0)$، $(4, 4, 0)$، $(4, 0, 4)$، $(0, 4, 4)$، $(4, 4, 4)$.

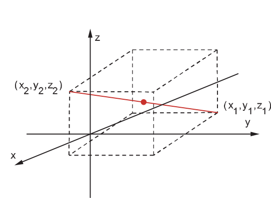
ب ارسم أسطوانة ارتفاعها 5 ونصف قطر كل من دائرتيها 3، ويقع مركز قاعدتها السفلى في نقطة الأصل $(0, 0, 0)$.



ارسم مركز قاعدتها السفلى $(0, 0, 0)$. بما أن ارتفاع الأسطوانة 5، فإن مركز قاعدتها العليا يقع في النقطة $(0, 0, 5)$. ارسم هذه النقطة. من ناحية أخرى، يبلغ نصف قطر القاعدة 3، مما يعني أن القاعدة السفلى تقطع المحور الأول عند النقطة $(3, 0, 0)$ ، والمحور الثاني عند النقطة $(0, 3, 0)$. ارسم القاعدة السفلى. ارسم القاعدة العليا موازية للقاعدة السفلى، ثم صل بين القاعدتين.

نقطة مراقبة

3. ارسم مخروطًا ارتفاعه 7 وقاعدته دائرة نصف قطرها 5، ويقع مركزها في نقطة الأصل $(0, 0, 0)$.



لكي تجد المسافة بين نقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$ وَ $B(x_2, y_2, z_2)$ في الفضاء، ابدأ برسم متوازي مستطيلات بحيث يكون $\overline{AB}$ قطرًا من أقطاره. استعمل قانون طول القطر. يُمكنك أيضًا أن تستعمل قانونًا مشابهًا لقانون المسافة في المستوى الإحداثي. ويُمكنك أن تحسب إحداثيّات منتصف قطعة مستقيمة باستعمال قانون شبيه بقانون إحداثيي المنتصف في المستوى الإحداثي.



قانون المسافة والمنتصف في الفضاء الإحداثي

استعمل القانون $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ لحساب المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$ وَ $B(x_2, y_2, z_2)$.

منتصف القطعة التي طرفاها النقطتان $A(x_1, y_1, z_1)$ وَ $B(x_2, y_2, z_2)$ هو النقطة $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

مثـــــال 4 حساب المسافة وإحداثيّات المنتصف في الفضاء الإحداثي

جِد المسافة بين النقطتين A وَ B وإحداثيّات منتصف $\overline{AB}$. قرّب الإجابة إلى أقرب عُشر.

أ $A(0, 0, 0)$، $B(3, 4, 12)$.

المسافة

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2+(12-0)^2}$$
$$=\sqrt{9+16+144}$$
$$=\sqrt{169}=13$$

إحداثيّات المنتصف

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$
$$M\left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0+12}{2}\right)$$
$$M(1.5, 2, 6)$$

ب $A(3, 8, 10)$ ، $B(7, 12, 15)$.

المسافة

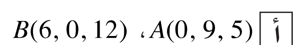
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$=\sqrt{(7-3)^2+(12-8)^2+(15-10)^2}$$
$$=\sqrt{16+16+25}$$
$$=\sqrt{57}\approx 7.5$$

إحداثيّات المنتصف

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$
$$M\left(\frac{3+7}{2}, \frac{8+12}{2}, \frac{10+15}{2}\right)$$
$$M(5, 10, 12.5)$$



4. جِد المسافة بين النقطتين A وَ B وإحداثيّات منتصف $\overline{AB}$. قرّب الإجابة إلى أقرب عُشر.

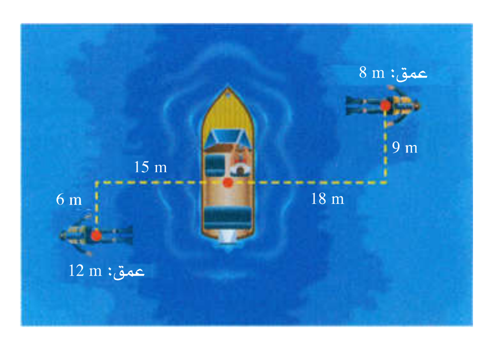


أ $A(0, 9, 5)$ ، $B(6, 0, 12)$ **ب** $A(5, 8, 16)$ ، $B(12, 16, 20)$



مثـــــال 5 تطبيق

سبح غطّاسان وتوجّها إلى موقعين كما هو مبيّن في الصورة المقابلة. كم بلغت المسافة بينهما؟



سوف نعتبر موقع المركب نقطة الأصل $(0, 0, 0)$. موقع الغطّاسين هو $(18, 9, -8)$ وَ $(-15, -6, -12)$.

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$=\sqrt{(-15-18)^2+(-6-9)^2+(-12+8)^2}$$
$$=\sqrt{1330}\approx 36.5$$

بلغت المسافة بين الغطّاسين حوالي 36.5 m.



5. **ماذا لو...** صعد الغطّاسان إلى سطح الماء بشكل مستقيم. كم تصبح المسافة بينهما؟

فكِّرْ وناقش

1. كيف تحسب المسافة بين نقطتين في الفضاء الإحداثي؟



2. **كن منظّمًا** انسخ الجدول ثم أكمله.

	منشور قائم مستطيل القاعدة	هرم قائم مستطيل القاعدة
عدد الرؤوس		
عدد الأضلاع		
عدد الوجوه		
$V-E+F$		

6-1 التمارين

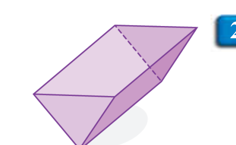
تمارين موجّهة

1 **مفردات** فسِّر لماذا ليست الأسطوانة متعدّد وجوه.

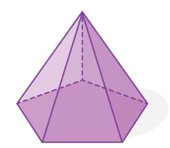
انظر المثال 1

جِد أعداد الرؤوس والأضلاع والوجوه. استعمل ما توصّلت إليه لتتحقّق من صحة قانون أولر.

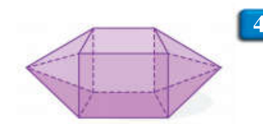
2



3



4





انظر المثال 2

جِد القياسات التالية مقرَّبةً إلى أقرب عُشر.

5 قطر متوازي مستطيلات طوله 8 cm وعرضه 4 cm وارتفاعه 12 cm.

6 ارتفاع متوازي مستطيلات طوله 10 cm وعرضه 6 cm وقطره 13 cm.

7 قطر منشور قائم مربّع القاعدة ضلع قاعدته 12 قدمًا، وارتفاعه قدمًا واحدة.

انظر المثال 3

ارسم:

8 مخروطًا ارتفاعه 4 وقاعدته دائرة نصف قطرها 8، ويقع مركزها في نقطة الأصل $(0, 0, 0)$.

9 أسطوانة ارتفاعها 4، وكل من قاعدتيها دائرة نصف قطرها 3، ويقع مركز قاعدتها السفلى في النقطة $(0, 0, 0)$.

10 مكعّبًا ضلعه 7، ويقع أحد رؤوسه في نقطة الأصل $(0, 0, 0)$.

انظر المثال 4

جِد المسافة بين النقطتين A وَ B وإحداثيّات منتصف $\overline{AB}$. قرّب الإجابات إلى أقرب عُشر.

11 $A(0, 0, 0)$ ، $B(9, 5, 10)$

12 $A(0, 3, 8)$ ، $B(7, 0, 14)$

13 $A(4, 6, 10)$ ، $B(9, 12, 15)$

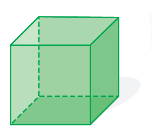
انظر المثال 5

14 **تسلية** بعد يوم من ممارسة رياضة السير في الجبال، أقام الفريق مخيّمًا للراحة يبعد عن نقطة الانطلاق 3 km شرقًا وَ 7 km شمالاً، ويقع على ارتفاع يعلو عن نقطة الانطلاق 0.6 km. كم تبلغ المسافة بين نقطة الانطلاق والمخيّم؟

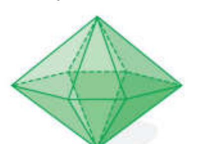
تمارين وحلُّ مسائل

جِد أعداد الرؤوس والأضلاع والوجوه. استعمل ما توصّلت إليه لتتحقّق من صحة قانون أولر.

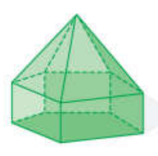
15



16



17



جِد القياسات التالية مقرَّبةً إلى أقرب عُشر.

18 قطر متوازي مستطيلات طوله 7 cm وعرضه 8 cm وارتفاعه 16 cm.

19 ارتفاع متوازي مستطيلات طوله 15 cm وعرضه 6 cm وقطره 17 cm.

20 ضلع مكعّب قطره 8 cm.

تمارين حرّة

لحل التمارين	انظر المثال
17–15	1
20-18	2
23-21	3
26-24	4
27	5

ارسم:

21 أسطوانة ارتفاعها 3، وكل من قاعدتيها دائرة قطرها 5، ويقع مركز قاعدتها السفلى في نقطة الأصل $(0, 0, 0)$.

22 مخروطًا ارتفاعه 4، وقاعدته دائرة نصف قطرها 2، ويقع مركزها في نقطة الأصل $(0, 0, 0)$.

23 منشورًا قائمًا مربّع القاعدة يقع أحد رؤوسه في نقطة الأصل$(0, 0, 0)$ ، ضلع قاعدته 5 وارتفاعه 3.

جِد المسافة بين النقطتين A وَ B وإحداثيّات منتصف $\overline{AB}$. قرّب الإجابات إلى أقرب عُشر.

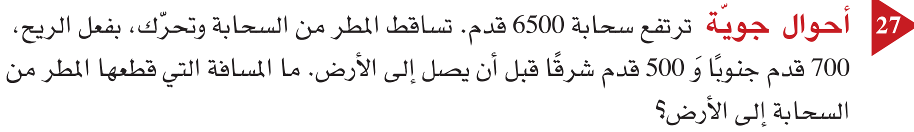
24 $A(0, 0, 0)$ ، $B(4, 4, 4)$

25 $A(2, 3, 7)$ ، $B(9, 10, 10)$

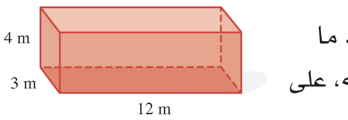
26 $A(2, 5, 3)$ ، $B(8, 8, 10)$

نافذة على الأرصاد الجوية

تصل كتلة بعض السحب الداكنة إلى 635 ألف طن أي ما يزيد على كتلة 100 ألف فيل.



27 **أحوال جويّة** ترتفع سحابة 6500 قدم. تساقط المطر من السحابة وتحرّك، بفعل الريح، 700 قدم جنوبيًا وَ 500 قدم شرقًا قبل أن يصل إلى الأرض. ما المسافة التي قطعها المطر من السحابة إلى الأرض؟

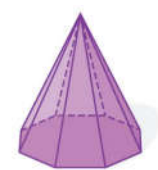


28 **خطوات متعدّدة** جِد قطر متوازي مستطيلات المقابل. ما نتيجة مضاعفة طول متوازي مستطيلات وعرضه وارتفاعه، على طول القطر؟

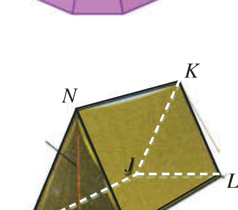
جِد المعلومة الناقصة وارسم جسمًا هندسيًا له أعداد الرؤوس والأضلاع والوجوه.

	عدد الرؤوس	عدد الأضلاع	عدد الوجوه	متعدّد الوجوه
	5	8	5	
29	8	12	■	■
30	■	9	5	■
31	7	■	7	■

32 **جبر** كل قاعدة من قاعدتي المنشور المقابل مضلّع له n ضلعًا. اكتب مقادير بدلالة n تُعبّر عن عدد رؤوس المنشور وعدد أضلاعه وعدد وجوهه. استعمل ما توصّلت إليه لتتحقّق من صحّة قانون أولر.



33 **جبر** قاعدة الهرم المقابل مضلّع من n ضلعًا. اكتب مقادير بدلالة n تُعبّر عن عدد رؤوس الهرم وعدد أضلاعه وعدد وجوهه. استعمل ما توصّلت إليه لتتحقّق من صحّة قانون أولر.



34 الخيمة المقابلة منشور مثلّث قائم القاعدة حيث $\overline{KJ} \cong \overline{KL} \cong \overline{MN} \cong \overline{NP}$.

أ تم نصب هذه الخيمة بحيث يقع الرأس J في نقطة$(0, 0, 0)$ ويقع الرأس M في النقطة $(7, 0, 0)$. جِد إحداثيّات الرؤوس الأخرى.

ب يرغب صانع الخيمة في معرفة المسافة بين K وَ P ليُضيف عارضة تدعم الخيمة. جِد KP وقرّب الجواب إلى أقرب عُشر.



جِد القياس الناقص لكل متوازي مستطيلات. أعطِ الإجابات على الصورة الجذريّة الأبسط.

	الطول ℓ	العرض w	الارتفاع h	القطر d
35	6	6	6	■
36	24	■	60	65
37	12	18	■	24
38	■	2	3	4

ارسم:

39 أسطوانة ارتفاعها 5، قاعدتها السفلى دائرة مركزها $(1, 2, 5)$ ونصف قطرها 4.

40 مخروطًا ارتفاعه 7 وقاعدته دائرة مركزها $(3, 3, 6)$ ونصف قطرها 3.

41 مكعّبًا ضلعه 6 ويقع أحد رؤوسه في $(4, 2, 3)$.

42 متوازي مستطيلات رؤوسه $(4, 2, 5)$، $(4, 6, 5)$، $(4, 6, 8)$، $(8, 6, 5)$، $(8, 2, 5)$، $(8, 6, 8)$، $(4, 2, 8)$، $(8, 2, 8)$.

43 مخروطًا رأسه $(4, 7, 8)$ وقاعدته دائرة مركزها $(4, 7, 1)$ ونصف قطرها 4.

44 أسطوانة نصف قطر كل من قاعدتيها 5 ويقع مركز كل منهما في $(2, 3, 7)$ وَ $(2, 3, 15)$.

ارسم $\overline{AB}$ ثم جِد طولها وإحداثيّات منتصفها. قرّب الإجابات إلى أقرب عُشر.

45 $A(1, 2, 3)$، $B(3, 2, 1)$

46 $A(4, 3, 3)$، $B(7, 4, 4)$

47 $A(4, 7, 8)$، $B(3, 1, 5)$

48 $A(0, 0, 0)$، $B(8, 3, 6)$

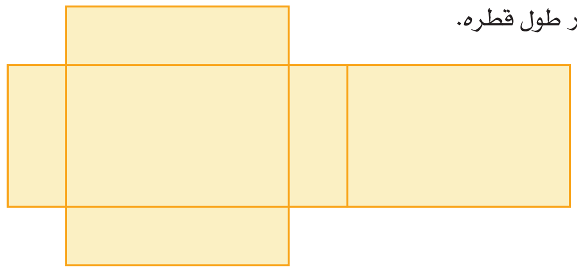
49 $A(6, 1, 8)$، $B(2, 2, 6)$

50 $A(2, 8, 5)$، $B(3, 6, 3)$

51 **خطوات متعدّدة** جِد قيمة z علمًا أن المسافة بين $R(6, -1, -3)$ وَ $S(3, 2, z)$ تساوي 13.

52 ارسم جسمًا هندسيًّا له 6 رؤوس وَ 6 وجوه.

53 **تقدير** قِس أطوال بسط متوازي المستطيلات التالي وقدِّر طول قطره.



54 **صِغ مقولة** أي قطعة مستقيمة يقع طرفاها على متوازي المستطيلات هي الأطول في رأيك؟ تحقّق من مقولتك باستعمال 3 قطع مستقيمة على الأقل، يقع طرفا كل منها على متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ حيث $A(0, 0, 0)$، $B(1, 0, 0)$، $C(1, 2, 0)$، $D(0, 2, 0)$، $E(0, 0, 2)$، $F(1, 0, 2)$، $G(1, 2, 2)$، $H(0, 2, 2)$.

55 **تفكير ناقد** تُشكّل النقاط $A(3, 2, -3)$، $B(5, 8, 6)$، $C(-3, -5, 3)$ مثلّثًا. صنِّف هذا المثلّث باستعمال أضلاعه وزواياه.

56 **اكتب** أسطوانة نصف قطرها 4 cm وارتفاعها 6 cm. ما طول أطول قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الأسطوانة؟ حدّد موقع طرفي هذه القطعة المستقيمة، واذكر السبب الذي يجعلها الأطول.



تحضير للامتحان

57 كم عدد الرؤوس والأضلاع والوجوه في هرم سداسي القاعدة؟

(أ) 6 وجوه، 10 أضلاع، 6 رؤوس
(ب) 7 وجوه، 12 ضلعًا، 7 رؤوس
(ج) 7 وجوه، 10 أضلاع، 7 رؤوس
(د) 8 وجوه، 18 ضلعًا، 12 رأسًا

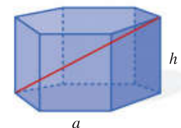
58 أي مما يلي هو الأقرب لقطر متوازي المستطيلات طوله 12 m وعرضه 8 m وارتفاعه 6 m ؟

(أ) 6.6 m
(ب) 44 m
(ج) 15.6 m
(د) 244.0 m

59 ما المسافة بين النقطتين $(7, 14, 8)$ وَ $(9, 3, 12)$. قرّب الجواب إلى أقرب عُشر.

(أ) 10.9
(ب) 11.9
(ج) 119.0
(د) 141.0

تحدٍّ وتوسُّع



60 **خطوات متعدّدة** كل قاعدة للمنشور المقابل سداسي منتظم طول ضلعه a. جِد طول القطر الأحمر بدلالة طول الضلع a والارتفاع h.

61 هل النقاط $A(-1, 2, 4)$ وَ $B(1, -2, 6)$ وَ $C(3, -6, 8)$ على استقامة واحدة؟

62 **جبر** استعمل الإحداثيّات وقانون المسافة لتبرهن قانون إحداثيّات المنتصف.

المعطى: النقاط $A(x_1, y_1, z_1)$ وَ $B(x_2, y_2, z_2)$ وَ $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

المطلوب: النقاط الثلاث على استقامة واحدة وَ $AM = MB$.

63 **جبر** استعمل الإحداثيّات لتبرهن أن أقطار متوازي المستطيلات متطابقة، وأنها تتقاطع عند منتصفاتها.

المعطى: منشور قائم مستطيل القاعدة رؤوسه $A(0, 0, 0)$ ، $B(a, 0, 0)$ ، $C(a, b, 0)$ ، $D(0, b, 0)$ ، $E(0, 0, c)$ ، $F(a, 0, c)$ ، $G(a, b, c)$ ، $H(0, b, c)$.

المطلوب: $\overline{AG}$ وَ $\overline{BH}$ متطابقان، وينصّف كل منهما الآخر.

مراجعة لولبية

يُظهر الرسم البياني المقابل أعداد الأشخاص الذين زاروا المتحف الوطني وفق فئات الأعمار.

جِد: (الصفوف السابقة)

عدد الزائرين في المتحف الوطني

الزوّار: 0، 10، 20، 30، 40

العمر (السنة): 0-9، 10-19، 20-29، 30-39، 40-49، 50-59، 60-69، 70-79

64 عدد الأشخاص الذين تتراوح أعمارهم بين 10 سنوات وَ 29 سنة من الذين زاروا المتحف.

65 فئة الأعمار التي كان عدد الزوّار منها هو الأكبر.

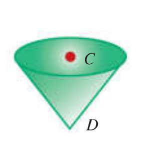
اكتب قاعدة لحساب مساحة كل شكل هندسي بعد التغيير المحدّد. (الصفوف السابقة)

66 متوازي أضلاع قاعدته b وارتفاعه h بعد مضاعفة ارتفاعه.

67 شبه منحرف ارتفاعه h وقاعدتاه b_1 وَ b_2 بعد ضرب b_1 في $\frac{1}{2}$.

68 دائرة نصف قطرها r بعد مضاعفة نصف القطر 3 مرّات.

استعمل الرسم المقابل لحل التمارين من 69 إلى 71. (الدرس 1-2)



69 صنِّف الجسم.

70 سمِّ الأضلاع.

71 سمِّ القاعدة.

7–1 الكُرَة
Sphere

الأهداف
- يذكر قانون حجم الكرة ويستعمله.
- يذكر قانون مساحة الكرة ويستعمله.

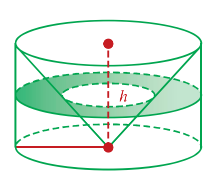
المفردات Vocabulary
- الكرة Sphere
- مركز الكرة Center of a sphere
- نصف قطر الكرة Radius of a sphere
- نصف الكرة Hemisphere
- الدائرة العظمى Great circle

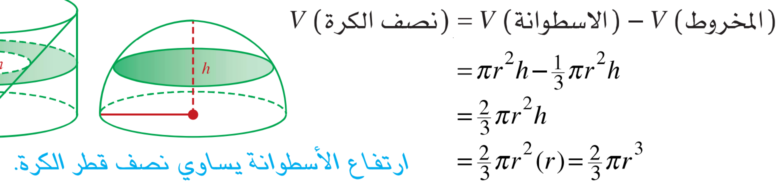
من يستعمل هذا الأمر؟
يدرس علماء الأحياء عيون بعض الحيوانات التي تعيش في أعماق البحار، مثل الحبار العملاق، ليحصلوا على معلومات عن هذه الأعماق. (مثال 2).

الكرة Sphere هي مجموعة نقاط الفضاء التي تقع على المسافة نفسها من نقطة معيّنة تُسمّى **مركز Center** الكرة. كل قطعة مستقيمة تصل بين مركز الكرة ونقطة تقع عليها هي **نصف قطر Radius** للكرة. وكل مستوٍ يمر في مركز الكرة يقطعها وفق دائرة تُسمّى **دائرة عظمى Great circle** للكرة، كما يقسمها إلى قسمين يُسمّى كل منهما **نصف كرة Hemisphere** أو **Semisphere**.

نصف كرة
دائرة عظمى
نصف قطر
مركز الكرة

يُظهر الشكل أدناه نصف كرة وأسطوانة أفرغ منها مخروط. كل مستوٍ موازٍ لقاعدة الأسطوانة وللدائرة العظمى للكرة، يقطع الكرة والأسطوانة المفرغة وفق مقطعين (المُبيَّنين باللون الأخضر) متساويين في المساحة. ينتج من ذلك أن نصف الكرة والأسطوانة المفرغة من المخروط متساويان في الحجم، بالاستناد إلى مبدأ كافالييه Cavalier's Principle. سوف تُبرهن عن تساوي المساحتين في التمرين 39.





V (نصف الكرة) $= V$ (الاسطوانة) $- V$ (المخروط)

$= \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{2}{3}\pi r^2 h$

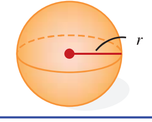
$= \frac{2}{3}\pi r^2 (r) = \frac{2}{3}\pi r^3$

ارتفاع الأسطوانة يساوي نصف قطر الكرة.

ينتج مما سبق أن حجم كرة نصف قطرها r هو $V = \frac{4}{3}\pi r^3$، لأن حجم الكرة يساوي ضعف حجم نصف الكرة.



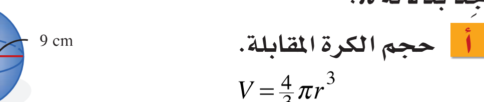
حجم الكرة
يُحسب حجم كرة نصف قطرها r بالقانون $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.



مثـــال 1 إيجاد حجم كرة

جِد بدلالة π:

أ حجم الكرة المقابلة.



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V = \frac{4}{3}\pi (9)^3 = 972\pi$ عوّض عن نصف القطر بقيمته، ثم بسّط.

$V = 972\pi$

يبلغ حجم هذه الكرة $972\pi\ cm^3$.

ب **قطر كرة حجمها $972\pi\ cm^3$.**

$972\pi = \frac{4}{3}\pi r^3$ عوِّض عن v بقيمتها في $v=\frac{4}{3}\pi r^3$.

$729 = r^3$ اقسم كل طرف على $\frac{4}{3}\pi$.

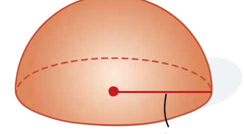
$r = 9$ خذ الجذر التكعيبي لكل طرف.

$d = 2\times r = 2\times 9 = 18$

قطر الكرة هو 18 m.



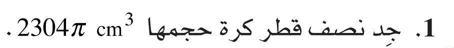
ج **حجم نصف الكرة المقابل.**



$V = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi(4)^3 = \frac{128\pi}{3}$

حجم نصف الكرة هو $\frac{128\pi}{3}\ m^3$.





1. جِد نصف قطر كرة حجمها $2304\pi\ cm^3$.

مثـــال 2 تطبيق على الأحياء

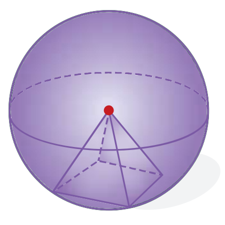
الحبار حيوان بحري يعيش في أعماق البحار. يحتاج الحبار إلى عيون واسعة ليتمكّن من رؤية ما يفترسه في النور الخافت الذي يسود أعماق البحار. تصل مقلة عين الحبار العملاق إلى أن تكون كرة قطرها 25 cm، بينما يبلغ قطر مقلة عين الإنسان 2.5 cm تقريبًا. كم ضعفًا يبلغ حجم مقلة عين الحبار العملاق قياسًا على حجم مقلة عين الإنسان؟

مقلة عين الإنسان	مقلة عين الحبار العملاق
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
$V = \frac{4}{3}\pi(1.25)^3$	$V = \frac{4}{3}\pi(12.5)^3$
يبلغ حجم مقلة عين الإنسان $8.18123\ cm^2$ تقريبًا.	يبلغ حجم مقلة عين الحبار $8181.23\ cm^3$ تقريبًا.

يبلغ حجم مقلة عين الحبار العملاق حوالي 1000 ضعف من حجم مقلة عين الإنسان.



2. قطر مقلة عين الطائر الطنّان 0.6 cm تقريبًا. كم ضعفًا يبلغ حجم مقلة الإنسان قياسًا على حجم مقلة هذا الطير؟



يقع رأس الهرم في الصورة المقابلة عند مركز الكرة. يساوي ارتفاع الهرم نصف قطر الكرة تقريبًا. افترض أن الكرة عبِّئت بـ n هرم مساحة قاعدة كل منها B وارتفاعه r.

$V(\text{الكرة}) = \frac{1}{3}Br + \frac{1}{3}Br + \ldots + \frac{1}{3}Br$ يساوي حجم الكرة مجموع حجوم الأهرامات تقريبًا.

$\frac{4}{3}\pi r^3 = n\left(\frac{1}{3}Br\right)$

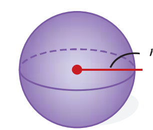
$4\pi r^2 = nB$ اقسم كل طرف على $\frac{1}{3}r$.

إذا ملأت الأهرامات الكرة، فإن مجموع مساحات قواعدها يساوي تقريبًا مساحة سطح الكرة أي $S = 4\pi r^2$. وكلما ازداد عدد الأهرامات كان مجموع مساحات قواعدها أقرب إلى مساحة سطح الكرة.



المساحة السطحية للكرة

تُحسب المساحة السطحية لكرة نصف قطرها r بالقانون $S = 4\pi r^2$.



مثـــال 3 إيجاد المساحة السطحية لكرة

جِد بدلالة π:

أ **المساحة السطحية لكرة قطرها 10 cm.**

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi(5)^2 = 100\pi$$

مساحة الكرة $100\pi\ \text{cm}^2$.

ب **حجم كرة مساحتها السطحية $144\pi\ \text{cm}^2$.**

$$S = 4\pi r^2$$

$$144\pi = 4\pi r^2$$

$$6 = r$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(6)^3 = 288\pi$$

حجم الكرة $288\ \text{cm}^3$.

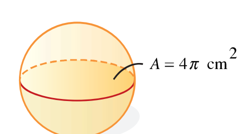
ج **المساحة السطحية لكرة مساحة دائرتها العظمى $4\pi\ \text{cm}^2$.**

$$\pi r^2 = 4\pi$$

$$r = 2$$

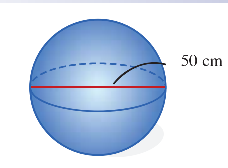
$$S = 4\pi r^2 = 4\pi(2)^2 = 16\pi$$

مساحة الكرة $16\pi\ \text{cm}^2$.



نقطة مراقبة

3. جِد المساحة السطحية للكرة المقابلة.



مثـــال 4 استكشاف تأثير التغيّر في القياسات على حجم الكرة ومساحتها

تم ضرب نصف قطر الكرة في 3. صف تأثير ذلك على حجمها.

الكرة الأصليّة	الكرة بعد تكبير نصف قطرها
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
$= \frac{4}{3}\pi(3)^3$	$= \frac{4}{3}\pi(9)^3$
$= 36\pi$	$= 972\pi$

3 cm

لاحظ أن $972\pi = 27(36\pi)$. إذًا، عندما تضرب نصف قطر الكرة في 3، فإن حجمها يُضرب في 27 لاحظ أن 27 هو تكعيب 3 .



4. كيف يتغيّر حجم الكرة إذا تمّت قسمة نصف قطرها على 3 ؟

مثـــال 5 إيجاد حجوم أجسام مركّبة ومساحاتها السطحية

جِد المساحة السطحية للجسم المقابل وحجمه، بدلالة π .



المساحة المساحة السطحية لهذا الجسم المركّب.



المساحة السطحية لهذا الجسم المركّب هي مجموع مساحة نصف الكرة والمساحة الجانبيّة للمخروط.

7 cm

25 cm

$S(\text{نصف القطر}) = \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi(7)^2 = 98\pi \text{ cm}^2$

$S(\text{المخروط}) = \pi r h = \pi(7)(25) = 175\pi \text{ cm}^2$

$S(\text{الجسم المركّب}) = 98\pi + 175\pi = 273\pi \text{ cm}^2$

المساحة السطحية للجسم المركّب هي $273\pi \text{ cm}^2$.

الحجم جِد حجم الجسم المركّب.

ابدأ بإيجاد ارتفاع المخروط.

$h = \sqrt{25^2 - 7^2}$

$h = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$

حجم هذا الجسم المركّب هو مجموع حجمَي نصف الكرة والمخروط.

$V(\text{نصف الكرة}) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{2}{3}\pi(7)^3 = \frac{686\pi}{3} \text{ cm}^3$

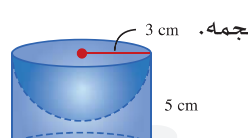
$V(\text{المخروط}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(7)^2(24) = 392\pi \text{ cm}^3$

$V(\text{الجسم المركّب}) = \frac{686\pi}{3} + 392\pi = \frac{1862\pi}{3} \text{ cm}^3$

حجم الجسم المركّب هو $\frac{1862\pi}{3} \text{ cm}^3$.



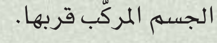
5. جِد المساحة السطحية للجسم المركّب المقابل وحجمه.



فكِّر وناقش

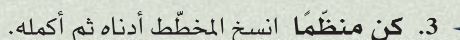
1. كيف تحسب المساحة السطحية للكرة إذا عرفت مساحة دائرة عظمى لها؟

2. قارن بين حجم الكرة المقابلة وحجم الجسم المركّب قربها.





3. **كن منظّمًا** انسخ المخطّط أدناه ثم أكمله.





7-1 التمارين

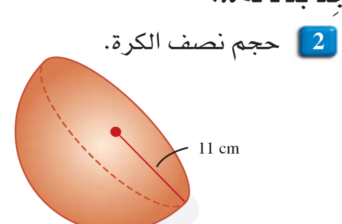
تمارين موجّهة

1 **مفردات** صِف طريـ في نصف قطر للدائرة.

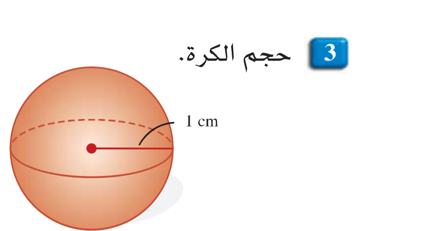
انظر المثال 1

جِد بدلالة π:

2 حجم نصف الكرة.



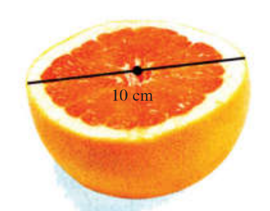
3 حجم الكرة.

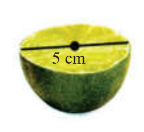


4 نصف قطر كرة حجمها $288\pi\ cm^3$.

انظر المثال 2

5 **طعام** كم ضعفًا يساوي حجم نصف ثمرة الكريب فروت قياسًا على نصف ثمرة البرتقال.

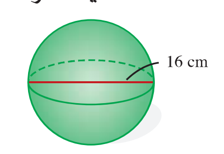




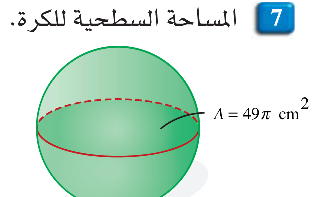
انظر المثال 3

جِد بدلالة π:

6 المساحة السطحية للكرة قطرها 16 cm.



7 المساحة السطحية للكرة.

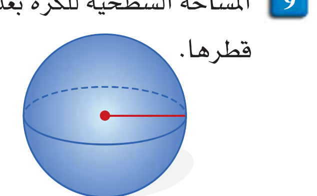


8 حجم كرة مساحتها السطحية $6724\pi\ m^2$.

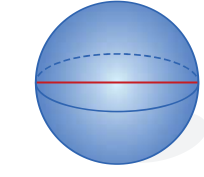
انظر المثال 4

صِف تأثير كل تغيّر على القياس المُعيّن.

9 المساحة السطحية للكرة بعد مضاعفة نصف قطرها.



10 حجم الكرة بعد تصغير قطرها إلى الربع.

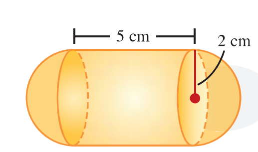




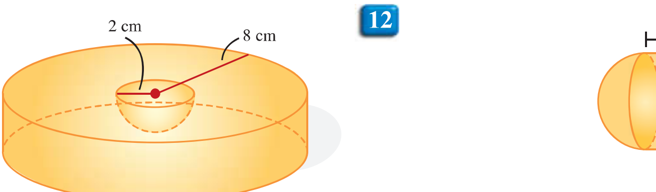
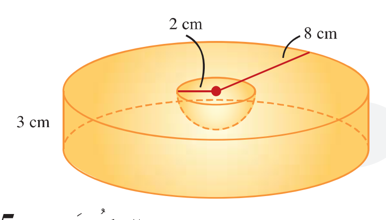
انظر المثال 5

جِد المساحة السطحية لكل جسم مركّب وحجمه.

11



12

تمــارين وحلُّ مســائـل

تمارين حرّة

لحل التمارين	أنظر المثال
15–13	1
16	2
19–17	3
21–20	4
23–22	5

جِد بدلالة π:

13 حجم الكرة.

18 cm

14 حجم نصف الكرة.

7 cm

15 قطر كرة حجمها $7776\pi\,cm^3$.

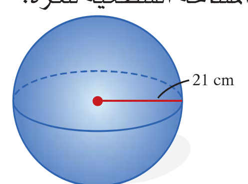
16 **جواهر** يتحدّد قياس اللؤلؤة بقطرها مقيسًا بالمليمتر. كم مرّة يكبر حجم لؤلؤة قطرها 9 mm حجم لؤلؤة قطرها 6 mm ؟





جِد بدلالة π:

17 المساحة السطحية للكرة.



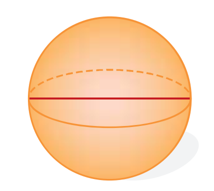
18 المساحة السطحية للكرة.

$A = 81\pi\ cm^2$

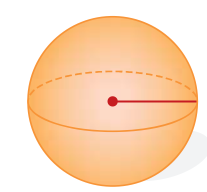
19 حجم كرة مساحتها السطحية $625\pi\,m^2$.

جِد تأثير كل تغيير على القياس المعيّن.

20 تأثير ضرب نصف القطر في $\frac{1}{5}$ على المساحة.

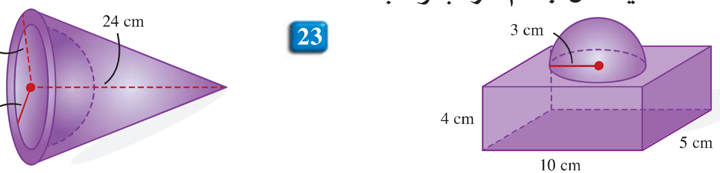


21 تأثير ضرب نصف القطر في 6 على الحجم.

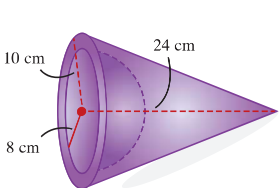


جِد المساحة السطحية لكل جسم مركّب وحجمه.

22



23



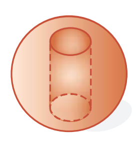
24 جِد نصف قطر نصف كرة حجمها $144\pi\ cm^3$.

25 جِد محيط الدائرة العظمى لكرة مساحتها $60\pi\ cm^2$.

26 جِد حجم كرة محيط دائرتها العظمى 36π cm .

27 جِد المساحة السطحية وحجم الكرة التي يقع مركزها في نقطة الأصل $(0, 0, 0)$ من الفضاء الإحداثي وتمر في النقطة $(2, 3, 6)$.

28 **تقدير** تم ثقب لؤلؤة كرويّة قطرها 8 mm بحفر أسطوانة قطرها 2 mm داخلها. قدّر مساحة اللؤلؤة المثقوبة وحجمها.



رياضة جِد المقاييس الناقصة لكل كرة من كرات بعض الألعاب الرياضيّة.

	الرياضة	الكرة	القطر	محيط دائرة عظمى	المساحة	الحجم
29	الغولف		4.27 cm	■	■	■
30	الكريكت		■	22.86 cm	■	■
31	المضرب		6.35 cm	■	■	■
32	البيتان		74 mm	■	■	■

نافذة على علم الأحياء البحري



وصلت غوّاصة الباتسفير إلى عمق 923 m سنة 1934. بلغ ضغط الماء عليها قرابة 34 وحدة ضغط جوي.

33 **أحياء** كانت الباتسفير أول غوّاصة للأبحاث البحرية. وقد تم اختراعها على شكل كرة سنة 1930. بلغ القطر الداخلي لهذه الغوّاصة 137 cm تقريبًا، وبلغ سَمْك الفولاذ الذي صنعت منه 3.8 cm. كان لهذه الغوّاصة 3 نوافذ دائريّة قطر الواحدة منها 30 cm تقريبًا. قدّر حجم الفولاذ الذي استعمل لصناعة هذه الغوّاصة.

34 **جغرافيا** يبلغ نصف قطر الكرة الأرضيّة 6437 km تقريبًا. تُغطّي المياه ثلثي سطح الأرض تقريبًا. قدّر مساحة اليابسة.

فلك استعمل الجدول لحل التمارين من 35 إلى 38 .

الكوكب	القطر بالأميال
عطارد	3032
الزهرة	7521
الأرض	7926
المرّيخ	4222
المشتري	88846
زحل	74898
أورانوس	31763
نبتون	30775
بلوتو	1485

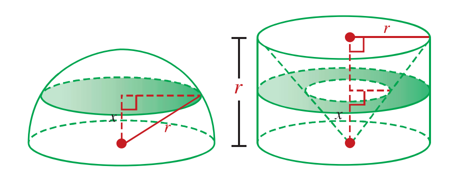
35 كم ضعفًا يساوي حجم المشتري قياسًا على حجم الأرض؟

36 أي كوكب يساوي حجمه تقريبًا مجموع حجمَي الزهرة والمرّيخ؟

37 أيّهما أكبر: مساحة زحل أم مجموع مساحتَي أورانوس ونبتون؟

38 كم ضعفًا تساوي مساحة عطارد قياسًا على مساحة بلوتو؟

39 **تفكير ناقد** لنصف الكرة والأسطوانة نصف القطر نفسه في الرسم المقابل. أثبت أن للمقطعين المُظلّلين المساحة نفسها.



40 **اكتب** افترض أن لكرة ومكعّب المساحة نفسها. اكتب معادلة تُبيّن العلاقة بين نصف قطر هذه الكرة r وضلع هذا المكعّب s.

41 يُعبِّئ أحد مصانع عصير البرتقال ما ينتجه في أوعية كرويّة تشبه البرتقالة. مساحة الوعاء الكروي $324.5\ cm^2$ تقريبًا.

أ ما حجم هذا الوعاء الكروي؟ قرّب الجواب إلى أقرب عُشر.

ب قرَّر المصنع أن يزيد نصف قطر الوعاء الكروي 10%. ما حجم الوعاء الجديد؟



تحضير للاختبار

42 يُحيط مكعّب بكرة نصف قطرها 8 cm. ما نسبة حجم المكعّب إلى حجم الكرة؟

(أ) $2:\frac{1}{3}\pi$ (ب) $2:3\pi$ (ج) $1:\frac{4}{3}\pi$ (د) $1:\frac{2}{3}\pi$

43 ما المساحة السطحية لكرة حجمها $10\frac{2}{3}\pi\ cm^3$ ؟

(أ) $8\pi\ cm^2$ (ب) $10\frac{2}{3}\pi\ cm^2$ (ج) $16\pi\ cm^2$ (د) $32\pi\ cm^2$

44 أي مقدار يمثّل حجم الجسم المقابل المركّب من نصف كرة نصف قطرها r ومكعّب ضلعه $2r$.

(أ) $\left(\frac{2}{3}\pi+8\right)r^3$ (ج) $2(2\pi+12)r^2$

(ب) $\frac{4}{3}\pi r^3+2r^3$ (د) $\frac{4}{3}\pi r^3+8r^3$



تحدٍّ وتوسُّع



45 **طعام** يتكوّن رأس آلة لتوزيع كرات العلكة من كرة قطرها 18 cm. تحتوي الآلة على 1 300 كرة علكة تشغل 57% من حجمها. قدّر قطر كل كرة علكة.

46 يُمكن استعمال المساحة السطحية للكرة لإيجاد حجمها.

أ استعمل قانون المساحة السطحية للكرة لحساب نصف قطرها r بدلالة مساحتها S.

ب عوّض، في قانون حجم الكرة، عن r بالقيمة التي وجدتها في السؤال السابق.

ج ارسم بيان الدالّة التي تُعبّر عن حجم الكرة بدلالة مساحتها. صِف البيان الذي رسمته.



استعمل الرسم المقابل لحل التمرينين 47 وَ 48.

47 ما العلاقة بين حجم الكرة وحجم الأسطوانة؟

48 ما العلاقة بين المساحة السطحية للكرة والمساحة الجانبيّة للأسطوانة؟



مراجعة لولبية

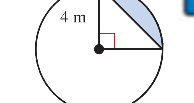
اكتب دالّة يمر بيانها في النقاط التالية. (الصفوف السابقة)

49 $\{(0, 1), (1, 2), (-1, 2), (2, 5), (-2, 5)\}$

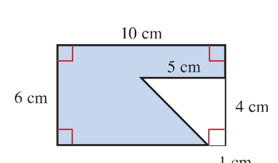
50 $\{(-1, 9), (0, 10), (1, 11), (2, 12), (3, 13)\}$

جِد مساحة القسم المُظلّل. قرّب الجواب إلى أقرب عُشر. (الصفوف السابقة)

51



52



صِف تأثير كل تغيير على الحجم. (الصفوف السابقة)

53 حجم المكعّب بعد ضرب ضلعه في $\frac{3}{4}$.

54 حجم منشور بعد ضرب كل من ارتفاعه ومساحة قاعدته في 5.

8–1 القِطاعاتُ الدائِريَّة والأقواس

Sectors and arcs



الأهداف

يحسب مساحة قطاع دائري.

يحسب طول قوس.

المفردات

Vocabulary

القطاع الدائري
Sector of a circle

القطعة الدائريّة
Segment of a circle

طول القوس
Arc length

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل المزارعون نصف قطر الري الدائري لحساب مساحة المنطقة التي يُغطّيها الري. (مثال 3).

مساحة القطاع الدائري جزء من مساحة الدائرة التي تحتويه. لكي تحسب مساحة قطاع دائري زاويته m° ، اضرب مساحة الدائرة في $\frac{m^\circ}{360^\circ}$.

اعلم و احفظ — **القطاع الدائري**

التعريف	التسمية	الصورة	المساحة
القطاع الدائري Sector of a circle جزء من الدائرة محدّد بنصفي قطر والقوس الذي يحدّدانه على الدائرة.	القطاع BCD	D, r, m°, C, B	$A=\pi r^2\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$



مثـــــال 1 إيجاد مساحة قطاع دائري

جِد مساحة كل قطاع دائري بدلالة π. ثم مقرِّبة إلى أقرب جزء من مئة.

أ القطاع MPN.

$A=\pi r^2\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$ قانون مساحة القطاع الدائري.

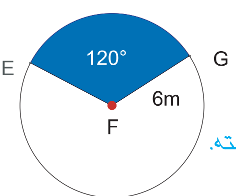
$A=\pi(3)^2\left(\frac{80^\circ}{360^\circ}\right)$ عوّض عن كل من نصف القطر وقياس الزاوية بقيمته.

$A=2\pi$ بسّط

تبلغ مساحة هذا القطاع $2\pi\ \text{m}^2\approx 6.28\ \text{m}^2$.

M, P, 3m, 80°, N

ب القطاع EFG.



$A=\pi r^2\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$ قانون مساحة القطاع الدائري.

$A=\pi(6)^2\left(\frac{120^\circ}{360^\circ}\right)$ عوّض عن كل من نصف القطر وقياس الزاوية بقيمته.



$A=12\pi\ \text{cm}^2$ بسّط

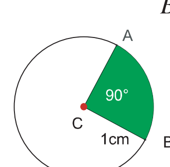
تبلغ مساحة هذا القطاع $12\pi\ \text{cm}^2\approx 37.70\ \text{cm}^2$.

اكتب رمز الدرجة بعد m في القانون للتذكّر أنّك تستعمل قياس القوس وليس طوله.

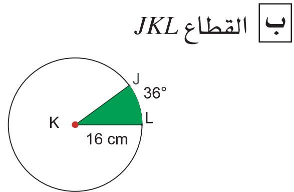


1. جِد مساحة كل قطاع دائري بدلالة π، ثم مقرَّبة إلى أقرب جزء من مئة.

أ) القطاع BCA



ب) القطاع JKL



مثال 2 تطبيق في الزراعة



يبلغ قطر ري دائري 120m. احسب مساحة القطاع الذي ترويه آلة الري عندما تدور 50°.
أعطِ الجواب مقربًا إلى أقرب متر مربّع.

$A = \pi r^2 \left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$ قانون مساحة القطاع الدائري.

$A = \pi (60)^2 \left(\frac{50^\circ}{360^\circ}\right)$ $r = 360$ cm.

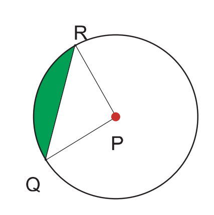
$A = 500\pi$ بسِّط

تبلغ مساحة هذا القطاع $1\ 571\ m^2$ تقريبًا.



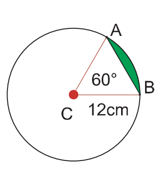
2. كم ستكون المساحة لو أن الآلة دارت نصف دورة؟

القطعة الدائريّة segment of a Circle هي المنطقة المحدّدة بوتر دائرة والقوس الذي يحدّده الوتر.





مساحة القطعة الدائريّة





مساحة القطعة الدائرية = مساحة القطاع - مساحة المثلث

مثال 3 إيجاد مساحة القطعة الدائريّة

جِد مساحة القطعة الدائريّة. مقرَّبة إلى أقرب جزء من مئة.

الخطوة 1 جِد مساحة القطاع الدائري ACB.

$A_1 = \pi r^2 \left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$ قانون مساحة القطاع الدائري.

$A_1 = \pi (12)^2 \left(\frac{60^\circ}{360^\circ}\right)$

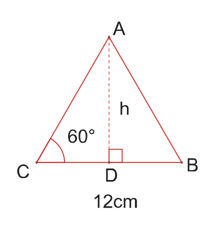
$A_1 = 24\pi$ بسِّط

الخطوة 2 جِد مساحة المثلّث ACB.

ارسم الارتفاع $\overline{AD}$.

$A_2 = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(12)(6\sqrt{3})$

$A_2 = 36\sqrt{3}\ cm^2$



تــذكَّــر

في المثلّث القائم 30 – 60 – 90 يكون طول الضلع المقابل للزاوية 60° ناتج ضرب $\sqrt{3}$ في طول الضلع المجاور لها.

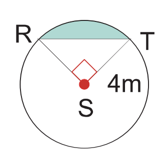
الخطوة 3 مساحة القطعة = مساحة القطاع − مساحة المثلّث

$A = 24\pi - 36\sqrt{3} \approx 13.04$

مساحة القطاع $13.04\ cm^2$ تقريبًا.



3. جِد مساحة القطعة الدائريّة مقرّبة إلى أقرب جزء من مئة.



كما أن مساحة القطاع الدائري جزء من مساحة الدائرة، كذلك طول القوس جزء من محيطها.

اعلم و احفظ — **طول القوس**

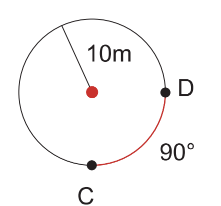
التعريف	الصورة	الطول
طول القوس Arc length هو طول خيط ملتصق بالقوس ويصل بين طرفيه.	 A, m, B, r	$L = 2\pi r\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$

لاحظ أن طول القوس ونصف القطر لهما وحدة الطول نفسها.

مثـــــال 4 إيجاد طول قوس

جِد طول كل قوس بدلالة π، ثم مقرَّبًا إلى أقرب جزء من مئة.

أ $\overset{\frown}{CD}$



$L = 2\pi r\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$

$L = 2\pi(10)\left(\frac{90^\circ}{360^\circ}\right)$

$L = 5\pi \approx 15.71$

طول القوس $15.71\ m$ تقريبًا.

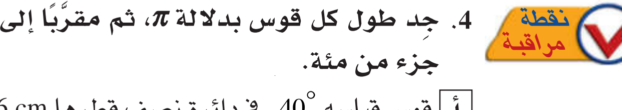
ب **قوس قياسه 35° في دائرة نصف قطرها $3\ m$.**

$L = 2\pi r\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$

$L = 2\pi(3)\left(\frac{35^\circ}{360^\circ}\right)$

$L = \frac{7}{12}\pi \approx 1.83$

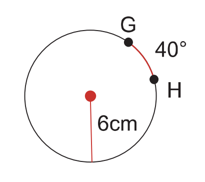
يبلغ طول القوس $1.83\ m$ تقريبًا.



4. **جِد طول كل قوس بدلالة π، ثم مقرَّبًا إلى أقرب جزء من مئة.**

أ قوس قياسه 40° في دائرة نصف قطرها $6\ cm$.

ب قوس قياسه 135° في دائرة نصف قطرها $4\ cm$.



فكّرْ وناقش

1. ما الفرق بين طول القوس وقياسه؟
2. عندما تقسّم فطيرة بيتزا إلى قطاعات متساوية، يكون كلّ منها قطاعًا دائريًّا. ما المعلومات التي تحتاجها لإيجاد مساحة قطعة من قطع البيتزا.
2. **كن منظّمًا** انسخ الجدول أدناه ثم أكمله.

	القانون	الصورة
مساحة قطاع دائري		
مساحة قطعة دائريّة		
طول قوس		



8–1 التمارين

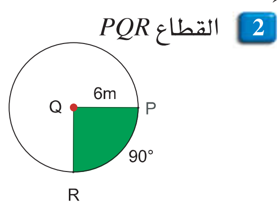
تمارين موجّهة

1 **مفردات** المنطقة المحدّدة بنصفي قطر من أنصاف قطر الدائرة وبالقوس الذي يُحدّدانه هي __?__ . (قطاع دائري أم قطعة دائريّة).

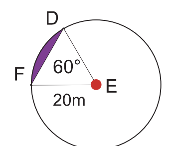
انظر المثال 1

جِد مساحة كل قطاع دائري بدلالة π، ثم مقرَّبة إلى أقرب جزء من مئة.

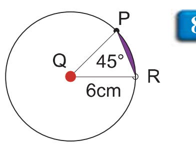
2 القطاع PQR



3 القطاع JKL



4 القطاع ABC



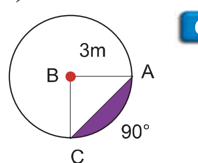
انظر المثال 2

5 **ملاحة** يدور ضوء المنارة بزاوية قياسها 150°، ويُرى ضوؤها حتى مسافة 3 km. احسب المساحة التي يمرّ عليها الضوء مقرَّبة إلى أقرب كيلومتر مربّع.

انظر المثال 3

خطوات متعدّدة **جِد مساحة كل قطعة دائرية مقرَّبة إلى أقرب جزء من مئة.**

6



7

D
F
60°
E
20m

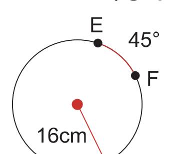
8

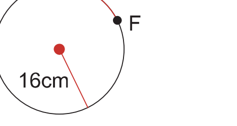
P
Q
45°
R
6cm

انظر المثال 4

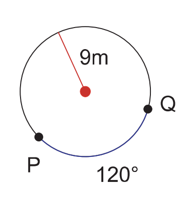
جِد طول كل قوس بدلالة π، ثم مقرَّبًا إلى أقرب جزء من مئة.

9 $\widehat{EF}$





10 $\widehat{PQ}$



11 طول قوس قياسه 20° في دائرة نصف قطرها 6 m.

تمــارين وحلُّ مســائل

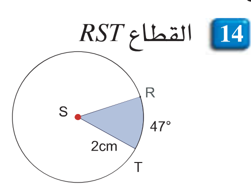
تمارين حرّة	
لحل التمارين	أنظر المثال
14–12	1
15	2
18–16	3
21–19	4

جِد مساحة كل قطاع دائري بدلالة π، ثم مقرَّبةً إلى أقرب جزء من مئة.

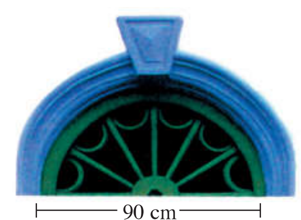
12 القطاع DEF

13 القطاع GHJ

14 القطاع RST



15 **عمارة** القمرة نافذة على شكل نصف دائرة تكون عادة فوق باب المنزل. احسب مساحة القمرة المقابلة مقرَّبة إلى أقرب سنتيمتر مربّع.

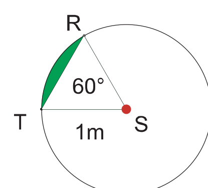


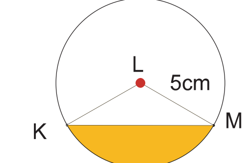
خطوات متعدّدة **جِد مساحة كل قطعة دائريّة مقرَّبة إلى أقرب جزء من مئة.**

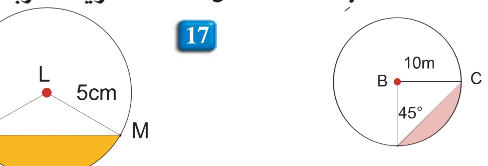
16

17

18



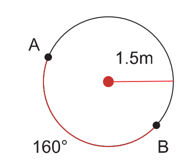


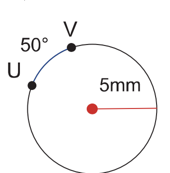


جِد طول كل قوس بدلالة π، ثم مقرَّبًا إلى أقرب جزء من مئة.

19 $\widehat{UV}$

20 $\widehat{AB}$

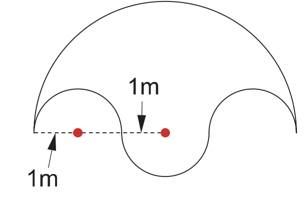






21 طول قوس قياسه 9° في دائرة قطرها 6 m.

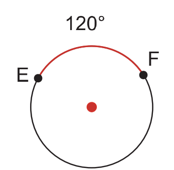
22 **تاريخ الرياضيات** درس علماء الرياضيات الإغريق الشكل المقابل الذي سمّوه **ساليِنون**. احسب محيط السالينون المقابل مقرَّبًا إلى أقرب عُشر.

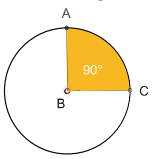


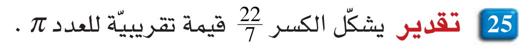
جِد نصف قطر كل دائرة.

23 مساحة القطاع ABC تساوي 9π وحدة مربعة.

24 طول القوس EF يساوي 8π مترًا.





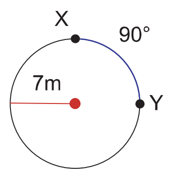


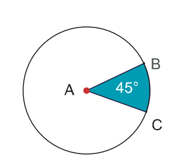
25 **تقدير** يشكّل الكسر $\frac{22}{7}$ قيمة تقريبيّة للعدد π .

أ) استعمل هذه القيمة لإيجاد قيمة تقريبيّة لطول القوس $\widehat{XY}$.

ب) استعمل المفتاح في الحاسبة لإيجاد طول القوس $\widehat{XY}$ مع 8 أرقام بعد النقطة العشريّة.

ج) هل القيمة التقريبيّة التي وجدتها في السؤال أ) أكبر من تلك التي وجدتها في السؤال ب) أم أصغر؟





26 **تفكير ناقد** جِد نصف قطر الدائرة، عندما تكون مساحتها $24\ cm^2$،
ثم عندما تكون مساحة القطاع الأخضر $3\ cm^2$.



27 **اكتب** كيف تحسب نصف قطر دائرة إذا عرفت طول قوس وقياسه؟



تحضير للاختبار

28 ما مساحة القطاع AOB ؟

(أ) 4π (ب) 16π (ج) 32π (د) 64π

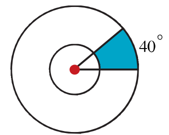
29 ما طول القوس AB ؟

(أ) 2π (ب) 4π (ج) 8π (د) 16π

30 **جواب مختصر** ما مساحة قطاع دائري محدّد بقوس قياسه $38°$ في دائرة نصف قطرها $12\ cm$؟

تحدٍّ وتوسُّع

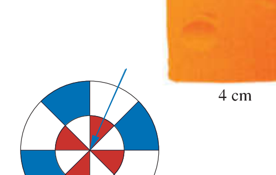
31 ما مساحة الجزء الأزرق، علمًا بأن نصف قطر الدائرة الكبرى $5\ cm$
ونصف قطر الصغرى $2\ cm$ ؟



32 قطعة الجبنة المقابلة قطاع من أسطوانة.

أ ما حجم هذه القطعة؟ قرّب الجواب إلى أقرب عُشر.

ب ما مساحة وجهها الأعلى؟ قرّب الجواب إلى أقرب عُشر.



33 **احتمال** قياس كل زاوية مركزيّة في الشكل المقابل $45°$.
نصف قطر الدائرة الصغرى إنش واحد، ونصف قطر الكبرى
إنشان. ما احتمال أن يُصيب السهم:

أ منطقة حمراء؟ ب منطقة زرقاء؟ ج منطقة حمراء أو زرقاء؟

مراجعة لولبية

**حدّد إن كان كل مستقيم موازيًا للمستقيم $y=4x-5$ ، أو متعامدًا معه،
أو لا هذا ولا ذاك.** (الصفوف السابقة)

34 $8x-2y=6$.

35 المستقيم المار في النقطتين $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ وَ $\left(1\frac{1}{2}, 2\right)$.

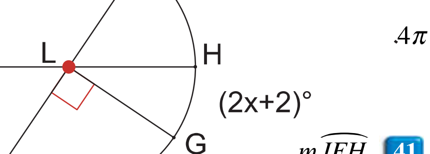
36 المستقيم الذي يقطع المحور الأول عند 4 والمحور الثاني عند 1.

جِد بدلالة π: (الدرس 1-7)

37 حجم كرة نصف قطرها $3\ cm$.

38 محيط دائرة عظمى على كرة مساحتها $4\pi\ m^2$.

احسب: (الصفوف السابقة)



39 $m\widehat{KLJ}$ **40** $m\widehat{KJ}$ **41** $m\widehat{JFH}$

الفصل 1 دليل الدراسة : مراجعة

ارسم كل نقطة في الفضاء الإحداثي.

1 $(-1, 0, 3)$ **2** $(2, -2, 1)$

3 $(0, -1, 1)$ **4** $(3, 1, 0)$

ارسم كل مستوٍ في الفضاء الإحداثي.

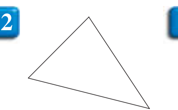
5 $x-3y+2z=6$ **6** $2x-4y-2z=4$

7 $-x+y-5z=5$ **8** $3x+2y+z=-6$

9 **اقتصاد المستهلك** مع روناك 35 000 دينار لشراء مرطّبات وبيتزا وحلوى. ثمن علبة المرطّبات 2 000 دينار وفطيرة البيتزا 9 000 دينار وعلبة الحلوى 4 000 دينار. اكتب معادلة بثلاثة مجاهيل للتعبير عن الأمر.

اذكر إن كان الشكل مضلّعًا. إذا كان مضلّعًا سَمِّه بحسب عدد أضلاعه.

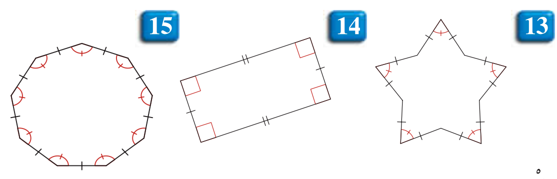
10 **11** **12**





اذكر إن كان المضلّع منتظمًا أم لا، وإن كان مقعّرًا أم محدّبًا.

13 **14** **15**



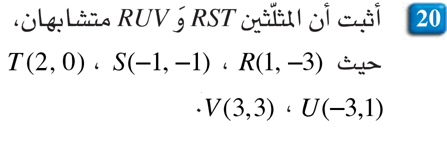
جِد:

16 مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلّع اثني عشري.

17 قياس كل زاوية داخلية في مضلع منتظم من 20 ضلعًا.

18 قياس كل زاوية داخلية في المضلع المقابل.

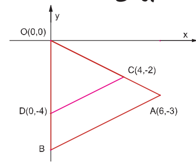
19 قياس زاوية خارجية لرباعي منتظم.



20 أثبت أن المثلّثين RST وَ RUV متشابهان، حيث $R(1, -3)$ ، $S(-1, -1)$ ، $T(2, 0)$ ، $U(-3,1)$ ، $V(3,3)$.

21 أثبت أن المثلّثين JKL وَ JMN متشابهان، حيث $J(4, 4)$ وَ $K(2, 3)$ وَ $L(4,2)$ وَ $M(-4, 0)$ وَ $N(4, -4)$.

22 $O(0, 0)$، $A(6, -3)$، $C(4, -2)$، $D(0, -4)$ جِد إحداثيي النقطة B علمًا بأن المثلّثين AOB وَ COD متشابهان.



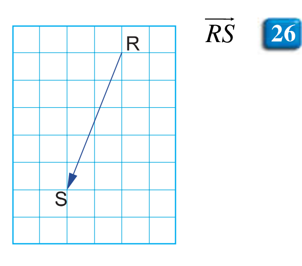
23 ارسم المثلّث KLM حيث $K(0, 3)$ وَ $L(0, 0)$ وَ $M(4, 0)$، ثم ارسم صورته بتكبير نسبته 3 وبيّن أن المثلّثين متشابهان.

اكتب كل متّجه بمكوّنيه.

24 $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(5, 1)$ وَ $B(2, 3)$.

25 $\overrightarrow{MN}$ حيث $M(2, 4)$ وَ $N(1, 2)$.

26 $\overrightarrow{RS}$



ارسم كل متّجه في المستوي الإحداثي واحسب طوله مقرّبًا إلى أقرب عُشر.

27 $\langle -5, -3 \rangle$ **28** $\langle -2, 0 \rangle$

29 $\langle 4, -4 \rangle$ **30** $\langle 4, 4 \rangle$

ارسم كل متّجه في المستوي الإحداثي وجِد ميله مقرّبًا إلى أقرب درجة.

31 سرعة مروحيّة ممثّلة بالمتّجه $\langle 4, 5 \rangle$.

32 تطير طائرة بسرعة $600\ \text{km/h}$ في اتجاه شمال- $55°$ شرق. هبت ريح بسرعة $50\ \text{km/h}$ في اتجاه الشرق. كيف أصبحت سرعة الطائرة؟ كيف أصبح ميلها؟ قرّب السرعة إلى أقرب عُشر والميل إلى أقرب درجة.

جِد كل قياس. قرّب الجواب إلى أقرب عُشر عند الضرورة.



33 محيط الدائرة المقابلة.

34 مساحة دائرة محيطها $14\pi\ \text{m}$.

35 قطر دائرة مساحتها $64x^2\pi\ \text{cm}^2$.

36 مساحة خماسي منتظم ضلعه $4\ \text{cm}$.

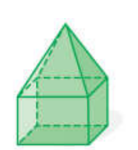
37 مساحة مثلث منتظم ضلعه $4\ \text{km}$.

38 مساحة ثماني منتظم ضلعه $8\ \text{cm}$.

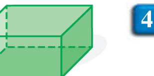
39 مساحة مربع قطره $12\ \text{mm}$.

جِد عدد الوجوه والأضلاع والرؤوس في كل متعدّد وجوه وتحقّق من قانون أولر.

40



41





جِد المسافة بين النقطتين، وإحداثيي منتصف القطعة المستقيمة اللذين يُحدّدانها. قرّب إلى أقرب عُشر.

42 $(7, 1, 1)$ ، $(2, 6, 4)$

43 $(5, 7, 8)$ ، $(0, 3, 0)$

44 $(9, 1, 5)$ ، $(7, 2, 6)$

45 $(2, 7, 4)$ ، $(6, 2, 8)$

جِد بدلالة π:

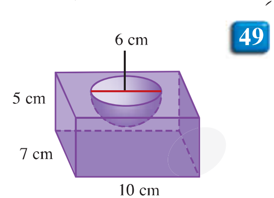
46 حجم كرة مساحتها $100\pi\ \text{cm}^2$.

47 المساحة السطحية للكرة حجمها $288\pi\ \text{cm}^3$.

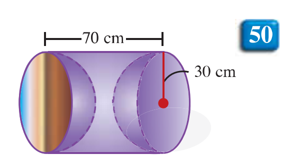
48 قطر كرة مساحتها $256\pi\ \text{cm}^2$.

جِد مساحة كل جسم مركّب وحجمه.

49

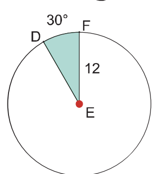


50

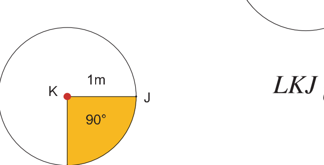


جِد مساحة كل قطاع بدلالة π، ثم مقرَّبة إلى أقرب جزء من مئة.

51 القطاع DEF

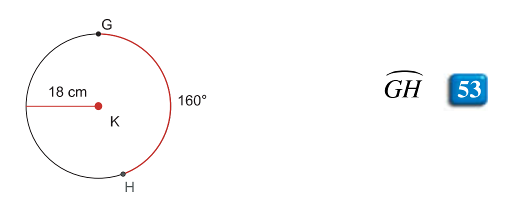


52 القطاع LKJ

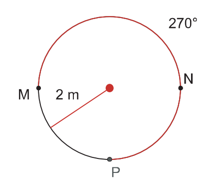


جِد طول كل قوس بدلالة π، ثم مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة.

53 $\overset{\frown}{GH}$



54 $\overset{\frown}{MNP}$



الفصل 1

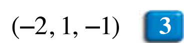


اختبار الفصل

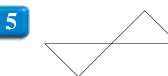
ارسم كل نقطة في الفضاء الإحداثي.

1 $(2, -1, 3)$ **2** $(0, -1, 3)$

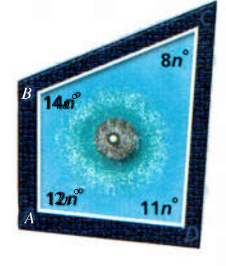
3 $(-2, 1, -1)$



اذكر إن كان الشكل مضلعًا. إذا كان كذلك سَمِّه بحسب عدد أضلاعه.

4  **5** 

6 للبركة شكل رباعي كما هو مبيّن في الرسم المقابل. احسب قياس كل من زواياه الداخليّة.



7 ما مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لتساعي محدّب؟

8 جِد قياس زاوية خارجيّة لمضلّع منتظم عدد أضلاعه 15.

ارسم في المستوى الإحداثي كل متجه واحسب طوله مقرّبًا إلى أقرب عُشر.

9 $\langle 1, 3\rangle$ **10** $\langle -4, 1\rangle$ **11** $\langle 2, -3\rangle$

ارسم في المستوى الإحداثي كل متجه، واحسب ميله مقرّبًا إلى أقرب درجة.

12 سرعة طائرة ممثّلة بالمتّجه $\langle 1, \sqrt{3}\rangle$.

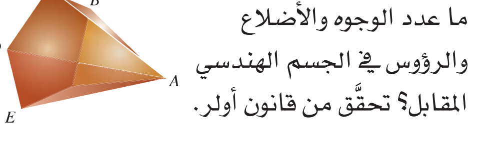
13 سرعة الريح ممثّلة بالمتّجه $\langle \sqrt{3}, 1\rangle$.

14 انطلق سرجون على درّاجته بسرعة ثابتة مقدارها 3.5 km/h في اتجاه شمال-°45-شرق. كانت سرعة الريح 2 km/h في اتجاه الشرق. ما السرعة الحقيقيّة لسرجون مقرَّبة إلى أقرب عشر وما اتجاهها مقرَّبًا إلى أقرب درجة؟

N
W E
S
3.5 km/h
2 km/h
40°

15 جِد بدلالة π محيط ومساحة دائرة قطرها 12 m.

16 ما عدد الوجوه والأضلاع والرؤوس في الجسم الهندسي المقابل؟ تحقّق من قانون أولر.



جِد المسافة بين النقطتين وإحداثيي منتصف القطعة المستقيمة التي يحدّدانها. قرّب الجواب إلى أقرب عُشر.

17 $(0, 0, 0)$ ، $(5, 5, 5)$ **18** $(6, 0, 9)$ ، $(7, 1, 4)$

19 $(-1, 4, 3)$ ، $(2, -5, 7)$

20 جِد مساحة الكرة المقابلة مقرّبة إلى أقرب عُشر. (5 m)

21 جِد حجم الكرة المقابلة مقرَّبًا إلى أقرب عُشر. (12 cm)

22 جِد مساحة سداسي منتظم ضلعه 4 m، مقرّبة إلى أقرب عُشر.

23 جِد مساحة القطاع الدائري المقابل بدلالة π، ثم مقرَّبة إلى أقرب جزء من مئة.

(A، B، C، 8 cm، 135°)

24 جِد طول القوس BC بدلالة π، ثم مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة.

25 قاس خسرو ظل الشجرة وظلّه هو في محاولة لإيجاد ارتفاع الشجرة. ما ارتفاع الشجرة علمًا بأن طول خسرو 175 cm؟

(11m، 90 cm)

26 أثبت أن المثلّثين ABC وَ ADE متشابهان حيث $A(6, 5)$ وَ $B(3, 4)$ وَ $C(6, 3)$ وَ $D(-3, 2)$ وَ $E(6, -1)$.

27 ارسم صورة الشعار المقابل بعد تكبيره بنسبة $\frac{3}{2}$.

(y، x، 0، 1، 2)



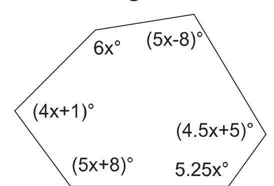
خيار من متعدّد

1 أي مما يلي يُمثّل تقاطعات المستوى $2x+y-5z=20$ ؟

(أ) $x=0, y=0, z=0$ (ج) $x=10, y=20, z=-4$

(ب) $x=2, y=1, z=-5$ (د) $x=10, y=20, z=4$

2 ما قيمة x في المضلع أدناه؟



(أ) 12 (ج) 24

(ب) 18 (د) 36

3 ما قياس كل زاوية داخلية في مضلع منتظم اثني عشري؟

(أ) 30° (ج) 150°

(ب) 144° (د) 162°

4 أي من المتّجهات أدناه يساوي المتّجه $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(2, -1)$ وَ $B(-2, 4)$ ؟

(أ) $\langle -4, -5 \rangle$ (ج) $\langle 5, -4 \rangle$

(ب) $\langle -4, 5 \rangle$ (د) $\langle 5, 4 \rangle$

5 $ABCDE$ خماسي محدّب. $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C}$ ، $\hat{D} \cong \hat{E}$ ، $m\hat{A} = 2m\hat{D}$. ما قياس $\hat{C}$ ؟

(أ) 67.5° (ج) 154.2°

(ب) 135° (د) 225°

6 ما نوع مثلث قياسات زواياه الداخلية $(2x)^\circ$ ، $(3x-9)^\circ$ ، $(x+27)^\circ$ ؟

(أ) متساوي الساقين حاد الزاويا.

(ب) متساوي الساقين قائم.

(ج) مختلف الأضلاع حاد الزوايا.

(د) مختلف الأضلاع بزاوية منفرجة.

7 ما قيمة x في الشكل المقابل؟

(أ) 22.5° (ج) 90°

(ب) 45° (د) 135°

8 خصّصت البلديّة حديقة على شكل سداسي منتظم لزراعة الورود. ما مساحة هذه الحديقة مقرّبة إلى أقرب عُشر، علمًا أن ضلع السداسي $5\ m$ ؟

(أ) $32.5\ m^2$ (ج) $75.0\ m^2$

(ب) $65.0\ m^2$ (د) $129.9\ m^2$

9 كيف تتغيّر نسبة حجم كرة إلى مساحتها، إذا تمّت مضاعفة نصف القطر؟

(أ) لا تتغير النسبة. (ج) تُضرب في 4.

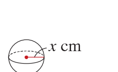
(ب) تتضاعف. (د) تُضرب في 8.

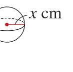
10 $M(2, -6, 3)$ منتصف $\overline{AB}$ حيث $A(x, y, z)$ وَ $B(-2, 6, 13)$. ما إحداثيات النقطة A ؟

(أ) $A(-6, 18, 23)$ (ج) $A(2, -6, 19)$

(ب) $A(0, 0, 8)$ (د) $A(6, -18, -7)$

11 ما حجم الكرة الكبيرة إذا كان حجم الصغيرة $288\ cm^3$.





(أ) $864\ cm^3$ (ج) $7776\ cm^3$

(ب) $2827\ cm^3$ (د) $23\ 328\ cm^3$

12 أي من المتجهات أدناه طوله $3\sqrt{5}$ ؟

(أ) $\langle -4, -5 \rangle$ (ج) $\langle 5, -4 \rangle$

(ب) $\langle -3, 6 \rangle$ (د) $\langle 5, 5 \rangle$

13 ما مساحة القطاع الدائري EFD، إذا كان طول $\widehat{BC}$ $6\pi\ cm$ ؟

(أ) $20\pi\ cm^2$ (ج) $120\pi\ cm^2$

(ب) $72\pi\ cm^2$ (د) $240\pi\ cm^2$

جواب فقط

14 ما عدد أضلاع مضلّع محدّب إذا كان مجموع قياسات زواياه الداخليّة 1260°؟

15 ما قياس $\widehat{PQR}$ في المضلع المقابل؟

R
75°
S
Q
25°
P

16 يبلغ طول لاوين 1.6 m وطول ظلّه 3.5 m. كم يبلغ ارتفاع شجرة يمتد ظلّها على مدى 17.5 m؟

17 ما عدد القطع المستقيمة الناتجة عن وصل نقطتين من بين 6 نقاط في المستوي، علمًا بأنه لا يوجد ثلاث نقاط منها على استقامة واحدة؟

18 ما نصف قطر دائرة نسبة مساحتها إلى محيطها تساوي 2.5 ؟

19 ما طول محصلة المتَّجهين $\vec{u}=\langle 3,-7\rangle$ وَ $\vec{v}=\langle -6,5\rangle$ ؟ قرّب الجواب إلى أقرب عُشر.

20 ما عدد أضلاع متعدِّد وجوه له 12 رأسًا وَ 8 وجوه.

21 ما مساحة سداسي منتظم ضلعه 2 cm ؟ قرّب الجواب إلى أقرب عُشر.

22 ما طول القوس الذي يشكل نصف دائرة في دائرة نصف قطرها 5 mm؟ قرّب الجواب إلى أقرب جزء من مئة.

جواب مختصر

23 أثبت أن المثلّثين ABC وَ DEC متشابهان، حيث $A(-2,0)$ وَ $B(2,2)$ وَ $C(2,-2)$ وَ $D(0,-1)$ وَ $E(2,0)$.

24 ما نصف قطر كرة إذا كانت نسبة حجمها إلى مساحتها تساوي نسبة 2.5 إلى 1؟

25 ارسم المثلّث ABC حيث $A(1,-2)$ ، $B(-2,-3)$ ، $C(-2,2)$.

أ ارسم الصورة $A'B'C'$ للمثلث ABC بتكبير نسبته $\frac{3}{2}$.

ب أثبت أن $\overleftrightarrow{AB}\|\overleftrightarrow{A'B'}$ ، $\overleftrightarrow{BC}\|\overleftrightarrow{B'C'}$ ، $\overleftrightarrow{AC}\|\overleftrightarrow{A'C'}$ استعمل الميل.

26 مثلث رؤوسه $A(1,-2)$ وَ $B(-2,-3)$ و $C(-2,2)$. المثلث $A'B'C'$ هو صورة المثلث ABC بتناسب هندسي مركزه نقطة الأصل ونسبته $\frac{3}{2}$.

أ ارسم، في المستوي الإحداثي نفسه، المثلثين ABC وَ $A'B'C'$.

ب بيّن أن $\overleftrightarrow{AB}\|\overleftrightarrow{A'B'}$ وَ $\overleftrightarrow{AC}\|\overleftrightarrow{A'C'}$ وَ $\overleftrightarrow{BC}\|\overleftrightarrow{B'C'}$ متساوية.

استعمل الميل لتبرير إجاباتك.

27 محطتان للوقود على الطريق السريع يفصل بينهما 8 km. توقفت سيارة بين المحطتين بسبب نفاد وقودها. ما احتمال أن تقع النقطة حيث توقفت السيارة، على بعد لا يقل 2 km عن كلتا المحطتين؟ ارسم مخططًا واكتب شرحًا يوضح كيف وجدت الجواب.

جواب مفصّل

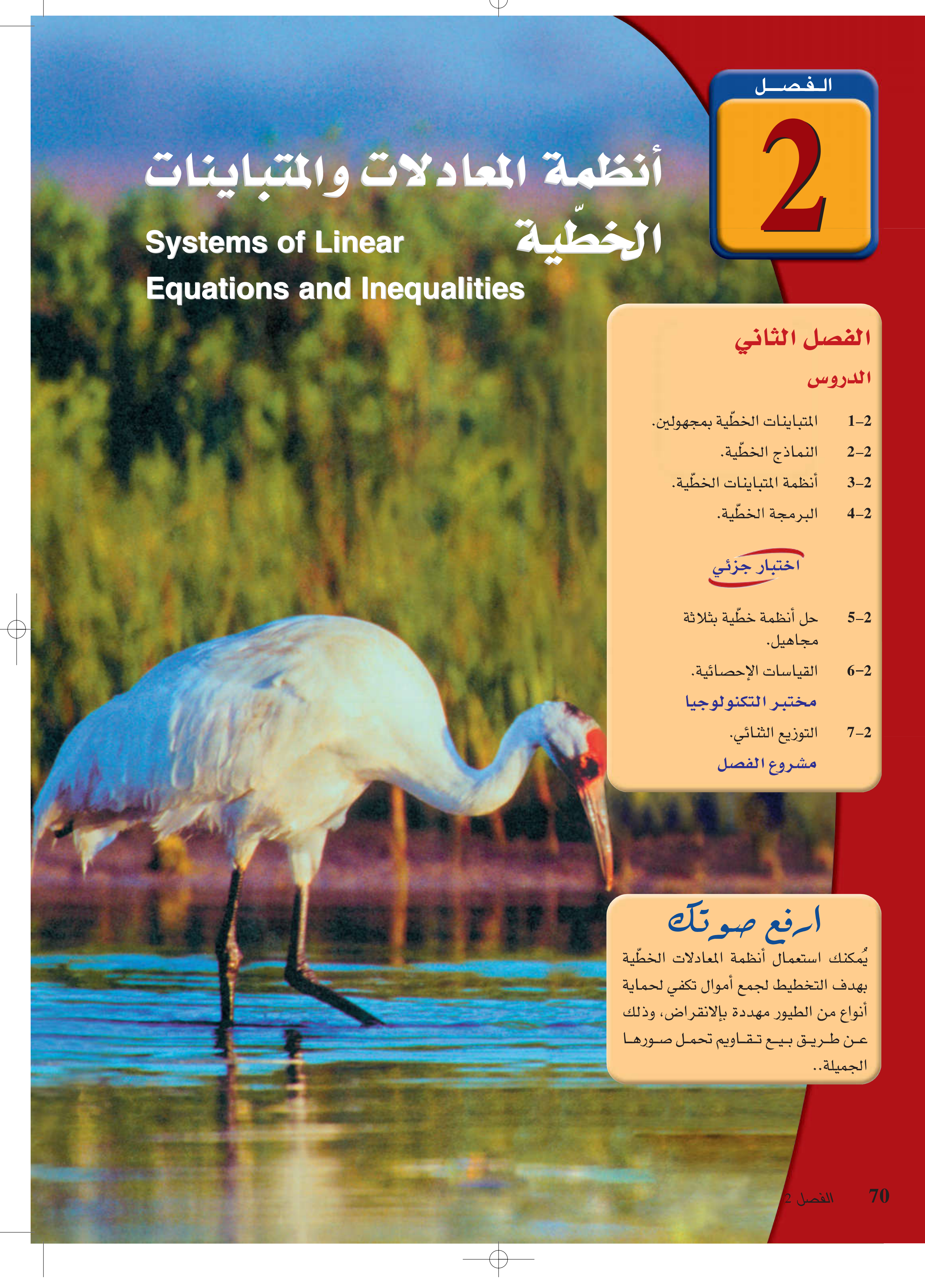
28 قرر نوزاد وسالار اللذان يسكنان معًا، ارتياد معلَم سياحي بصحبة ابن عمِّهما سامان. مضى نوزاد إلى المعلَم السياحي مباشرة، بينما مرَّ سالار بابن عمه ليصطحبه.

قطع سالار إلى منزل سامان 90 km باتجاه شمال-25° شرق ثم قطع مع ابن عمه مسافة 50 km باتجاه الشرق وصولاً إلى المعلَم السياحي

أ اكتب، بالمكوِّنين، المتَّجهين اللذين يمثّلان الرحلة من منزل نوزاد وسالار إلى منزل سامان، ومن منزل سامان إلى المعلَم السياحي.

ب ما ميل المتّجه الذي يمثّل رحلة سالار من منزله إلى المعلَم السياحي؟ وما طوله؟

ج غادر نوزاد وسالار منزلهما في الوقت نفسه ووصلا إلى المعلَم السياحي في الوقت نفسه. سار نوزاد بسرعة ثابتة بلغت 50 km/h. كم كانت سرعة سالار؟



الفصل

2

أنظمة المعادلات والمتباينات الخطّية

Systems of Linear Equations and Inequalities

الفصل الثاني

الدروس

ارفع صوتك

يُمكنك استعمال أنظمة المعادلات الخطّية بهدف التخطيط لجمع أموال تكفي لحماية أنواع من الطيور مهددة بالانقراض، وذلك عن طريق بيع تقاويم تحمل صورها الجميلة..

هل أنت مستعد؟

المُفْرَدات

اربط المفردة بتعريفها الوارد إلى اليسار.

1 المعادلة
2 المتباينة
3 مجموعة الحل
4 الميل
5 النقاط البيانية

أ معادلة بمجهولين تُشكِّل النقاط التي تُمثِّل حلولها خطًّا مستقيمًا.
ب انحدار مستقيم يُعرّف بأنه نسبة الارتفاع إلى التقدم.
ج كتابة مقدارين جبريين يربط بينهما أحد رموز التباين: $>$ ، $<$ ، $\leq$ ، $\geq$.
د كتابة مقدارين جبريين يربط بينهما رمز المساواة $=$.
هـ مجموعة قيم تُحقّق معادلة أو متباينة.
و مجموعة نقاط في المستوي الإحداثي تُمثل علاقة بين مجموعتي مُعطيات .

المضاعف المشترك الأصغر

جِد المضاعف المشترك الأصغر لكل زوج من الأعداد.

6 3 و 18
7 28 و 8
8 8 و 36
9 15 و 27

ميول المستقيمات المتوازية والمتعامدة

اذكر إن كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

10 $\begin{cases} y=5x-4 \\ y=-\frac{1}{5}x-4 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 5x-10y=3 \\ y=\frac{1}{2}x-6 \end{cases}$

12 $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=-4 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ 3y-x=5 \end{cases}$

حساب قيم المقادير الجبرية بالتعويض

احسب المقدار بتعويض كل متغيّر بقيمته.

14 $1.5x+3y$ ؛ $x=8$ ، $y=14$

15 $5x-\frac{3}{4}y$ ؛ $x=6$ ، $y=-4$

16 $4x-\sqrt{2}y$ ؛ $x=0.25$ ، $y=\sqrt{2}$

17 $-\frac{75x}{3y}$ ؛ $x=1$ ، $y=\frac{1}{3}$

حَلّ معادلات متعدِّدة الخطوات

حُلَّ كل معادلة.

18 $8x+19=-5$
19 $5x+4=25-2x$
20 $9x-(x+12)=-13$
21 $-3(4x-5)-1=20$

حل معادلات تتضمّن كسورًا

حُلّ كل معادلة.

22 $\frac{1}{4}x+\frac{2}{3}x=8$
23 $\frac{2}{5}x+\frac{1}{6}=-4$
24 $x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}$
25 $-\frac{1}{2}=3x-\frac{1}{3}x$

الفصل 2

دليل الدراسة : نظرة إلى الفصل

في الماضي

درست سابقًا

- مثّلتَ بيانيًّا الدوال الخطّية.
- قمت بحل المتباينات الخطّية بمجهول واحد بيانيًّا.
- قمت بحل الأنظمة الخطّية 2×2 .
- درست أجسامًا هندسية مثل المكعّب والمنشور.

في هذا الفصل

سوف تتعلّم

- حل متباينة خطّية بمجهولين بيانيًّا.
- حل نظام متباينات خطّية بيانيًّا.
- حل مسألة برمجة خطّية.
- حل نظام معادلات خطّية 3×3 .
- النماذج الخطّية لتمثيل مجموعات معطيات.
- القياسات الإحصائية لمجموعة معطيات.
- التوزيعات الإحصائية الثنائية.

في المستقبل

يُمكنك استعمال مهارات هذا الفصل

- لحل أنظمة معادلات أكثر تعقيدًا.
- لفهم النماذج الخطّية في المواد الأخرى، مثل الكيمياء والفيزياء والإقتصاد.
- لتخطيط عمليات في الحياة اليومية، مثل جمع الأموال أو القيام برحلة، أو ترشيد النفقات.

المفردات Vocabulary

المفردات	Vocabulary
الشرط	Constraint
الحذف	Elimination
منطقة الجدوى	Feasible region
البرمجة الخطّية	Linear programming
النظام الخطّي	Linear system
التعويض	Substitution
نظام المعادلات	System of equations
نظام المتباينات الخطّية	System of linear inequalities
الارتباط	Correlation
المستقيم الأفضل تمثيلاً	Line of best fit
الانحدار	Regrssion

نافذة على المفردات

لكي تألف بعض المفردات الواردة في هذا الفصل، تابع الخطوات التالية.

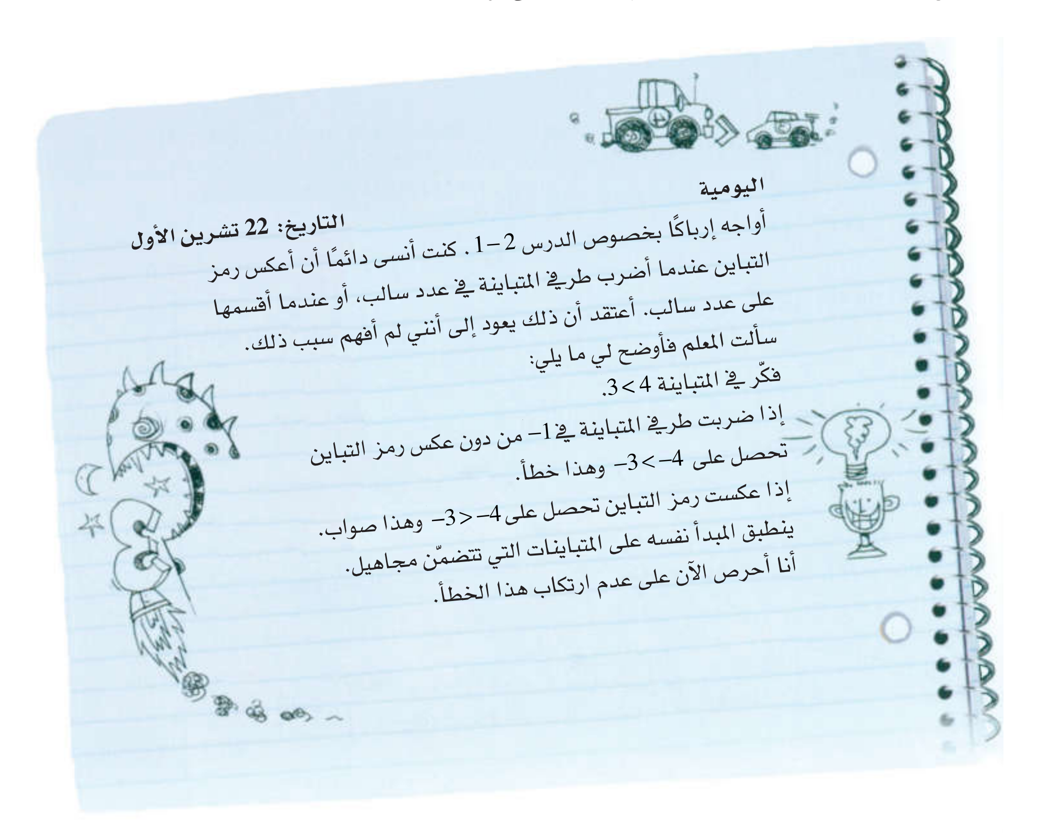
1. تعني كلمة انحدار العودة إلى الوراء. كيف تستعمل معنى هذه الكلمة لتفهم معنى **الانحدار** في الرياضيات؟
2. علام تدل كلمة **حذف** ؟ ما فاعلية عملية الحذف في حل المعادلات الرياضية؟
3. تُشير كلمة **شرط** إلى اقتصار أو تحديد. ما دور الشروط في الرياضيات؟ أوضح بإعطاء مثال.
4. تدل كلمة جدوى على الفائدة من شيء أو أمر ما. أعطِ أمثلة على جمل تتضمّن هذه الكلمة. بعد ذلك، ناقش ما تدل عليه **منطقة الجدوى**.



استراتيجية للدرس: كتابة يوميات الرياضيات

تُساعدك كتابة يوميات الرياضيات على تحسين مهارتَي الكتابة والاستدلال. فحين تعبِّر كتابيًّا في يومياتك، تكتشف موضوعات في الرياضيات لا تعرفها جيدًا، أو قد تراها غامضة. يُمكنك استعمال اليوميات لتعكس: ما تعلمته في حصة الرياضيات، نقاط الدرس التي تربكك، تلخيصًا للمفاهيم والمصطلحات، التعبير عن رأيك حول موضوع يتصل بالدرس. ولعل الأّهم في اليوميات الرياضية، هو أنها تعكس تقدّمك في تعلّم الرياضيات.

صفحة من يوميات طالب: اقرأ الصفحة المُبيّنة أدناه من يوميات طالب.



حاول

ابدأ بكتابة يوميات الرياضيات، استعمل الأفكار الواردة أدناه لكتابة يومياتك يومًا بعد يوم في هذا الأسبوع. تأكد من كتابة تاريخ كل صفحة ورقمها.

- ما كنت أعرفه عن درس اليوم: .....
- ما لست متأكدًا من فهمه في درس اليوم: .....
- لإنهاء درس اليوم، أحتاج إلى المهارات التالية: .....
- ماالصعوبات التي واجهتني؟ وكيف حاولت أن أتغلب عليها؟ .....
- ما الذي أعجبني في درس اليوم؟ وما الذي لم يُعجبني؟ .....

GRADE11-CHAPTER 2 -13-final 5/13/13 2:54 PM Page 7

1–2 المُتباينات الخطّيةبمجهولَين

Linear inqualities in two unknowns

الأهداف

يحل متباينة خطّية بمجهولين بيانيًّا.

يحل مسائل باستعمال المتباينات الخطّية بمجهولين.

المفردات

المتباينة الخطّية
Linear inequality

خط الحدود
Boundary line

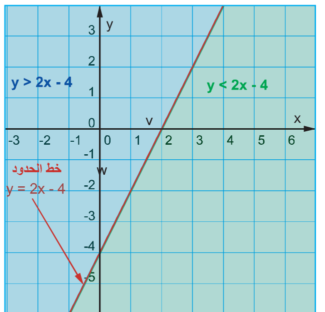
إضاءة

تذكَّر أن الخط الذي يقع تحت كل من $>$ وَ $<$ في الرمزين $\geq$ وَ $\leq$ يدل على أن خط الحدود خط متصل غير مُنقّط.

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل مديرو مراكز التسلية المتباينات الخطّية لتحديد عدد بطاقات الدخول من مختلف الأسعار التي عليهم بيعها لكي يُحقّقوا أرباحًا (المثال 3).

تُشكِّل الدوال الخطّية أساس المتباينات الخطّية بمجهولين. تُعبِّر **المتباينة الخطّية بمجهولين** **Linear inequality in two unknowns** عن علاقة بين متغيّرين تتضمّن رمزًا من رموز التباين مثل المتباينة $y > 2x - 4$. تتألف مجموعة الحل لمتباينة خطّية بمجهولين من جميع الأزواج المرتبة (x, y) التي تُحقق المتباينة. كما أن النقاط التي تُمثِّل مختلف حلول المتباينة تُشكِّل جزءًا من المستوى الإحداثي مُحدَّدًا بخط يقسم المستوى إلى جزءين.



فالمستقيم $y = 2x - 4$ ، على سبيل المثال، يقسم المستوى الإحداثي إلى قسمين كما هو ظاهر في الشكل المقابل. يُحقق إحداثيًا كل نقطة في أحد القسمين المتباينة $y > 2x - 4$ ، بينما يُحقّق إحداثيًا كل نقطة في القسم الآخر المتباينة $y < 2x - 4$. يُمثِّل القسم الأول بيانيًّا مجموعة الحل للمتباينة $y > 2x - 4$. إنّه **منطقة الحل** لهذه المتباينة. يُشكِّل المستقيم $y = 2x - 4$ خط الحدود لمنطقة الحل. ارسم خط الحدود مُنقّطًا للتعبير عن أن نقاطه لا تنتمي إلى منطقة الحل.

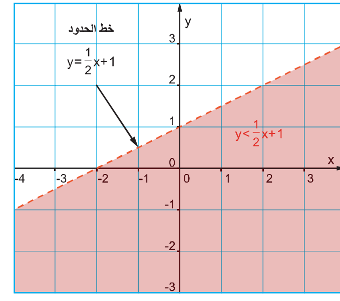
لحل المتباينة $y > 2x - 4$ ، ارسم خط الحدود مُنقّطًا وظلِّل المنطقة الواقعة فوقه.

مثـــال 1 حل المتباينات الخطّية بمجهولين بيانيًّا

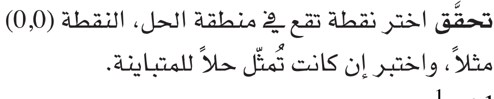
حُلّ بيانيًّا كل متباينة.

أ $y < \frac{1}{2}x + 1$.

خط الحدود هو المستقيم $y = \frac{1}{2}x + 1$ الذي ميله $\frac{1}{2}$ وتقاطعه العمودي 1.
ارسم خط الحدود مُنقّطًا، لأنه لا يُشكّل جزءًا من منطقة الحل. ظلِّل المنطقة الواقعة تحت خط الحدود.



تحقَّق اختر نقطة تقع في منطقة الحل، النقطة (0,0) مثلاً، واختبر إن كانت تُمثِّل حلاً للمتباينة.



$$y < \frac{1}{2}x + 1$$

$$0 \overset{?}{<} \frac{1}{2}0 + 1$$

$$0 \overset{?}{<} 1 \checkmark$$

بما أن نقطة الاختبار تُحقق المتباينة، فإنّ المنطقة المظللة هي منطقة الحل.

ب $y \geq 2$.

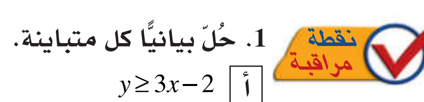
تذكّر أن المستقيم $y = 2$ مستقيم أفقي.

الخطوة 1 ارسم المستقيم باستعمال خط متصل لأن خط الحدود يُشكِّل جزءًا من منطقة الحل.

الخطوة 2 ظلِّل المنطقة الواقعة فوق خط الحدود لتبيان النقاط حيث $y > 2$.

تحقّق تنتمي النقطة $(0,4)$ إلى منطقة الحل لأن $4 \geq 2$.
لاحظ أن أي نقطة تقع على خط الحدود أو فوقه تُمثِّل حلاً للمتباينة، بغضّ النظر عن قيمة x.

نقطة مراقبة **1.** حُلّ بيانيًا كل متباينة.



أ $y \geq 3x - 2$ **ب** $y < -3$

إذا لم تكن معادلة خط الحدود مكتوبة على صورة الميل – التقاطع، يُمكنك اختيار نقطة اختبار لا تقع على خط الحدود لتحديد أي منطقة يجب تظليلها. إذا حقّق إحداثيًا النقطة المتباينة، ظلِّل المنطقة التي تقع فيها النقطة، وإلا فظلِّل المنطقة الأخرى.

مثـــال 2 حل المتباينات الخطّية بمجهولين بيانيًا باستعمال التقاطعات مع محورَي الإحداثيات.

حُلّ المتباينة $2x + 3y \geq 6$ باستعمال التقاطع مع كل من محورَي الإحداثيات.

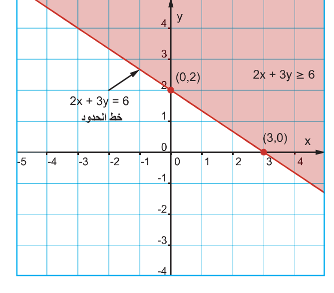
الخطوة 1 حدِّد التقاطعَين.

عوِّض عن x بالصفر، ثم عوِّض عن y بالصفر لإيجاد تقاطع خط الحدود مع كل من محورَي الإحداثيات.

التقاطع مع المحور الثاني (الرأسي)	التقاطع مع المحور الأول (الأفقي)
$2x + 3y = 6$	$2x + 3y = 6$
$2 \times 0 + 3y = 6$	$2x + 3 \times 0 = 6$
$3y = 6$	$2x = 6$
$y = 2$	$x = 3$

الخطوة 2 ارسم خط الحدود.

خط الحدود هو المستقيم الذي يمر في النقطتين $(0,2)$ وَ $(3,0)$. ارسم هذا المستقيم بخط متصل، لأنه جزء من منطقة الحل.



الخطوة 3 حدِّد المنطقة الواجب تظليلها.



اختبر إن كانت النقطة $(0,0)$ تنتمي إلى منطقة الحل. بما أن التباين $0 + 0 \geq 6$ خطأ، فإنّ النقطة لا تنتمي إلى منطقة الحل. عليك، إذًا تظليل المنطقة الواقعة فوق خط الحدود.

إضاءة

استعمل النقطة $(0,0)$ كنقطة اختبار إلا إذا كان خط الحدود يمر فيها. وفي هذه الحالة، اختر نقطة واضحة الموقع واختبرها (مثلا على أحد المحورين)

نقطة مراقبة **2.** حُلّ بيانيًا المتباينة $3x - 4y > 12$ باستعمال التقاطعين الأفقي والرأسي.



مثـــال 3 تطبيق تجاري



يبيع سيرك الشرق نوعين من بطاقات الدخول: بطاقة الكبار بسعر 8000 دينار وبطاقة الصغار بسعر 5000 دينار. ينفق مدير السيرك 240 000 دينار في كل حفلة. كم بطاقة دخول على المدير أن يبيع من كل نوع لتحقيق أرباح؟ باع المدير 20 بطاقة للصغار، كم عليه أن يبيع من بطاقات الكبار لكي يُحقّق ربحًا؟

1 افهمِ المسألة

يتألّف حل هذه المسألة من شقين: كتابة المتباينة التي تُشكّل حلولها إجابات عن السؤال الأول، وحل هذه المتباينة بيانيًّا، ثم تحديد عدد بطاقات الكبار الواجب بيعها، وقد بيع 20 بطاقة من بطاقات الصغار.

اكتب المعطيات المهمة:

- هناك نوعان من البطاقات: بطاقة الكبار بسعر 8000 دينار وبطاقة الصغار بسعر 5000 دينار.
- يجب ألاّ يقل ثمن البطاقات المبيعة عن 240 000 دينار.

2 خطِّطْ

استعمل x للدلالة على عدد بطاقات الكبار وَ y للدلالة على عدد بطاقات الصغار. اكتب متباينة لتمثيل المسألة.

المجموع		عدد بطاقات الصغار		سعر بطاقة الصغير		عدد بطاقات الكبار		سعر بطاقة الكبير
240 000	≥	y	×	5000	+	x	×	8000

يُمكن تمثيل المسألة بالمتباينة $8000x+5000y \geq 240\ 000$ ، أو $8x+5y \geq 240$.

3 حُلّ

حدّد تقاطعَي خط الحدود مع كل مع المحورَين.

$8 \times 0+5y=240$ $\quad$ $8x+5 \times 0=240$

$y=48$ $\quad$ $x=30$

ارسم خط الحدود وهو المستقيم المار في النقطتين $(0,48)$ وَ $(30,0)$. ظلّل المنطقة التي تتألّف من جميع النقاط التي تقع في الربع الأول وفوق خط الحدود، لأنّ عدد البطاقات غير سالب.



إذا كان عدد بطاقات الصغار المبيعة 20،

$8x+5 \times 20 \geq 240$ عوّض .

$8x+100 \geq 240$ بسّط

$8x \geq 140$ وبالتالي $x \geq 17,\overline{5}$ يجب أن يكون عدد البطاقات عدداً صحيحاً.



يجب ألاّ يقل عدد بطاقات الكبار المبيعة عن 18.

4 تحقّقْ

$18 \times 8000+20 \times 5000=244000$

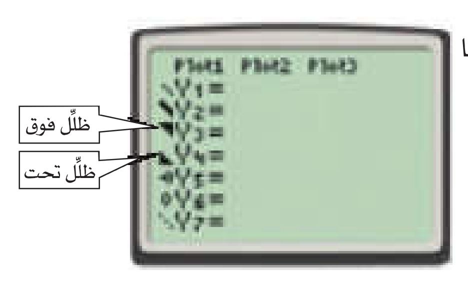
انتبـــه!

لا تنسَ ما يرمز إليه كل مجهول.



3. قرّر مدير المركز الثقافي تقديم نوعين من الهدايا لأعضائه. ثمن الهدية من النوع الأول 125 000 دينار، وثمنها من النوع الثاني 40 000 دينار . بين يديّ المدير 1 500 000 دينار، كم هدية من كل نوع يُمكنه أن يُقدّم؟ قدّم 4 هدايا من النوع الأول، كم سيقدّمُ من النوّعِ الثاني؟

يُمكنك استعمال الحاسبة البيانية لكي تحل بيانياً المتباينات الخطّية بمجهولين. اضغط على Y1 وتحرّك إلى أقصى اليسار باستعمال أزرار التحرك. كلما ضغطت على الزر ENTER ترى إلى أقصى اليسار نوعًا من أنواع الرسم كما هو مُبيّن في الصورة المقابلة.



مثال 4 حل المتباينات الخطّية بمجهولين بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية

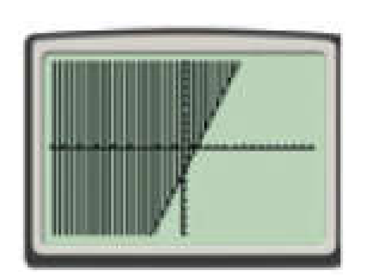
حُلّ المتباينة $\frac{2}{3}(2x-y)<2$ بالنسبة إلى y بدلالة x. حل بيانيًا المتباينة الناتجة.

$\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}(2x-y)<\frac{3}{2}\times 2$ اضرب كل طرف في $\frac{3}{2}$.

$2x-y<3$

$-y<-2x+3$ اطرح $2x$ من كل طرف.

$y>2x-3$ اضرب كل طرف في -1 . واقلب رمز التباين.



اضغط على Y1 وأدخل 2x - 3 . تحرّك إلى أقصى اليسار باستعمال مفاتيح التحرك. اضغط على المفتاح ENTER حتى يُصبح نوع الرسم الظاهر إلى أقصى اليسار ◥.
اضغط على GRAPH تحصل على الرسم المقابل.

إضاءة

تذكر أن ضرب متباينة في عدد سالب، أو قسمتها عليه، يقلب رمز التباين.



4. حُلّ بيانيًّا المتباينة $2(3x-4y)>24$ باستعمال الحاسبة البيانية.

فكِّرْ وناقش

1. قارن بين الدائرتين المُفرغة والمملوءة في حل المتباينات الخطّية بمجهول واحد بيانيًّا وبين خطَّي الحدود المنقّط والمتَّصل في حل المتباينات الخطّية بمجهولين بيانيًّا.
2. صِف منطقة الحل للمتباينة $x\geq 4$.
3. أوضح إن كنت تستطيع أن تستعمل النقطة $(0, 0)$ كنقطة اختبار لتحديد المنطقة الواجب تظليلها عند حل المتباينة $3x+5y\leq 0$.
4. **كن منظّمًا** انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. اكتب في كل إطار مثالاً على متباينتين تتمتع منطقة حلّها بالوصف الوارد في أعلى العمود: الأولى على صورة ...□y ، حيث □ رمز من رموز المقارنة، والثانية على صورة مختلفة.



خط حدود منقط التظليل فوق الخط	خط حدود منقط التظليل تحت الخط	خط حدود متصل التظليل فوق الخط	خط حدود متصل التظليل تحت الخط

1-2 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** أوضح كيف يُمكن للمستقيم $y = 3x - 4$ أن يكون خط حدود.

انظر المثال 1

حُلّ بيانيًا كل متباينة.

2 $y > -4$ **3** $y \leq 2$ **4** $y \geq x - 3$ **5** $y < -\frac{1}{3}x + 2$

انظر المثال 2

حُلّ كل متباينة باستعمال التقاطعين الأفقي والرأسي.

6 $3x + 2y > 12$ **7** $5x - 2y \leq 20$ **8** $-4x + 5y < -20$

انظر المثال 3

9 **استهلاك** ذهبت ميان، ومعها 000 17 دينار، لشراء نوعَين من مغلَّفات القهوة السريعة التحضير. مغلَّف النوع الأول حبيباته مجمعّة وثمنه 2290 دينارًا ومغلَّف النوع الثاني حبيباته ناعمة وثمنه 3750 دينارًا.

ارمز بالمجهول x إلى عدد مغلَّفات النوع الأول، وبالمجهول y إلى عدد مغلَّفات النوع الثاني.

أ اكتب متباينة لتمثيل المسألة، وحلّها بيانيًّا لتحديد عدد المغلَّفات التي يُمكن لميان أن تشتريها من كل نوع.

ب كم مغلّفًا من النوع الأول يُمكنها أن تشتري علمًا بأنها اشترت 3 مغلَّفات من النوع الثاني؟

10 **مدارس** يقوم طلاب الصف الحادي عشر ببيع نوعين من الأعمال الفنية لجمع مبلغ لا يقل عن 000 280 دينار. يؤمِّن العمل الواحد من النوع الأول ربحًا مقداره 1750 دينارًا بينما يؤمِّن العمل الواحد من النوع الثاني ربحًا مقداره 1250 دينارًا. ارمز بالمجهول x إلى عدد أعمال النوع الأول وبالمجهول y إلى عدد أعمال النوع الثاني.

أ اكتب متباينة لتمثيل المسألة وحُلَّها بيانيًّا لتحديد عدد الأعمال التي ينبغي للطلاب بيعها من كل نوع.

ب باع الطلاب 100 عمل من النوع الثاني وَ 50 عملاً من النوع الأول. هل حقَّق الطلاب هدفهم؟

انظر المثال 4

حلّ كلّ متباينة بالنسبة إلى y ثم حلّها بيانيًا.

11 $\frac{1}{2}(6x - 2y) \geq 4$ **12** $-\frac{3}{5}x + y \geq 2$ **13** $3(3x - y) > -12$

تمارين وحلُّ مسائل

حُلّ بيانيًّا كل متباينة.

14 $y \geq 6$ **15** $y < x + 4$ **16** $y > -\frac{2}{5}x - 3$

حُلّ كل متباينة باستعمال التقاطعَين الأفقي والرأسي.

17 $4x + 2y \geq 8$ **18** $3x - 6y < 12$

تمارين حرّة

لحل التمارين	أنظر المثال
16-14	1
18-17	2
21-19	3
24-22	4

19 **تسويق** كلفة الإعلان في الصحيفة المحلية 000 20 دينار في اليوم، وكلفته في الإذاعة المحلية 000 50 دينار عن كل دقيقة. كانت الميزانية المخصصة للإعلان في إحدى المؤسسات مليون دينار. ارمز بالمجهول x إلى عدد أيام الإعلان في الصحيفة، وبالمجهول y إلى عدد دقائق الإعلان في الإذاعة. اكتب متباينة خطّية لتمثيل المسألة، ثم حل المتباينة بيانيًّا.

20 **فلك** يحتاج الصاروخ الذي يحمل مسبارًا إلى المريخ إلى أوكسجين ليتحرر من نطاق الجاذبية. افترض أن المسبار يولّد 0.78L من الأوكسجين لكل كيلو غرام واحد من الماء، وَ 0.32L من الأوكسجين لكل كيلو غرام واحد من ثاني أوكسيد الكربون. يحتاج المسبار على الأقلّ إلى $56L$ من الأوكسجين. ارمز بالمجهول x إلى عدد كيلوغرامات الماء المتوافرة، وبالمجهول y إلى عدد الكيلوغرامات المتوافرة من ثاني أوكسيد الكربون.

أ اكتب متباينة خطّية لتمثيل المسألة، وحُلّ المتباينة بيانيًّا.

ب جمّع المسبار $36kg$ من الماء وَ $88kg$ من ثاني أوكسيد الكربون. هل يُمكن للرحلة أن تتم؟



21 **خلويّ** يبيع مريون نوعينٌ من بطاقاتِ الهاتفِ الخلويّ، بطاقة بِـ 8000 دينار وبطاقة بِـ 000 12 دينار. لديه من البطاقات ما قيمته 000 200 دينار. ارمز بِـ x إلى عدد بطاقات النّوع الأول وبِـ y لعدد بطاقات النّوع الثّاني.

أ اكتب متباينة خطّية لتمثيل المسألة، ثم حُلّ المتباينة بيانيًّا

ب باع مريون 10 بطاقات من فئة 8000 دينار، كم بطاقةً يمكنه أن يبيع من النوع الآخر؟

حُلّ كل متباينة بالنسبة إلى y، ثم حلَّها بيانيًا.

22 $-4y<4(3x-5)$ **23** $-3(-10x+2y)\geq 24$ **24** $-\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y\leq -1$

حُلّ بيانيًا كل متباينة.

25 $-4y>10x-20$ **26** $y-5\geq 4(x-2)$ **27** $6x+3y<0$

28 $y+\frac{3}{4}\leq\frac{5}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ **29** $\frac{9-3y}{2}\geq 6x$ **30** $x\leq 4$

31 $4x-5y<7x-3y$ **32** $2x-5y\leq -4x+15$ **33** $x>-2$



34 **مدارس** يُنظّم نادي الرياضيات في ثانوية الفرات حفلة غنائية لجمع مبلغ لا يقل عن 000 600 دينار لشراء طابعة خاصة بالنادي. قرر رئيس النادي أن يكون ثمن بطاقة الدخول 5000 دينار إذا تم شراؤها قبل يوم الحفلة، وَ 6000 دينار إذا تم شراؤها عند الباب.

أ ارمز بالمجهول x إلى عدد البطاقات المبيعة قبل يوم الحفلة، وبالمجهول y إلى عدد البطاقات المبيعة عند الباب. اكتب متباينة خطّية لتمثيل المسألة، ثم حُلّ هذه المتباينة بيانيًّا.

ب كان عدد البطاقات التي بيعت قبل الحفلة 30 بطاقة. كم بطاقة يجب بيعها عند الباب لكي يبلغ النادي هدفه؟

35 **جمع أموال** قام طلاب الصف الحادي عشر ببيع فطائر بيتزا وعبوات مرطّبات خلال مباراة كرة السلة كي يجمعوا مبلغًا لا يقل عن 000 150 دينار لشراء هدية يقدّمونها إلى معلّم الرياضيات بمناسبة انتهاء العام الدراسي. يربح الطلاب 1250دينارًا من بيع كل فطيرة بيتزا وَ 500 دينار من بيع كل عبوة مرطبات. ارمز بالمجهول x إلى عدد فطائر البيتزا، وبالمجهول y إلى عدد عبوات المرطبات.

أ اكتب متباينة خطّية لتمثيل المسألة.

ب باع الطلاب 75 فطيرة بيتزا وَ 150 عبوة مرطبات. هل سيتمكّنون من شراء الهدية؟

36 **تفكير ناقد** ثمن بطاقة الدخول إلى حديقة الحيوانات 5000 دينار للكبار و 2000 دينار للصغار. زادت قيمة البطاقات المبيعة في أحد أيام الأسبوع على 000 300 دينار. كتب كل من دلشاد و كاوه متباينة خطّية لتمثيل المسألة وحلّها بيانيًّا. رمز دلشاد بالمجهول x إلى عدد بطاقات الكبار، بينما رمز كاوه بالمجهول x إلى عدد بطاقات الصغار. فيمَ اختلف الرسمان البيانيان اللذان أنشأ من قبل الطالبَين؟ هل أخطأ أحدهما؟ إذا أجبت بنعم فمن هو؟

37 كانت إحدى السفن على مسافة 500 ميل بحري من الميناء. انطلقت السفينة نحو الميناء بسرعة لا تزيد على 27 عقدة (أو ميل بحري في الساعة، الميل البحري 1852 مترًا).

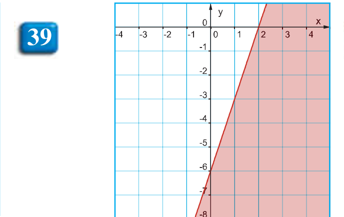
أ كم من الزمن يستغرق وصول السفينة إلى الميناء؟

ب أنشئ رسمًا بيانيًّا يُظهر تغيّر المسافة بين السفينة والميناء بمرور الزمن. ماذا تُمثّل النقاط الواقعة فوق خط الحدود؟

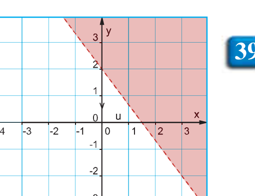
ج **ماذا لو...؟** افترض أن سرعة السفينة لم تقل عن 10 عقدٍ خلال الرحلة. كم يكون بعد السفينة عن الميناء بعد 12 ساعة من انطلاقها؟

اكتب متباينة خطّية بمجهولين بحيث يُمثل الرسم البياني حلّها.

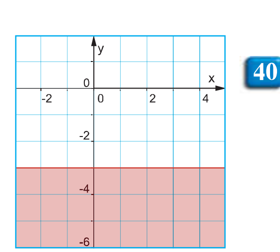
38



39



40



41 **تفكير ناقد** قارن بين الحل البياني للمتباينة $30y < 90 + x$ والحل البياني للمتباينة $30y + x < 90$. بمَ يتشابهان وبِمَ يختلفان؟

42 **اقتصاد منزلي** يستعمل دلسوز اللوز والزبيب لتحضير خليط غني بالألياف، يحتوي كل غرام من اللوز على $0.115g$ من الألياف، وكل غرام من الزبيب على $0.095g$ منها. يرغب دلسوز في أن يحتوي الخليط على 5g من الألياف على الأقل.



أ ارمز بالمجهول x إلى عدد غرامات اللوز، وبالمجهول y إلى عدد غرامات الزبيب. اكتب متباينة خطّية لتمثيل المسألة، ثم حُلّ المتباينة بيانيًّا.

ب استعمل دلسوز $15g$ من اللوز. كم غرامًا من الزبيب عليه أن يستعمل لكي يُحقق هدفه؟

ج **ماذا لو...؟** افترض أن دلسوز استعمل $60g$ من اللوز. ماذا ينتج من ذلك حول قيمة y في المتباينة؟ ما معنى ذلك في المسألة المطروحة؟

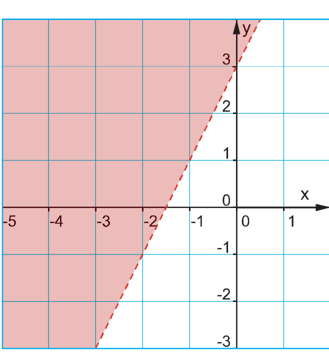
43 يُنظّم نادي الصداقة حفل العشاء السنوي في قاعة الاحتفالات، بوضع طاولات مستديرة وأخرى مستطيلة. مع إمكانية وضع 8 مقاعد حول كل طاولة مستديرة، وَ 6 مقاعد حول كل طاولة مستطيلة. ارمز بالمجهول x إلى عدد الطاولات المستديرة، وبالمجهول y إلى عدد الطاولات المستطيلة.

أ اكتب متباينة خطّية لتمثيل المسألة، إذا كان عدد المقاعد المطلوبة لا يقل عن 220 مقعدًا، ثم حُلّ هذه المتباينة بيانيًّا.

ب تقتضي تدابير السلامة ألاّ يزيد عدد المقاعد على 300 مقعد. اكتب متباينة لتمثيل هذا الشرط، ثم حُلّ المتباينة بيانيًّا.

ج قارن بين الرسمَيْن البيانيَّين. بِمَ يختلفان؟





44 أي متباينة تتمثّل بالرسم البياني المقابل؟

أ $y<2x+3$ ج $y\geq 2x+3$

ب $4x-2y<-6$ د $4x+2y>6$

45 أي نقطة لا تنتمي إلى منطقة حلّ المتباينة $5x-3y<30$؟

أ $(0,0)$ ج $(-5,3)$

ب $(3,-5)$ د $(-3,5)$

46 أي متباينة تُكافئ المتباينة $7x-3y\geq 4$ (أي إن لهما منطقة الحل نفسها)؟

أ $y\leq \frac{7}{3}x-\frac{4}{3}$ ج $y\geq -\frac{7}{3}x-\frac{4}{3}$

ب $y\leq -\frac{7}{3}x+\frac{4}{3}$ د $y\geq \frac{7}{3}x+\frac{4}{3}$

47 أي نقطتين تُمثّلان التقاطعين الأفقي والرأسي لخط حدود المتباينة $y\leq 3x-9$؟

أ $(0,9)$ وَ $(3,0)$ ج $(0,9)$ وَ $(-3,0)$

ب $(0,3)$ وَ $(-9,0)$ د $(0,-9)$ وَ $(3,0)$

48 تتيح قطعة نقود الـ 250 دينارًا ركن السيارة 8 دقائق في موقف السيارات، بينما تتيح قطعة الـ 500 دينار ركن السيارة 20 دقيقة. المدة القصوى لركن السيارة في الموقف 3 ساعات. عندما ركن شوان سيارته وجد أنّ عداد الموقف يمنحه 37 دقيقة مجانية.أيّ قطع نقدية عليه استعمالها لركن سيارته 3 ساعات؟

أ 3 قطع 250 دينارًا وَ 9 قطع 500 دينار.

ب 13 قطعة 250 دينارًا وَ قطعتا 500 دينار.

ج 8 قطع 250 دينارًا وَ 4 قطع 500 دينار.

د 5 قطع 250 دينارًا وَ 5 قطع 500 دينار.

49 **جواب مختصر** صف حالة تتضمّن متباينات خطّية تكون فيها القيم السالبة للمجهول x أو المجهول y ذات معنى.

تحدٍّ وتوسّع

حُلّ بيانيًا كلّ متباينة.

50 $4(4x-3y)<5(2+3x)-10$

51 $\frac{4+3y-2x}{6}\geq\frac{3x-2-3y}{-4}$

52 **ماذا لو...** افترض أنَّك حين قمت بحل متباينة خطّية باستعمال الحاسبة البيانية، حصلت على شاشة مظّللة بالكامل، علامَ يدل ذلك حول المتباينة؟ ماذا تفعل لتبيان منطقة الحل؟

53 تُظهر الصورة المقابلة شاشة الحاسبة البيانية بعد إنشاء بيان المستقيم $y=500(x-1)$ باستعمال نافذة Zdecimal.

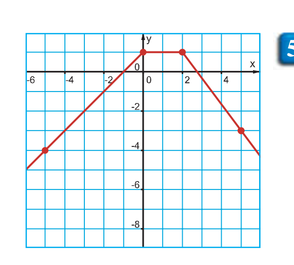
أ هل المستقيم عموديّ حقًّا؟ وضّح ذلك.

ب أي ناحية من المستقيم تُظلّل لكي تحل بيانيًّا المتباينة $y\leq 500(x-1)$. برّر جوابك.

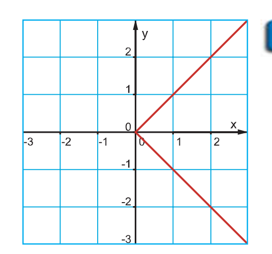
مراجعة لولبية

استعمل اختبار المستقيم العمودي لتقرّر إن كان البيان يُمثّل دالّة. (الصفوف السابقة)

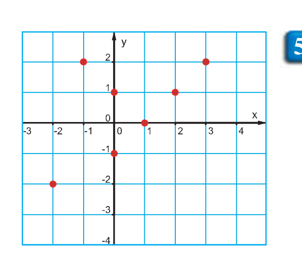
54



55



56



اكتب إحداثيي صورة النقطة $(-4,3)$ بكل من التحويلات التالية:

57 سحب أفقي وحدة واحدة إلى اليسار.

58 انعكاس حول المحور الثاني.

59 سحب عمودي 3 وحدات إلى أعلى.

60 $(x+7,y-5)$

اكتب، على صورة الميل - التقاطع، معادلة المستقيم الذي يمر في النقطة $(1,-7)$ والذي:

61 يمرّ في النقطة $(1,3)$

62 يوازي المستقيم $y=\frac{1}{2}x-5$

63 يبلغ ميله 0.25

64 يتعامد مع المستقيم $3x-y=-4$



2-2 النماذج الخطّية

Linear models



الأهداف

يجد نموذجًا خطيًّا لتمثيل معطيات باستعمال التكنولوجيا ومن دون استعمالها.

يستعمل النماذج الخطّيّة لإجراء توقّعات.

المفردات
Vocabulary

الانحدار
Regression

الارتباط
Correlation

المستقيم الأفضل تمثيلاً
Line of best fit

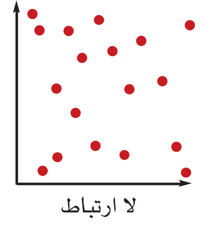
معامل الارتباط
Correlation coefficient

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل عالم الأجناس البشرية النماذج الخطّيّة لتقدير أطوال أفراد الشعوب القديمة، انطلاقًا من الهياكل العظمية التي يجدها.

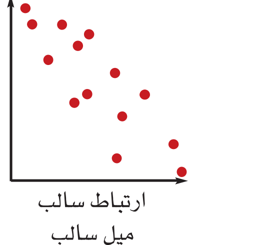
غالبًا ما يهتم العلماء، كعلماء الأجناس البشرية، بالعلاقات التي تربط بين نوعين من القياسات. يُطلق الإحصائيون اسم **الانحدار Regression** على الدراسة الإحصائية للعلاقات بين المتغيّرات.

تُستعمل **النقاط البيانية Scatter plot** في محاولة لفهم شكل العلاقة بين متغيّرين واتجاهها ومدى قوتها. **الارتباط Correlation** هو قوة العلاقة الخطّيّة بين متغيّرين واتجاهها.



لا ارتباط





ارتباط سالب
ميل سالب

ارتباط موجب
ميل موجب

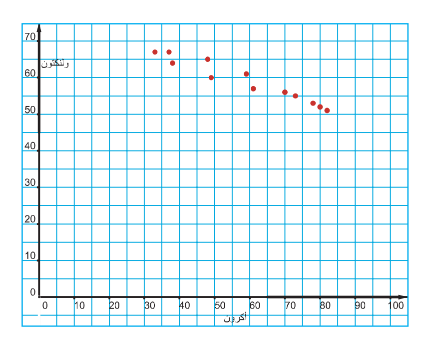
إذا ارتبط متغيّران بعلاقة خطّيّة قوية، يُمكن استعمال **المستقيم الأفضل تمثيلاً Line of best fit** لإجراء توقُّعات.

مثال 1 تطبيق على الأحوال الجوية

تقع مدينة أكرون في أمريكا ومدينة ولنكتون في نيوزيلاندا على المسافة نفسها من خط الاستواء: الأولى في النصف الشمالي للكرة الأرضية، والثانية في نصفها الجنوبي. يحتوي الجدول أدناه على متوسطات درجات الحرارة في كل من المدينتين خلال 12 شهرًا. أنشئ نقاطًا بيانية لتمثيل معطيات الجدول. ابحث عن الارتباط بين مجموعتَي المعطيات. أنشئ المستقيم الأفضل تمثيلاً وجِد معادلته.

متوسِّطات الدرجات العليا للحرارة (على سلم فهرنهايت)												
الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
أكرون	33	37	48	59	70	78	82	80	73	61	49	38
ولنكتون	67	67	65	61	56	53	51	52	55	57	60	64

الخطوة 1 مثِّل معطيات الجدول بنقاط بيانية.

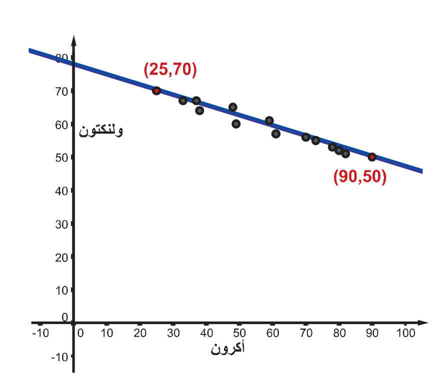


الخطوة 2 ابحث عن الارتباط .

لاحظ وجود ترابط سالب بين مجموعتَي المعطيات: عندما ترتفع درجة الحرارة في أكرون، تنخفض في ولنكتون.

الخطوة 3 أنشئ المستقيم الأفضل تمثيلاً.

ارسم مستقيمًا يقسم النقاط بالتساوي فوقه وتحته.



الخطوة 4 جِد نقطتين تقعان على هذا المستقيم.

يُمكنك اختيار النقطتين (25 ،70) وَ(90 ،50).

الخطوة 5 جِد مَيل المستقيم.

$$m=\frac{70-50}{25-90}=\frac{20}{-65}\approx -0.31$$

استعمل صورة المَيل – النقطة.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-70=-0.31(x-25)$$
$$y=-0.31x+77.7$$

معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً هي $y=-0.31x+77.7$.

إضاءة

حاول أن يكون عدد النقاط فوق المستقيم الأفضل تمثيلاً مساويًا لعددها تحت هذا المستقيم.



1. **كرة سلّة** أنشئ نقاطًا بيانية لتمثيل معطيات الجدول. ابحث عن الترابط بين مجموعتَي المعطيات، أنشئ المستقيم الأكثر تمثيلاً وجِد معادلته.

نتائج عشر مباريات										
المدة (m)	28	35	8	20	39	23	19	27	15	30
النقاط	16	13	2	12	31	10	9	15	4	19

معامل الارتباط Correlation coefficient هو عدد r يقيس مدى دقة تمثيل نموذج خطّي لمجموعة معطيات.



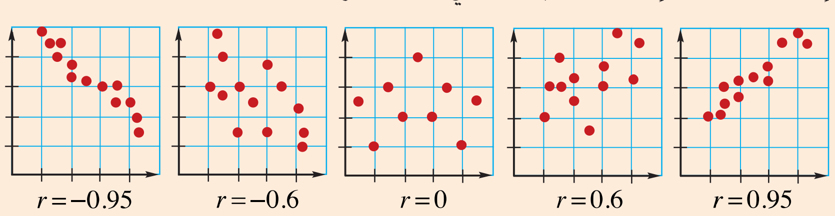
خصائص معامل الترابط

معامل الارتباط عدد ينتمي إلى الفترة $[-1، 1]$ أي إنه يُحقّق $-1\le r\le 1$.

إذا كان $r=1$ ، فإنّ النقاط البيانيّة التي تمثِّل مجموعة المعطيات تشكِّل مستقيمًا موجب الميل.

إذا كان $r=0$ ، فلا ترابط بين المتغيّرين.

إذا كان $r=-1$ ، فإنّ النقاط البيانيّة التي تمثِّل مجموعة المعطيات تشكِّل مستقيمًا سالب الميل.



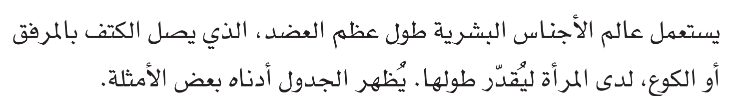
$r=-0.95$ $r=-0.6$ $r=0$ $r=0.6$ $r=0.95$

انتبـه!

لا تخلط بين الميل وقيمة r.
يُمكن لميل المستقيم أن يكون 10 أو $\frac{1}{10}$ وأن يكون $r=1$. غير أنّ للميل وقيمة r الإشارة نفسها.

يُمكنك استعمال الحاسبة البيانيّة لإيجاد معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً وإيجاد معامل الارتباط. لكي تحصل على معامل الارتباط، عليك أن تضع الحاسبة في وضعية التشخيص. للوصول إلى هذه الوضعية، اضغط 2nd ثم CATALOG 0 واختر **DiagnosticOn**

مثـــال 2 تطبيق على علم الأجناس البشرية



يستعمل عالم الأجناس البشرية طول عظم العضد، الذي يصل الكتف بالمرفق أو الكوع، لدى المرأة ليُقدّر طولها. يُظهر الجدول أدناه بعض الأمثلة.



طول عظم العضد لدى المرأة								
طول عظم العضد (cm)	35	27	30	33	25	39	27	31
طول المرأة (cm)	167	146	154	165	140	180	149	155

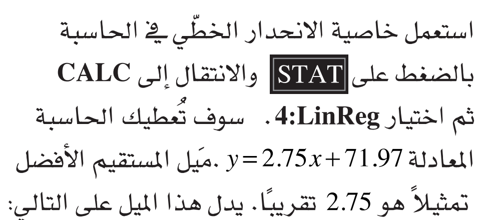
أ **أنشئ نقاطًا بيانيّة لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً طول عظم العضد كمتغيّر حر.**

يُبيّن الشكل المقابل النقاط البيانيّة التي تمثِّل معطيات الجدول.

ب **جِد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. علامَ يدل مَيل هذا المستقيم وفق مُعطيات المسألة؟**

استعمل حاسبة بيانية وأدخل معطيات طول عظم العضد في اللائحة $L1$، ثم معطيات طول المرأة في اللائحة $L2$.





استعمل خاصية الانحدار الخطّي في الحاسبة بالضغط على STAT والانتقال إلى **CALC** ثم اختيار **4:LinReg**. سوف تُعطيك الحاسبة المعادلة $y = 2.75x + 71.97$. مَيل المستقيم الأفضل تمثيلاً هو 2.75 تقريبًا. يدل هذا الميل على التالي: كل زيادة قدرها $1cm$ من طول عظمة العضد يقابلها $2.75cm$ في طول المرأة. تُعطيك الحاسبة أيضًا معامل الارتباط، وهو $r = 0.991$ تقريبًا، مما يدل على ترابط موجب قوي.

إضـــاءة

لإدخال المعطيات في الحاسبة البيانية، اضغط على المفتاح Stat واختر 1:Edit. أدخل قيم x في العمود $L1$ وقيم y في العمود $L2$.

ج **في إحدى المقابر الجماعية للأكراد المؤنفلين العراقيين وجد عالم الأجناس البشرية عظم عضد طوله $32cm$. كم تُقدّر طول صاحبته؟** تسمح معادلة المستقيم الأكثر تمثيلاً بتقدير طول صاحبة العظم.

$$y = 2.75x + 71.97$$
$$y = 2.75 \times 32 + 71.97$$
$$y = 159.97$$

طول تلك المرأة هو $160cm$ تقريبًا.



2. في الجدول معطياتٌ عن سيّارات مختارة عشوائيًا، تعمل على الغاز. يُبيّن الجدولُ قوّة كلِّ سيّارة (بالأحصنة) والمسافةَ التي تجتازها بكل لترٍ من الغاز.

قوة السيارات وما تقطعه بكل لتر										
القوة	175	255	140	165	115	120	190	180	110	125
المسافة بكل لتر (km/l)	3.61	2.13	4.1	2.95	5.25	4.6	2.46	3.45	5.75	4.92

أ أنشئ نقاطًا بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً الاستهلاك كمتغيّر حر.

ب جِد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. علامَ يدل هذا المستقيم؟

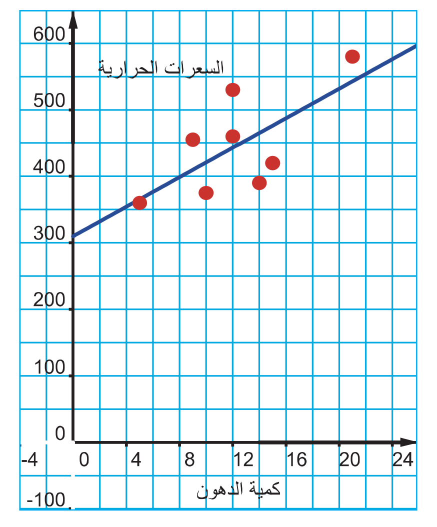
ج سيّارة قوّة محركها 210 أحصنة، قدّر ما تجتازه بكل لتر.

مثـــــال 3 تطبيق غذائي

يُظهر الجدول أدناه معطيات عن كمية الدهون في نوع من الشطائر وقيمتها الحرارية.

معطيات غذائية لبعض أنواع الشطائر								
كمية الدهون (g)	5	9	12	15	12	10	21	14
القيمة الحرارية (بالسعرات)	360	455	460	420	530	375	580	390

أ أنشئ نقاطًا بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً كمية الدهون كمتغيّر حر.



ب جد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. ارسم هذا المستقيم.

معامل الارتباط هو $r = 0.682$ تقريبًا.

معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً هي:

$y = 11.1x + 309.8$ المتغيّر التابع هو عدد السعرات الحرارية.

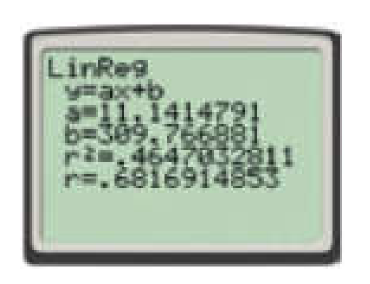
إضـاءة
يُسمّى المستقيم الأفضل تمثيلاً، في بعض الأحيان، **خط التوجّه**.

ج قدّر كمية الدهون في شطيرة قيمتها الحرارية 500 سعرة. ما دقة تقديرك؟

$500 = 11.1x + 309.8$

$11.1x + 190.2$

$x \approx 17.1$



يُفيدنا المستقيم الأفضل تمثيلاً بأن كمية الدهون في شطيرة قيمتها الحرارية 500 سعرة حرارية هي 17.1g تقريبًا. غير أن النقاط البيانية وقيمة معامل الارتباط تبيّنان أنّ كمية الدهون ليست مؤشرًا جيدًا على عدد السعرات الحرارية في هذا النوع من الشطائر.



3. **ماذا لو...؟** استعمل معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً لتقدير كمية الدهون في شطيرة قيمتها الحرارية 420 سعرة. كم تبعد القيمة التي حصلت عليها عن القيمة التي تُقابل 420 سعرة في الجدول؟

فكِّرْ وناقش

1. أوضح إن كان معامل الارتباط بين متغيّرين موجبًا أو سالبًا، علمًا بأنّ معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً هي $y=3.2x-12.5$.

2. أوضح التالي: أي من معاملَي الارتباط $r=0.65$ ؛ $r=-0.75$ يدل على ارتباط أقوى بين متغيّرين؟ برّر جوابك.

3. **كن منظّمًا** انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. أنشئ نقاطًا بيانيّة لكل نوع من الارتباط وقدّر قيمة معامل الارتباط r.



الارتباط	النقاط البيانية	القيمة المُقدّرة لمعامل الارتباط
قوي موجب		
ضعيف موجب		
لا وجود له		
ضعيف سالب		
قوي سالب		

2-2 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** أوضح دلالة كل معامل ارتباط بين مجموعتَي معطيات.

أ $r=0.4$ ب $r=-0.96$ ج $r=-0.02$

انظر المثال 1

2 **سيارات** أنشئ نقاطًا بيانيّة لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً عدد الغالونات كمتغيّر حر. صف الارتباط بين المتغيّرين.

المسافة المقطوعة							
عدد الغالونات	11.2	9.8	10.6	10.1	12.3	8.7	10.1
المسافة المقطوعة (km)	338	296	332	324	368	263	305

انظر المثال 2

3 **اقتصاد منزلي** يُبيّن الجدول أدناه معطيات عن متوسط درجة الحرارة خلال سبعة أشهر، وعن قيمة فاتورة التبريد في منزل جواد.

فاتورة التبريد في منزل جواد							
متوسط درجة الحرارة	38	42	44	36	42	49	38
الفاتورة	93 000	79 000	75 000	83 000	74 000	67 000	86 000

أ أنشئ نقاطًا بيانيّة لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً متوسط درجة الحرارة كمتغيّر حر.

ب جِد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. ارسم هذا المستقيم.

ج قدّر فاتورة التبريد لشهر متوسط درجة الحرارة فيه 40 درجة. ما دقة هذا التقدير؟

انظر المثال 3

4 **مدارس** يُبيّن الجدول معطيات عن عدد المعلمين وعدد الطلاب في عيّنة عشوائية من المدارس.

عدد المعلمين وعدد الطلاب								
عدد المعلمين	92	52	114	49	110	62	76	84
عدد الطلاب	1050	653	753	381	1312	813	496	910

أ أنشئ نقاطًا بيانيّة لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً عدد المعلمين كمتغيّر حر.

ب جِد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. ارسم هذا المستقيم.

ج قدّر عدد المعلمين في مدرسة تضم 600 طالب. ما دقة هذا التقدير؟

تمــارين وحلُّ مســائـل

تمارين حرّة	
لحل التمارين	أنظر المثال
5	1
6	2
7	3

5 **كيمياء** أنشئ نقاطًا بيانيّة لتمثيل معطيات الجدول أدناه مستعملاً العدد الذري كمتغيّر حر. صف الارتباط بين المتغيّرين.

بعض العناصر الكيميائية														
العدد الذرّيّ	89	13	95	51	18	33	85	56	97	4	83	107	5	35
الكتلة الذرّية	227	27	243	122	40	75	210	137	247	9	209	264	11	80

6 **أحياء** يزيد معدَّل ضربات الجناح عند الطائر الطنّان على معدَّلها عند غيره من الطيور. يُبيّن الجدول أدناه معطيات عن هذه المعدلات وعن الكتل عند عدد من طيور هذا النوع.

ضربات جناح الطائر الطنان							
الكتلة (g)	3.1	2.0	3.2	4.0	3.7	1.9	4.5
معدل الضربات (بالثانية)	60	85	50	45	55	90	40

أ أنشئ نقاطًا بيانيّة لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً الكتلة كمتغيّر حر.

ب جِد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. ارسم هذا المستقيم.

ج قدّر معدل ضربات طير من هذا النوع كتلته 19g . ما دقة هذا التقدير؟

7 **تسعير البطاقات** دوَّن مدير إحدى الفرق الموسيقية أسعار بطاقات الدخول إلى حفلات الفرقة وعدد الحضور.

الحضور وفقًا لأسعار بطاقات الدخول									
السعر	6000	5000	8500	8000	10000	5500	7000	7500	8000
الحضور	213	256	155	194	160	267	258	210	235

أ أنشئ نقاطًا بيانيّة لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً السعر كمتغيّر حر.

ب جِد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. ارسم هذا المستقيم.

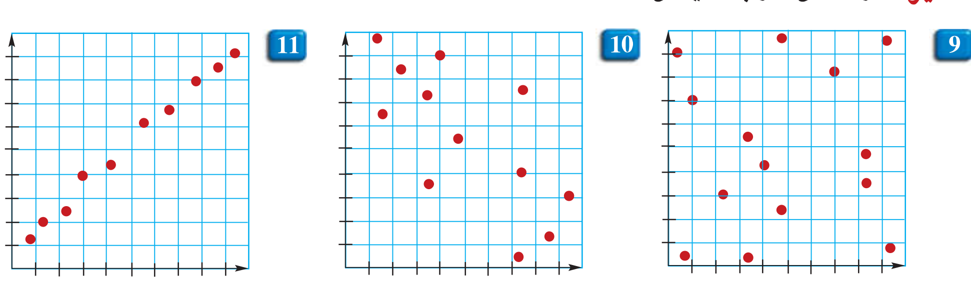
ج قدّر عدد الحضور في حفل ثمن بطاقة الدخول إليه 9000 دينار. ما دقة التقدير؟

8 أنشئ نقاطًا بيانية تُمثل معطيات الجدول.
قدّر معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً.

x	2	8	15	21	24	30	33	37
y	71	63	64	194	160	267	258	210

تقدير قدّر معامل الارتباط في كل حالة.

9 **10** **11**



12 **طيران** يُبيّن الجدول أدناه طول عدد من الطائرات وعرض جناحيها. أنشئ نقاطًا بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً الطول كمتغيّر حر. ارسم المستقيم الأفضل تمثيلاً وجِد معادلته.

737	Super 80	757	767	A300	777
113m	108m	124m	147m	156m	200m
130m	148m	155m	178m	180m	209m

13 يُبيّن الجدول المقابل علامات الطلاب العشرة الأوائل في امتحان الرياضيات.

أ أي معادلة تستعمل لإيجاد العلامة بمعرفة المركز؟

ب افترض أن معلم الرياضيات أضاف 5 علامات إلى كل علامة. ما تأثير ذلك على المعادلة وعلى بيانها؟

علامات الأوائل في الرياضيات

المركز	العلامة	المركز	العلامة
1	95	6	90
2	93	7	89
3	92	8	87
4	91	9	86
5	90	10	85

14 **رياضة** يُبيّن الجدول أدناه معطيات عن سرعة بعض العدّائين وعدد خطواتهم في الثانية.

عدد الخطوات في الثانية والسرعة

السرعة (قدم بالثانية)	15.86	16.88	17.5	18.62	19.97	21.06	22.11
عدد الخطوات بالثانية	3.05	3.12	3.17	3.25	3.36	3.46	3.55

أ أنشئ نقاطًا بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً السرعة كمتغيّر حر.

ب جِد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً ثم ارسمه.

ج استعمل معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً لإيجاد عدد الخطوات بالثانية لعدّاء سرعته 18 قدمًا بالثانية. ما دقّة هذا التقدير؟ أوضح ذلك.

15 **إحاثة** يتضمن الجدول طول عظم الفخذ وطول عظم العضد لخمس عينات متحجرة من أركيوبتركس، وهو حيوان منقرض له مظهر الزواحف وخصائصها، ويعتبره بعض العلماء من الحلقات الأولى التي نشأت عنها الطيور.

أطوال عظم الفخذ وعظم العضد					
طول عظم الفخذ (cm)	38	56	59	64	74
طول عظم العضد (cm)	41	63	70	72	84

أ) أنشئ نقاطًا بيانيّة لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً طول عظم الفخذ كمتغيّر حر. جِد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. ارسم هذا المستقيم.

ب) علامَ يدل ميل هذا المستقيم بخصوص الحيوان؟

ج) استعمل المعادلة التي وجدتها لتقدير طول عظم الفخذ لحيوان من هذا النوع، طول عظم عضده $50cm$. ما دقة هذا التقدير؟

16 **تفكير ناقد** هل يعني وجود ترابط قوي بين متغيّرين أن قيم أحدهما تُحدِّد قيم الآخر؟ (مثلاً: هل يتسبَّب تزايد لسعات النحل في زيادة مبيع المثلّجات؟) أوضح ذلك.

17 **اكتب** اشرح بالتفصيل عملية إيجاد المستقيم الأفضل تمثيلاً.



18 معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً لمجموعة معطيات هي $y=1.05x-1.3$. أيّ مما يلي يُمكن أن يكون معامل الارتباط r ؟

أ) $r=-1.3$ ب) $r=-0.7$ ج) $r=0.8$ د) $r=1.05$

19 أي مما يلي يصف الترابط الذي تُبيّنه النقاط البيانية المقابلة؟

أ) قوي موجب ج) قوي سالب

ب) ضعيف موجب د) ضعيف سالب

20 أي من العلاقات التالية يُمكن أن يكون لها معامل ارتباط ضعيف بخصوص سيارة؟

أ) عمر السيارة وعدد الكيلومترات التي قطعتها.

ب) عمر السيارة وسعرها عند بيعها مستعملة.

ج) طول السيارة وعرضها؟

د) عدد الكيلومترات التي قطعتها داخل المدن وعدد الكيلومترات على الطرق السريعة.

تحدٍّ وتوسّع

هل يُمثل الجدول معطيات تترابط بعلاقة خطّيّة؟ معطيات مترابطة؟ أوضح ذلك.

21

x	2	7	13	15	22
y	4	4	4	4	4

22

x	35	45	55	65	75
y	30	34	36	34	30

23 يُبيّن الجدولان أدناه معطيات كتبها أحد الإحصائيين. أنشئ لكل جدول نقاطًا بيانية تمثّله وجِد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. ما الذي يعطي أهمية لتمثيل المعطيات بيانيًّا قبل استعمال النموذج الخطي لإجراء توقّعات؟

x	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
y	9.14	8.14	8.74	8.77	9.29	8.1	6.13	3.1	9.13	7.26	4.74

x	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
y	7.46	6.77	12.74	7.11	7.81	8.84	6.08	5.39	8.15	6.42	5.73

مراجعة لولبية

اكتب كل مقدار على أبسط صورة. (الصفوف السابقة)

24 $3(x^2-2)+4xy-10x^2y+5x^2$

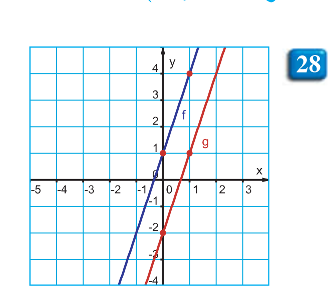
25 $-a^4+3ab+(2a^2)^2$

26 $-3g^2+3(g-4)-2(g-g^2)$

27 $n(4t^2-t)-10nt^2+nt$

اكتب معادلة كل دالة ممثّلة بيانيًّا. ما التحويل التي يُحوّل $f(x)$ إلى $g(x)$؟
(الصفوف السابقة)

28



29

حُلّ كل متباينة بيانيًّا. (الصفوف السابقة)

30 $3x<x-12$

31 $44+6x>-5x$

32 $-2(q-4)+3q\le 1+q$

3-2 أنظمة المُتباينات الخطّية

System of Linear Inequalities





من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل مستكشفو القطب الجنوبي أنظمة المتباينات الخطّية لتحديد السرعة التي عليهم التقدم بها لئلاّ يواجهوا الأحوال المناخية المزعجة (المثال 2).

الأهداف

يحل بيانيًّا أنظمة متباينات خطّية.

المفردات
Vocabulary

نظام المتباينات الخطّية
System of linear inequalities

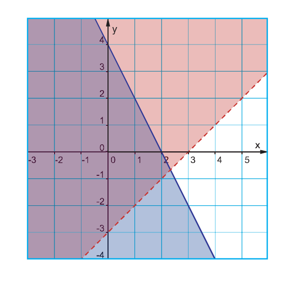
عندما يُستعمل في مسألة تعبير مثل «أكبر من» أو «لا يزيد على» فيُمكنك تمثيل الحالة باستعمال متباينة أو نظام متباينات خطّية.

نظام المتباينات الخطّية System of linear inequalities هو مجموعة من متباينتَين خطّيتَين أو أكثر، تتناول المجاهيل نفسها. غالبًا ما تتألف مجموعة الحل لنظام متباينات خطّية من عدد غير محدود من النقاط يُمكن تمثيلها بيانيًّا بتظليل منطقة في المستوى البياني. عندما تمثِّل بيانيًّا كلاً من متباينات النظام، في المستوى الإحداثي نفسه، تتقاطع المناطق المظلَّلة لتشكِّل منطقة مشتركة بينها كلها. منطقة الحل للنظام هي هذه المنطقة المشتركة.

مثـــال 1 حل نظام متباينات خطّية بيانيًّا

حُلّ بيانيًا نظام المتباينتين الخطيتين.

أ $\begin{cases} y \leq -2x+4 \\ y > x-3 \end{cases}$



في المتباينة الأولى، ارسم المستقيم $y=-2x+4$ بخط متصل، وظلِّل المنطقة تحته. وفي المتباينة الثانية، ارسم المستقيم $y=x-3$ بخط منقَّط، وظلِّل المنطقة فوقه. تقاطع المنطقتين المظلَّلتين هو منطقة الحل لنظام المتباينتَين الخطيَّتَين.

مساعدة

إذا كنت حائرًا في تحديد نصف المستوى الذي ستظلّله، استعمل النقطة (0 ,0) كنقطة اختبار.

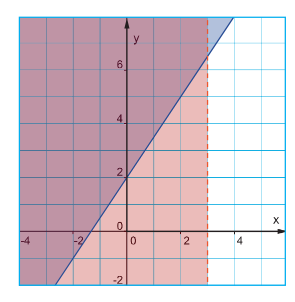
تحقّق: اختبر نقطة من نقاط كل منطقة على المستوى الإحداثي.

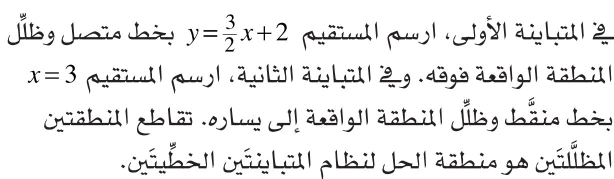
المنطقة	النقاط	$y \leq -2x+4$	$y > x-4$
إلى اليسار	(0,0)	$0 \overset{?}{\leq} -2(0)+4$ $0 \overset{?}{\leq} 4$ ✓	$0 \overset{?}{>} 0-3$ $0 \overset{?}{>} -3$ ✓
إلى اليمين	(4,0)	$0 \overset{?}{\leq} -2(4)+4$ $0 \overset{?}{\leq} -4$ ✗	$0 \overset{?}{>} 4-3$ $0 > 1$ ✗
إلى الأعلى	(2,2)	$2 \overset{?}{\leq} -2(2)+4$ $2 \leq 0$ ✗	$2 \overset{?}{>} 2-3$ $2 > -1$ ✓
إلى الأسفل	(2,−2)	$-2 \overset{?}{\leq} -2(2)+4$ $-2 \overset{?}{\leq} 0$ ✓	$-2 \overset{?}{>} 2-3$ $-2 \overset{?}{>} -1$ ✗

النقطة الأولى كانت النقطة الوحيدة بين هذه النقاط التي شكّل إحداثيّاها حلاً لنظام المتباينتين.

حُلّ بيانيًّا نظام المتباينتين الخطيتين.

ب $\begin{cases} y \geq \frac{3}{2}x + 2 \\ x < 3 \end{cases}$





في المتباينة الأولى، ارسم المستقيم $y = \frac{3}{2}x + 2$ بخط متصل وظلِّل المنطقة الواقعة فوقه. وفي المتباينة الثانية، ارسم المستقيم $x = 3$ بخط منقّط وظلِّل المنطقة الواقعة إلى يساره. تقاطع المنطقتين المظلّلتين هو منطقة الحل لنظام المتباينتَين الخطِّيتَين.

تحقّق: اختبر نقطة من نقاط منطقة التقاطع، $(-4\ ,\ 0)$ مثلاً واختبر إن كان إحداثيّاها يشكّلان حلاً للنظام.

$x < 3$ | $y \geq \frac{3}{2}x + 2$

$-4 < 3$ ✓ | $0 \geq \frac{3}{2}(-4) + 2$

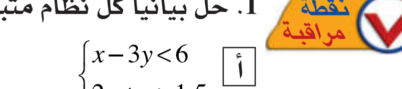
$0 \geq -4$ ✓

بما أنّ النقطة تنتمي إلى منطقة حلّ نظام المتباينتَين، فإنّ منطقة التقاطع هي منطقة الحل.



نقطة مراقبة

1. حُلّ بيانيًّا كل نظام متباينات خطّية.



أ $\begin{cases} x - 3y < 6 \\ 2x + y > 1.5 \end{cases}$

ب $\begin{cases} y \leq 4 \\ 2x + y < 1 \end{cases}$

مثـــال 2 تطبيق على حملات الاستكشاف



كانت حملة استكشاف القطب على بعد 240 km من قاعدتها. أعلنت مصلحة الأرصاد أن عاصفة ثلجية ستهبّ خلال 48 ساعة. على الحملة أن تتحرك بسرعة بركوب باخرة كاسحة جليد ثم بالسّير على الأقدام، لبلوغ القاعدة. سرعة الباخرة القصوى 12 km/h. أما السرعة القصوى في المشي وجر التجهيزات فلا تتعدى 3 km/h. اكتب نظام متباينات خطّية وحلّه بيانيًّا لتحدد فترة ركوب الباخرة وفترة السير على الأقدام قبل بلوغ القاعدة.

استعمل x لعدد ساعات المشي، و y لعدد ساعات ركوب الباخرة. ينبغي أن يكون مجموع المجهولين أقل من 48 ساعة، مما يُعطي المتباينة $x + y \leq 48$. من ناحية أخرى، يجب ألاّ تقل المسافة التي تقطعها الحملة عن 240 km ، مما يُعطي المتباينة الثانية $3x + 12y \geq 240$.

نظام المتباينتَين الخطيَّتَين هو $\begin{cases} x + y \leq 48 \\ 3x + 12y \geq 240 \end{cases}$

ارسم المستقيم $3x + 12y = 240$ بخط متَّصل وظلِّل المنطقة الواقعة فوقه، ثم ارسم المستقيم $x + y = 48$ ، وظلِّل المنطقة الواقعة تحته. منطقة الحل للنظام هي منطقة تقاطع التظليلين.

تحقق: اختر النقطة $(15, 25)$ في منطقة التقاطع. يُشكّل إحداثيّا هذه النقطة حلاً لكل من المتباينتَين وللنظام بالتالي.

$x + y \leq 48$ | $3x + 12y \geq 240$

$15 + 25 \leq 48$ | $3(15) + 12(25) \geq 240$

$40 \leq 48$ ✓ | $345 \geq 240$ ✓



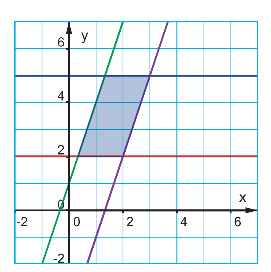
2. تبيع سولاف شطائر لحم وشطائر دجاج. لديها 40 رغيفًا، أي إنها لا تستطيع أن تبيع أكثر من 40 شطيرة من النوعين معًا. يؤمِّن لها بيع شطيرة اللحم ربحًا قدره 2 000 دينار، وبيع شطيرة الدجاج ربحًا قدره 2 500 دينار وهي تريد أن تربح 90 000 دينار. اكتب نظام متباينات خطّية لتمثيل المسألة، ثم حُلّه بيانيًّا.

يُمكن لنظام المتباينات الخطّية أن يتضمّن أكثر من متباينتَين.

مثـــال 3 تطبيق هندسي

حُلّ بيانيًّا نظام المتباينات الخطّية، وحدِّد طبيعة منطقة الحل.

$$\begin{cases} y \le 5 \\ y \ge 2 \\ y \le 3x+1 \\ y \ge 3x-4 \end{cases}$$



ارسم بخط متصل المستقيم $y=5$ والمستقيم $y=3x+1$، وظلِّل المنطقة التي تقع تحت كل منهما.

ارسم بخط متصل المستقيم $y=2$ والمستقيم $y=3x-4$، وظلِّل المنطقة فوق كل منهما. منطقة الحل للنظام هي منطقة التقاطع.

منطقة الحل شكل رباعي. لاحظ أيضًا أن المستقيمين $y=5$ وَ $y=2$ متوازيان لأنهما مستقيمان أفقيان؛ وأن المستقيمين $y=3x+1$ وَ $y=3x-4$ متوازيان لأن لهما الميل نفسه.

منطقة الحل رباعي يوازي كل ضلع فيه الضلع المقابل. إنه متوازي أضلاع.



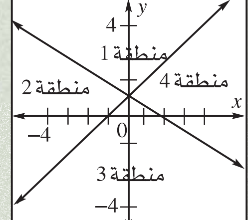
3. **حُلّ بيانيًّا نظام المتباينات الخطّية، وحدِّد طبيعة منطقة الحل.**

أ $\begin{cases} x \le 6 \\ y \le \frac{1}{2}x+1 \\ y \ge -2x+4 \end{cases}$

ب $\begin{cases} y \le 4 \\ y \ge -1 \\ y \le -x+8 \\ y \le 2x+2 \end{cases}$

فكِّرْ وناقِشْ

1. أوضح كيف تحدِّد منطقة الحل لنظام متباينات خطّية.
2. ما العدد الأدنى لمتباينات نظام حتى تكون منطقة حلّه مثلّثًا؟ مربّعًا؟ أعطِ أمثلة تدعم جوابك.
3. **كن منظّمًا** انسخ المخطَّط وأكمله بأن تكتب، لكل منطقة في المستوي الإحداثي، نظام متباينات خطية تكون منطقة حلِّه تلك المنطقة.





3-2 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** قارن بين نظام متباينات خطّية ونظام معادلات خطّية.

انظر المثال 1

حُلّ بيانيًا كل نظام متباينات خطّية.

2 $\begin{cases} y \geq 4x-4 \\ y \geq 3x-3 \end{cases}$ **3** $\begin{cases} x+y>5 \\ x-y<-3 \end{cases}$ **4** $\begin{cases} 7x<y-16 \\ y \leq -5x-2 \end{cases}$ **5** $\begin{cases} 2x+2y \leq 4 \\ 3x-y>1 \end{cases}$

انظر المثال 2

6 **جمع تبرعات** تجمع إحدى الجمعيات الخيرية تبرّعات ببيع قمصان قطنية. ثمن القميص للكبار 000 15 دينار وللصغار 000 10 دينار. عدد القمصان 250 قميصًا من النوعين. وتأمل الجمعية تحصيل مبلغ 3 ملايين دينار على الأقل. اكتب نظام متباينات خطّية لتمثيل الحالة، ثم حُلّه بيانيًا لتحديد عدد القمصان التي ينبغي بيعها من كل نوع.

انظر المثال 3

حُلّ بيانيًا كل نظام متباينات خطّية وحدّد طبيعة منطقة حلّه.

7 $\begin{cases} x \geq 9 \\ y \geq -18 \\ x \leq 13 \\ y \leq -4 \end{cases}$ **8** $\begin{cases} y \leq 7 \\ 2x-y \leq 3 \\ x+2y \geq -6 \end{cases}$ **9** $\begin{cases} x \leq -1 \\ y \leq 3x+2 \\ y \geq -3x-10 \end{cases}$ **10** $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq x+6 \\ x \leq 6 \\ x \geq -2 \end{cases}$

تمارين وحلُّ مسائل

تمارين حرة	
لحل التمارين	انظر المثال
14 -11	1
15	2
19 -16	3

حُلّ بيانيًا كل نظام متباينات خطّية.

11 $\begin{cases} 5x-y>0 \\ y<x \end{cases}$ **12** $\begin{cases} 3y \geq 2x-3 \\ y \geq 3x+8 \end{cases}$ **13** $\begin{cases} x+y>5 \\ -2x+y \leq 2 \end{cases}$ **14** $\begin{cases} y>4 \\ x+4y \geq 8 \end{cases}$

15 **موسيقى** تعتزم شركة إنتاج نسخ 000 10 نسخة من قرص مدمج لمجموعة أغنيات. خُصِّص عدد من الأقراص لتوزيعها مجانًا على محطات الإذاعة والتلفزيون، وعدد آخر للبيع. لا يتجاوز عدد الأقراص المجانية نسبة 20% من المجموع الكلّي. اكتب نظام متباينات خطّية يمثِّل الحالة، ويحدِّد الأعداد الممكنة للأقراص المجانية والأقراص المعدة للبيع.

حُلّ بيانيًا كل نظام متباينات خطّية وحدِّد طبيعة منطقة حلّه.

16 $\begin{cases} x \geq 0 \\ -\frac{1}{3}x+y \geq -4 \\ \frac{1}{3}x+y \leq -1 \end{cases}$ **17** $\begin{cases} y \leq 2.5 \\ y \geq -0.5 \\ y \leq -x+8 \\ y \leq 2x+4 \end{cases}$ **18** $\begin{cases} y \leq x+6 \\ y \geq x+1 \\ y \leq -x+6 \\ y \geq -x-1 \end{cases}$ **19** $\begin{cases} y \leq x \\ y \leq -x+2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

20 **هاتف** بلغ عدد مكالمات هزار الهاتفية للشهر الماضي 2370 مكالمة، منها 1645 تلقاها من آخرين. بينما كان عدد مكالمات هوزان أقلّ من عدد مكالمات هزار؛ لكن كان عدد المكالمات التي تلقّاها هوزان أكثر من عدد المكالمات التي تلقاها هزار. اكتب نظام متباينات خطّية لتمثيل الحالة، ثم حُلّ النظام لتحديد العدد الممكن للمكالمات التي تلقّاها هوزان وعدد المكالمات التي أجراها.

هندسة اكتب نظام متباينات خطّية تتخذ منطقة حلّه شكل:

21 مستطيل **22** مربع **23** مثلث قائم **24** شبه منحرف

25 تخضع سيارات السباق لشروط معيّنة، من حيث الحجم والكتلة، وفقًا لتصنيفها. ينبغي ألاّ تقلّ كتلة سيارة سباق الفورمولا 1 عن 600 kg بما فيها كتلة السائق، في حين أن سيارة السباقات الأخرى، ينبغي ألاّ تقلّ كتلتها عن 710 kg من دون السائق.

أ) اكتب نظام متباينات خطّية يُستعمل لمقارنة الكتل الممكنة للسيّارتين من دون السائق.

ب) حدِّد مجالاً ومدى معقولين للنظام.

ج) حُلّ النظام بيانيًّا.

26 **ضريبة الدخل** يُبيّن الجدول المقابل نسب الضريبة على الدخل وفقًا لقيمة دخل العائلة. كانت نسبة الضريبة لدخل سرجون وزوجته 25% وكان دخل الزوجة يزيد على دخل الزوج بما لا يقل عن مليوني دينار. اكتب نظام متباينات خطّية لتمثيل المسألة، ثم حُلّ النظام بيانيًّا.

نسب ضريبة الدخل وفق الشطور	
الدخل (بملايين الدنانير)	النسبة
من 14 000 إلى 56.800	15%
من 56.801 إلى 114.650	25%
من 114.651 إلى 174.700	28%

حُلّ بيانيًّا كل نظام متباينات خطّية، وحدّد ثلاث نقاط تقع في منطقة الحل.

27 $\begin{cases} -5y < 2x \\ 5y \ge 2x - 20 \end{cases}$



28 $\begin{cases} y + 7 > 0 \\ y < 2x + 5 \\ y < -3x + 4 \end{cases}$

29 $\begin{cases} y \ge -8 \\ x + 2y < 4 \\ x > -6 \end{cases}$

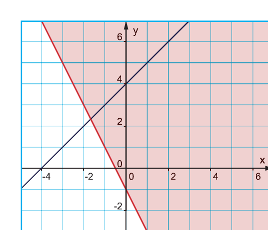
30 $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y \le 2 \\ x - y > 3 \end{cases}$

31 **تفكير ناقد** إذا كان المستقيمان اللذان يحدان منطقة الحل لنظام متباينتين متوازيين، فما هي منطقة الحل الممكنة؟

32 **اكتب** هل يمكن ألاّ يكون لنظام من متباينتين خطيَّتَين حلول؟ أوضح ذلك.



33 أي من أنظمة المتباينات الخطّية يتمثّل حلّه البياني بالشكل المقابل؟



أ) $\begin{cases} y > x + 4 \\ y < -2x - 1 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} y > x + 4 \\ y > -2x - 1 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} y \le x + 4 \\ y \ge -2x - 1 \end{cases}$

د) $\begin{cases} y \ge x + 4 \\ y \ge -2x - 1 \end{cases}$

34 تبلغ كلفة إنتاج كمية من السلع 300 000 دينار يُضاف إليها 1250 دينارًا عن كل سلعة تُنتج. تبيع الشركة هذه السلع بسعر لا يتجاوز 2500 دينار للسلعة الواحدة. أي من أنظمة المتباينات الخطّية أدناه يُمكن أن تُستعمل منطقة حلّه لتمثيل الربح الممكن للشركة؟ (يرمز المجهول c إلى الكلفة الكلّية، والمجهول n إلى عدد الوحدات المنتجة).

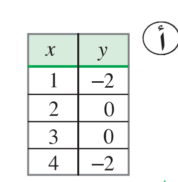
أ) $\begin{cases} c \le 300\ 000n \\ c \le 300\ 000 + 1\ 250n \end{cases}$

ب) $\begin{cases} c \ge 2\ 500n \\ c \le 300\ 000 + 1\ 250n \end{cases}$

ج) $\begin{cases} c \le 2\ 500n \\ c \ge 300\ 000 + 1\ 250n \end{cases}$

د) $\begin{cases} c \ge 2\ 500n \\ c \ge 300\ 000 + 1\ 250n \end{cases}$

35 أي من الجداول أدناه يتضمّن حلولاً للنظام $\begin{cases} 3x-12y>8 \\ x+5y>-5 \end{cases}$ ؟

أ)


x	y
1	−2
2	0
3	0
4	−2

ب)

x	y
1	−2
2	1
3	1
4	−2

ج)

x	y
1	−1
2	−1
3	0
4	0

د)

x	y
1	−2
2	−2
3	−1
4	−1

تحدٍّ وتوسّع

36 اكتب نظام متباينات خطّية بحيث تكون منطقة حلّه خماسيًّا.

37 هل هناك قيمة للمجهول m تجعل نظام المتباينات الخطّية $\begin{cases} y>-3x+2 \\ y<mx-3 \end{cases}$ من دون حلول؟ إذا كان الجواب نعم، أعطِ هذه القيمة. وإذا لا، أوضح السبب.

38 يريد سردار توظيف 30 مليون دينار في سوق الأوراق المالية. عرض المصرف عليه نوعين من التوظيفات. الأول قليل المخاطر ويحقّق أرباحًا بنسبة 5% سنويًّا، والثاني عالي المخاطر ويحقّق أرباحًا بنسبة 7% سنويًا. ما الحد الأدنى للمبلغ الذي عليه توظيفه بنسبة أرباح 7% لئلاّ تقل أرباحه عن 000 1900 دينار سنويًّا؟

مراجعة لولبية

أعطِ معكوس كل عدد ومقلوبه. (الصفوف السابقة)

39 7 **40** $-\frac{3}{4}$ **41** 2.48 **42** −1

اكتب معادلة للمستقيم: (الصفوف السابقة)

43 الذي يمر في النقطتين $(2,-7)$ وَ $(1,1)$

44 المار في النقطة $(3,-3)$ وميله 0

45 الذي يمر في النقطتين $(1,-1)$ وَ $(0,0)$

46 المار في النقطة $(9,6)$ وميله $-\frac{1}{3}$

47 المار في النقطة $(-2,4.5)$ والمتعامد مع المستقيم $y=4x-1$

48 المار في النقطة $(3,2)$ والموازي للمستقيم $y=-x-7$

4-2 البرمجة الخطّية
Linear Programming



الهدف

يحل مسائل برمجة خطّية.

المفردات
Vocabulary

البرمجة الخطّية
Linear programming

الشرط
Constraint

منطقة الجدوى
Feasible Region

دالّة المنفعة
Objective Function

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل مهندسو الحدائق البرمجة الخطّية لتحديد النباتات التي سيزرعونها على السطوح الخضراء.

السطوح الخضراء سطوح مغطاة بالنباتات عوضًا عن المواد الأخرى، مثل الإسمنت أو القرميد، للمساعدة على تخفيض الحرارة وتحسين نوعية الهواء.

تتأثّر خيارات مهندسي الحدائق بأسعار النباتات وكمية الماء التي تلزمها، وكمية ثاني أوكسيد الكاربون التي تمتصها.

البرمجة الخطّية Linear programming طريقة لتحديد القيمة الكبرى أو القيمة الصغرى لدالّة تخضع لعدد من القيود تسمّى شروط المسألة. **الشرط Constraint** هو إحدى المتباينات في مسألة برمجة خطّية.

يُمكن تمثيل مجموعة الحلول التي تُحقق جميع الشروط بيانيًّا، مما يُنتج منطقة في المستوي الإحداثي تسمّى **منطقة الجدوى Feasble Region** .

مثـــال 1 تمثيل منطقة الجدوى بيانيًّا

يُخطّط سيروان لهندسة حديقة لا تزيد مساحتها على $600m^2$ مستخدمًا نوعين من النباتات. تُغطّي نبتة النوع الأول مساحة $1.2m^2$ ، بينما تُغطّي نبتة النوع الثاني مساحة $2m^2$. يبلغ ثمن كل نبتة من النوعين 2500 دينار. يجب ألاّ تتعدّى كلفة النبتات مليون دينار . اكتب الشروط ومثّل بيانيًّا منطقة الجدوى.

ارمز بالمتغيّر x إلى عدد النبتات من النوع الأول، وبالمتغيّر y إلى عددها من النوع الثاني.

اكتب الشروط.

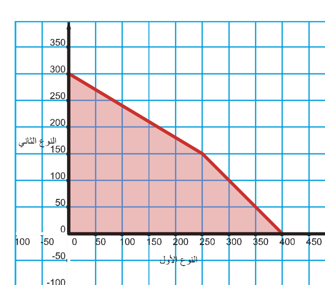
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1.2x + 2y \leq 600 \\ 2500x + 2500y \leq 1000\,000 \end{cases}$$

عدد النبتات لا يُمكن أن يكون سالبًا.

المساحة المُغطاة لا تزيد على $600\ m^2$.

كلفة النبتات لا تزيد على 100 0000 دينار

حُلّ بيانيًّا كلاًّ من شروط المسألة، وظلِّل المنطقة التي تُشكِّل تقاطع مختلف مناطق الحل. منطقة الجدوى هي المنطقة التي حصلت عليها. إنها الرباعي الذي رؤوسه $(0, 0)$، $(400, 0)$، $(250, 150)$، $(0, 300)$.



تحقق: إذا اخترت نقطة مثل النقطة $(100, 100)$ فسوف تجد أن إحداثييها يُحقّقان جميع الشروط. ✓



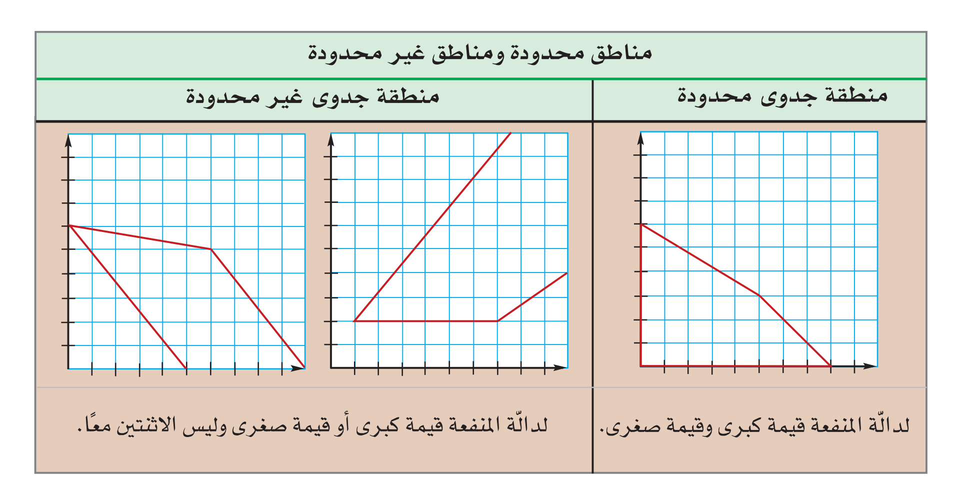
1. مثّل بيانيًّا منطقة الجدوى للمسألة التالية.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1.5 \\ 2.5x + 5y \leq 20 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases}$$

عندما تحل مسألة برمجة خطّية، لا تكتفي عادة بتمثيل منطقة الجدوى في المستوي الإحداثي. عليك، في أغلب الأحيان، أن تجد قيمة المتغيّرات التي تجعل دالّة بدلالة هذه المتغيّرات تبلغ قيمتها الكبرى أو قيمتها الصغرى. تُسمّى مثل هذه الدالّة **دالّة المنفعة** **Objective Function** .

تبعًا لمنطقة الجدوى، يُمكن أن يكون لدالّة المنفعة قيمة كبرى أو قيمة صغرى أو الاثنان معًا، أو لا هذه ولا تلك.

مناطق محدودة ومناطق غير محدودة

منطقة جدوى محدودة	منطقة جدوى غير محدودة
	
لدالّة المنفعة قيمة كبرى وقيمة صغرى.	لدالّة المنفعة قيمة كبرى أو قيمة صغرى وليس الاثنين معًا.

يمكن، بمساعدة رياضيات متقدّمة، إثبات التالي:



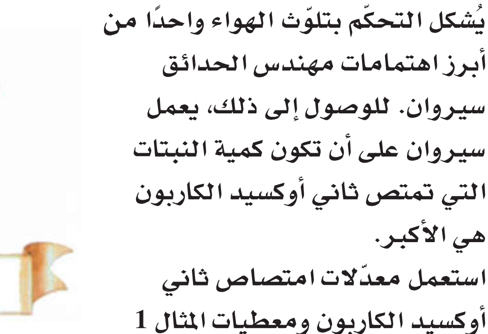
مبدأ الرأس في البرمجة الخطّية

إذا كان لدالّة المنفعة في مسألة برمجة خطّية قيمة كبرى أو قيمة صغرى، فإنّ الدالّة تبلغ هذه القيم عند رأس من رؤوس منطقة الجدوى.

مثـــال 2 حل مسألة برمجة خطّية

يُشكل التحكّم بتلوّث الهواء واحدًا من أبرز اهتمامات مهندس الحدائق سيروان. للوصول إلى ذلك، يعمل سيروان على أن تكون كمية النبتات التي تمتص ثاني أوكسيد الكاربون هي الأكبر.

استعمل معدّلات امتصاص ثاني أوكسيد الكاربون ومعطيات المثال 1 لتحديد عدد النبتات من النوعين.

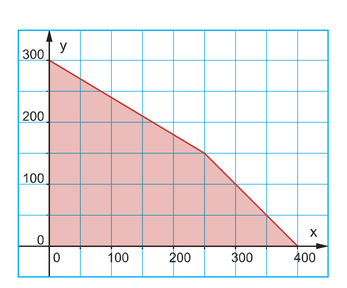




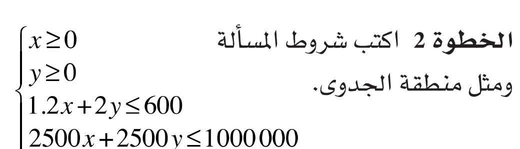

مساعدة

استعمل الحاسبة البيانية لكي تتحقَّق من منطقة الجدوى التي حصلت عليها. لا تنس أن تحوِّل المتغيّرَين إلى x وَ y .

الخطوة 1 ارمز بالمتغيّر C إلى كمية ثاني أوكسيد الكاربون التي يتم امتصاصها. استعمل x لعدد النباتات من النوع الأول و y لعددها من النوع الثاني.
اكتب دالة المنفعة: $C = 0.7x + 1.05y$



الخطوة 2 اكتب شروط المسألة ومثل منطقة الجدوى.



$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1.2x + 2y \leq 600 \\ 2500x + 2500y \leq 1000000 \end{cases}$$

الخطوة 3 احسب قيمة دالّة المنفعة عند كل رأس من رؤوس منطقة الجدوى.

(x, y)	$0.7x + 1.05$	C
$(0, 0)$	$0.7(0) + 1.05(0)$	0
$(0, 300)$	$0.7(0) + 1.05(300)$	315
$(250, 150)$	$0.7(250) + 1.05(150)$	332.5
$(400, 0)$	$0.7(400) + 1.05(0)$	280

تبلغ دالة المنفعة قيمتها الكبرى عند الرأس $(250, 150)$

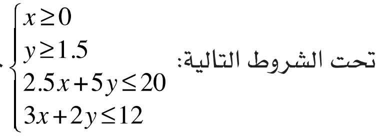
على المهندس سيروان أن يزرع 250 نبتة من النوع الأول وَ 150 نبتة من النوع الثاني، لكي تبلغ كمية ثاني أوكسيد الكاربون التي تمتصها نباتات الحديقة حدها الأقصى.



نقطة مراقبة



2. حدِّد القيمة الكبرى لدالَّة المنفعة $p = 25x + 30y$



تحت الشروط التالية: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1.5 \\ 2.5x + 5y \leq 20 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases}$.

مثـــال 3 تطبيق على حل المسائل



في مهرجان للخيول التزم بيستون أن ينجز في يوم واحد توضيب وجبات الطعام في عُلب. استخدم لذلك عمّالاً مختصّين، أجر الواحد في اليوم 60 000 دينار، وعمّالاً غير مختصّين أجر الواحد في اليوم 40 000 دينار، على أن يدفع لهم كحدّ أقصى 1 440 000 دينار. يحتاج بيستون إلى مختصّ على الأقل مقابل كل 3 غير مختصين، ولا يتوافر سوى 16 مختصًا. ينجز المختص في الساعة 25 علبة وغير المختص 18 علبة. حدِّد عدد العمال من كل فئة، لكي يكون عدد العلب المنجزة أكبر ما يُمكن.

1 افهمِ المسألة

سيتألف الجواب من شقين: عدد المختصين وعدد غير المختصين.

أنشئ لائحة بالمعلومات المهمة.

- أجر المختص 60 000 دينار في اليوم، وأجر غير المختص 40 000 دينار في اليوم.
- حدّد بيستون 1 440 000 دينار كحد أقصى لأجور العمال.
- يُنجز المختص في الساعة 25 علبة، ويُنجز غير المختص 18 علبة.
- يحتاج بيستون إلى مختص على الأقل مقابل 3 غير مختصين.
- يتوافر 16 عاملاً مختصًّا فقط.

2 خطِّطْ للحل

ارمز بالمتغيّر x إلى عدد العمال غير المختصين، وبالمتغيّر y إلى عدد العمال المختصين. اكتب شروط المسألة ودالّة المنفعة، بالاستناد إلى المعلومات المهمة التي كتبتها.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 40000x + 60000y \leq 1440000 \\ y \geq \frac{1}{3}x \\ y \leq 16 \end{cases}$$

عدد العمال لا يكون سالباً

أجور العمال لا تتجاوز 000 440 1 دينار.

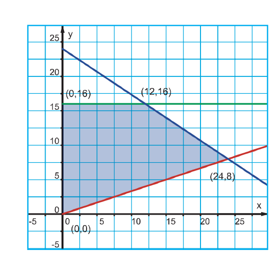
عامل مختص واحد على الأقل لكل 3 عمال غير مختصين

عدد العمال المختصين المتوافر هو 16

ارمز بالمتغيّر p إلى عدد العلب المنجزة في الساعة. دالّة المنفعة هي $p = 18x + 25y$.

3 حُلَّ

حدِّد بيانيًّا منطقة الجدوى وحدِّد الرؤوس. ثم احسب قيمة دالّة المنفعة عند كل رأس.



$p(0, 0) = 18(0) + 25(0) = 0$

$p(0, 16) = 18(0) + 25(16) = 400$

$p(12, 16)1 = 18(12) + 25(16) = 616$

$p(24, 8)1 = 18(24) + 25(8) = \mathbf{632}$

تبلغ دالّة المنفعة قيمتها الكبرى عند الرأس $(24, 8)$. على بيتسون أن يستخدم 8 عمال مختصّين وَ 24 عاملاً غير مختصٍّ.

4 انظر إلى الوراء

تأكد من أن الزوج المرتّب $(24, 8)$ يُحقّق جميع شروط المسألة.

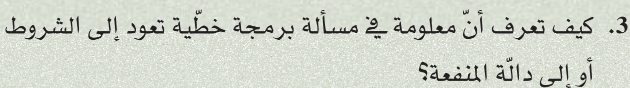
$x \geq 0$	$y \geq 0$	$y \leq 16$
$24 \geq 0$ ✓	$8 \geq 0$ ✓	$8 \leq 16$ ✓
	$y \geq \frac{1}{3}x$	$40000x + 60000y \leq 1440000$
	$y \geq \frac{1}{3}(24)$	$40000 \times 24 + 60000 \times 8 \leq 1440000$
	$8 \geq 8$ ✓	$1440000 \leq 1440\ 000$ ✓



3. يرغب مدير مكتبة في شراء خزانات للكتب. تحتاج المكتبة إلى $320\ m$ من الرفوف. تؤمِّن الخزانة من النوع الأول $32\ m$ من الرفوف وثمنها 000 200 دينار. وتؤمِّن الخزانة من النوع الثاني $16\ m$ من الرفوف وثمنها 000 125 دينار. بالاستناد إلى قياسات قاعة المكتبة التي تتسع على الأكثر لـ 8 خزانات من النوع الأول وَ 12 خزانة من النوع الثاني، كم خزانة من كل نوع على مدير المكتبة أن يشتري ليدفع أقل مبلغ ممكن؟

فكِّرْ وناقش

1. ما الذي يجعل شروط مسألة برمجة خطّية تضم غالبًا الشرطين $x \geq 0$ وَ $y \geq 0$؟
2. ما الذي يجعل دالّة المنفعة لمسألة برمجة خطّية شرطاها $\begin{cases} x+y>0 \\ y \leq 4 \end{cases}$ تملك قيمة كبرى أو قيمة صغرى وليس الاثنتين معًا؟



3. كيف تعرف أنّ معلومة في مسألة برمجة خطّية تعود إلى الشروط أو إلى دالّة المنفعة؟
4. **كن منظّمًا** انسخ الجدول، ثم أكمله. اكتب في كل إطار مثالاً، باستعمال معطيات من المثالين 1 وَ 2.

منطقة الجدوى	الشروط
دالة المنفعة	الرؤوس

(برمجة خطية)

اعلم و احفظ

4-2 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** تُسمّى المتباينات في مسألة برمجة خطية __?__ (الشروط أو دالّة المنفعة)

انظر المثال 1

مثّل بيانيًا كل منطقة جدوى.

2 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3x+3 \\ y \leq -x+7 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -1 \\ y \leq x+1 \\ y \leq -\frac{1}{4}x+6 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 1 \\ y \geq 0.5x-2 \\ y \leq -2x+3 \end{cases}$

انظر المثال 2

حدِّد قيم x وَ y التي تُعطي دالّة المنفعة قيمتها الكبرى أو الصغرى.

	الشروط	دالّة المنفعة	قيمة كبرى أم قيمة صغرى ؟
5	شروط مسألة التمرين 2	$p=10x+16y$	قيمة كبرى
6	شروط مسألة التمرين 3	$p=3x+5y$	قيمة صغرى
7	شروط مسألة التمرين 4	$p=2.4x+1.5y$	قيمة كبرى

انظر المثال 3

8 **طب أسنان** يعمل طبيب الأسنان ريبوار، 7 ساعات يوميًّا. يُخصِّص نصف ساعة للمريض الذي يريد تنظيف أسنانه ويتقاضى منه 40 000 دينار، وساعة للمريض الذي يريد معالجة لثّته ويتقاضى منه 95 000 دينار. يستطيع الطبيب استقبال 4 حالات معالجة لثة على الأكثر في اليوم. جِد عدد حالات تنظيف الأسنان وعدد حالات معالجة اللثة اللذين يؤمّنان للطبيب المدخول الأكبر.

تمــارين وحلُّ مســائـل

تمارين حرة

لحل التمارين	أنظر المثال
9- 11	1
12- 14	2
15	3

مثّل بيانيًا كل منطقة جدوى.

9 $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ y\geq 4x-4 \\ y\leq x+5 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x\leq 0 \\ y\geq 0 \\ y\leq 9 \\ y\geq -2x-7 \end{cases}$

11 $\begin{cases} x\geq 0 \\ x\leq 5 \\ y\geq \frac{1}{5}x-3 \\ y\leq -x+4 \end{cases}$

حدّد قيم x وَ y التي تُعطي دالّة المنفعة قيمتها الكبرى أو الصغرى.

	الشروط	دالة المنفعة	قيمة كبرى أم قيمة صغرى ؟
12	شروط مسألة التمرين 9	$p=-21x+11y$	قيمة كبرى
13	شروط مسألة التمرين 10	$p=-2x-4y$	قيمة صغرى
14	شروط مسألة التمرين 11	$p=x+3y$	قيمة كبرى

15 **إعلانات** خصّصت إحدى الشركات مبلغ 60 مليون دينار لتنظيم حملة دعائية لمنتجاتها على التلفزيون في الفترة المسائية، وعلى عدد من الإذاعات. قرر المسؤول عن الحملة أن يستعمل ما بين 30 وَ 60 مرة البث الإذاعي. استعمل الجدول لتجد عدد الدعايات في فترة التلفزيون المسائية، وفي الإذاعة، التي تؤمّن أطول وقت ممكن من الدعاية، ضمن حدود الميزانية.

النوع	المدة (ثا)	الكلفة (دينار)
إذاعة	20	400 000
تلفزيون (الفترة المسائية)	30	1 500 000
تلفزيون (فترة السهرة)	30	1 200 000
صحف		300 000

16 تُباع بطاقات سباق الشرق للسيارات بسعرين: 25 000 دينار للمقاعد العليا وَ 45 000 دينار للمقاعد السفلى. قرّرت إدارة السباق ألاّ يزيد عدد المتفرجين على 160 000 متفرج.

أ حدّد عدد البطاقات التي ينبغي بيعها من كل فئة لتأمين أكبر مردود ممكن، علمًا بأنّ عدد المقاعد العليا لا يزيد على 120 000 مقعد، وعدد المقاعد السفلى لا يزيد على 60 000 مقعد.

ب كيف يتغيّر النظام والحل إذا توقّعت إدارة السباق أن يكون إيراد كل مقعد من المقاعد العليا 60 000 دينار وكل مقعد من المقاعد السفلى 30 000 دينار، من بيع الشطائر والمرطّبات؟

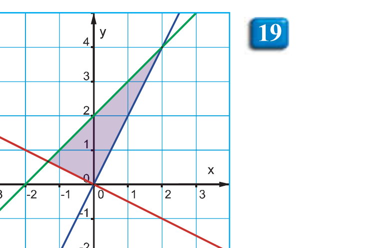


17 **صناعة** تنتج مؤسسة الفجر نوعين من المراوح. يستغرق تصنيع مروحة النوع الأول 4 ساعات عمل ويؤمن ربحًا قدره 40 000 دينار، بينما يستغرق تصنيع مروحة النوع الثاني 6 ساعات عمل ويؤمن ربحًا قدره 80 000 دينار. لا تتعدى طاقة الإنتاج اليومية 15 مروحة من النوع الأول وَ 4 مراوح من النوع الثاني. ما الحد الأدنى لعدد ساعات العمل في اليوم التي تؤمّن للمؤسسة ربحًا لا يقل عن 400 000 دينار يوميًّا؟

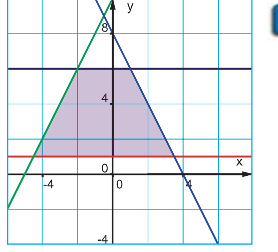
هندسة فيما يلي تمثيلات بيانيَّة لمناطق جدوى في مسائل برمجة خطّية. اكتب نظام متباينات لكلٍّ منها.

18

19



20



21 **حركة سير** قرّرت إدارة الطرقات السريعة تسيير دوريات خاصة لمساعدة السيّارات التي تتعرّض للنقص في الوقود بتزويدها بغالونين من الوقود، أو السيارات التي تتعطّل إحدى عجلاتها. يستغرق تزويد سيارة بالوقود 15 دقيقة، وإصلاح العجلة 45 دقيقة. ما أكبر عدد من السيارات يُمكن لدورية واحدة أن تساعدها في 8 ساعات، علمًا بأنّ حمولتها القصوى من الوقود 28 غالونًا؟

22 **تفكير ناقد** هل يُمكن ألاّ يكون لمسألة برمجة خطّية حل؟ أعط مثالاً يدعم جوابك.

23 **تغذية** يُنتج أحد مصانع الغذاء الصحي نوعين من المأكولات باستعمال إضافات من بروتين الصويا والفيتامينات. يتطلب تصنيع الوحدة من النوع الأول أونصتين من بروتين الصويا وأونصة واحدة من الفيتامينات. وتحقِّق ربحًا قدره 25 000 دينار، ويتطلب تصنيع الوحدة من النوع الثاني 3 أونصات من بروتين الصويا وأونصة واحدة من الفيتامينات وتحقِّق ربحًا قدره 32 000 دينار. كم وحدة من كل نوع على المصنع أن يُنتج للحصول على أكبر ربح ممكن، علمًا بأن مخزونه من بروتين الصويا ومن الفيتامينات 100 أونصة؟



على تاريخ الرياضيات



تم تطوير علم البرمجة الخطية خلال الحرب العالمية الثانية في القرن العشرين. وقد لعب هذا العلم، وهو جزء من علم أوسع يسمّى **أبحاث العمليات**، دورًا في كسب هذه الحرب بالمساعدة على حسن توزيع الموارد العسكرية.

24 **تفكير ناقد** أعط مثالاً على مسألة برمجة خطّية تتضمن منطقة الجدوى فيها قيمًا سالبة.

25 **اكتب** كيف تميّز إن كان عليك البحث عن القيمة الكبرى أو القيمة الصغرى لدالّة المنفعة في مسألة برمجة خطّية وفقًا لشروط المسألة؟

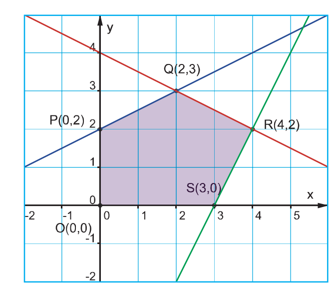
26 **اكتب** كيف تجد إحداثيات رؤوس منطقة الجدوى؟



27 أي نقطة تُعطي دالّة المنفعة $P=-x+y$ قيمتها الكبرى في مسألة البرمجة الخطّية التي يُمثّل الشكل المقابل منطقة الجدوى فيها؟

(أ) P (ج) R

(ب) Q (د) S



28 رؤوس منطقة الجدوى في مسألة برمجة خطّية هي النقاط $(0, 0)$ ، $(-1, 2)$ ، $(-2, 6)$.
أي من دوال المنفعة أدناه لها قيمة دنيا سالبة في منطقة الجدوى؟

(أ) $P=-4x+y-1$ (ج) $P=-x+3y+2$

(ب) $P=12x+7y$ (د) $P=-5x-y$

29 تُخطّط شركة بناء كبرى لإنشاء مبانٍ تجارية ومبانٍ سكنية على قطعة من الأرض مساحتها $30\ 000\ m^2$. يتطلّب كل مبنى سكني $250\ m^2$ وكل مبنى تجاري $3000\ m^2$. تربح الشركة مليون دينار في كل مبنى سكني، وَ 20 مليون دينار في كل مبنى تجاري. أي مما يلي يمكن اعتباره دالّة المنفعة لهذه المسألة، ويؤمّن أكبر ربح ممكن، علمًا بأنّ عدد المباني التجارية يزيد على 6؟

(أ) $P=250x+3000y$ (ج) $P=1000000x+20000000y$

(ب) $P=250x+100000y$ (د) $P=300\ 000-x-6y$

تحدٍّ وتوسّع

30 **أدوية** تُخطّط إحدى شركات تصنيع الأدوية لاختبار نوع جديد من المضادات الحيوية على نوعين، A وَ B، من البكتيريا. يتطلّب الحكم على الدواء الجديد تجربته على ما لا يقل عن 700 عيّنة من البكتيريا، من بينها ما لا يقل عن 400 عيّنة من النوع B. لمساعدة الشركة على إنزال كلفة التجربة إلى الحد الأدنى:



أ مثّل بيانيًّا منطقة الجدوى لهذه المسألة.

ب ماذا تُمثّل كل من النقطتَين $(350, 400)$ وَ $(400, 350)$ لهذه المسألة؟

ج هل تُحقّق كل من هاتين النقطتين شروط المسألة؟ أوضح السبب.

مراجعة لولبية

احسب، في كل تمرين، $f(7)$ وَ $f\left(-\frac{1}{2}\right)$. (الصفوف السابقة)

31 $f(x)=\frac{1}{2x-3}$ **32** $f(x)=0.5x$ **33** $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

حوّل دالّة المطلق $f(x)=|x|$ **بحيث يُصبح رأسها في النقطة المحدَّدة. ارسم بيان الدالّة الجديدة.**
(الصفوف السابقة)

34 $(6, -3)$ **35** $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ **36** $(-2.5, 0.75)$

هندسة مثّل بيانيًا كل نظام متباينات، وصنّف الشكل الهندسي الذي يُمثّل منطقة الحل.
(الدرس 2-3)

37 $\begin{cases} y\le 6 \\ y-2x\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases}$ **38** $\begin{cases} y\ge 0 \\ y\le 2 \\ y\le x \\ x+y\le 6 \end{cases}$

الفصل 2



2-1 المتباينات الخطّية بمجهولين

حُلّ بيانيًا كل متباينة خطّية بمجهولَين.

1. $y-1\leq 5$
2. $2x+5y>10$
3. $3x-4y>5x+12$
4. $3(2x-1)+y>6x-4$
5. مع تارا 30 000 دينار لتشتري بها بطاقات معايدة. ثمن البطاقة الكبيرة 2 500 دينار وثمن الصغيرة 1500 دينار. اكتب متباينة تمثِّل الحالة مستعملاً مجهولَيْن يرمز كل منهما إلى عدد البطاقات من كل نوع. حُل المتباينة بيانيًّا.

2-2 النماذج الخطّية

6. دونّت طبيبة الأطفال، على عدة أسابيع، كم ساعة عملت في الأسبوع، وكم تقاضت بآلاف الدنانير عن عملها. يُبيّن الجدول أدناه هذه المعطيات لأسابيع اختارتها الطبيبة عشوائيًّا.

عدد الساعات	8	23	18	30	12	28
الأجر	152	465	315	530	240	525

أ مثّل هذه المعطيات بنقاط بيانيّة مستعملاً عدد ساعات العمل كمتغيّر حر.

ب استعمل الحاسبة البيانية لتجد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً لهذه المعطيات. ماذا يعني ميل هذا المستقيم للطبيبة؟

ج استعمل المعادلة التي وجدتها لتقدير ما ستتقاضاه الطبيبة لو عملت 40 ساعة في الأسبوع.

2-3 حل أنظمة المتباينات الخطية

حُلّ بيانيًا كل نظام متباينات.

7. $\begin{cases} y-x<3 \\ y+x<3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} y+x\leq 0 \\ y\leq 4-x \end{cases}$

9. $\begin{cases} y\geq 2x+3 \\ y>-x \end{cases}$

2-4 البرمجة الخطّية

في كل مسألة، حدِّد بيانيًّا منطقة الجدوى، ثم حدِّد القيمة الكبرى أو القيمة الصغرى لدالّة المنفعة $P=4x+5y$.

10. $\begin{cases} y\geq 0 \\ y\leq x-1 \\ y\leq -\frac{1}{2}x+4 \end{cases}$ ؛ قيمة صغرى

11. $\begin{cases} x\leq 2 \\ y\geq 0 \\ y\leq 2x+4 \\ y\leq -3x+9 \end{cases}$ ؛ قيمة كبرى

5-2 حل الأنظمة الخطّية بثلاثة مجاهيل

Solving Linear systems in 3 unknowns

الأهداف

يُمثّل في الفضاء الإحداثي حلول نظام خطي بثلاثة مجاهيل.
يحل جبريًّا نظامًا خطّيًّا بثلاثة مجاهيل.

لماذا نتعلم هذا الموضوع ؟

يُمكنك استعمال نظام من 3 معادلات خطية بثلاثة مجاهيل لحل الكثير من مسائل الحياة، كإيجاد نظام تثقيل الدرجات في مباراة الدخول إلى كلية الهندسة (مثال 2)

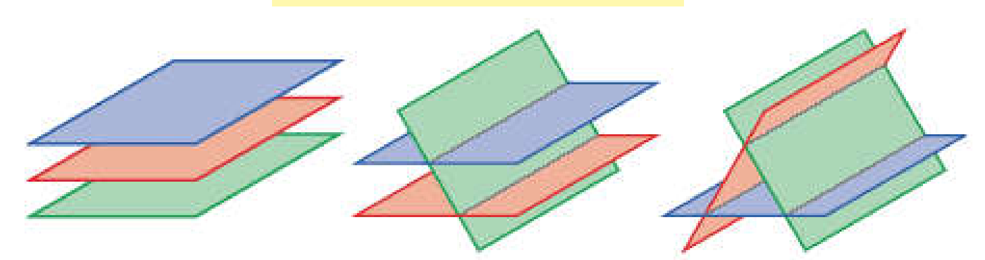


تعلّمت في الصفوف السابقة أن تحل نظامًا خطّيًّا من معادلتَين خطّيّتَين بمجهولين، أو نظامًا خطيًّا 2×2 . غالبًا ما تُسمّى الأنظمة الخطّيَّة من 3 معادلات بثلاثة مجاهيل، الأنظمة 3×3 . لكي تجد حلاً وحيدًا لنظام معادلات خطّية، تحتاج عمومًا أن يكون عدد المعادلات مساويًا لعدد المجاهيل.

تذكر من الفصل السابق أن معادلة خطّية بثلاثة مجاهيل تتمثّل في الفضاء الإحداثي بواسطة مستو. عندما تمثّل، في الفضاء الإحداثي، نظامًا خطّيًّا من 3 معادلات بثلاثة مجاهيل تحصل على 3 مستويات. قد تتقاطع هذه المستويات أو لا. كل نقطة مشتركة بين المستويات الثلاثة تمثّل حلاً للنظام. ينتج من ذلك أنّ النظام قد يكون له حل وحيد أو عدد غير محدود من الحلول، وقد لا يكون له حلول.

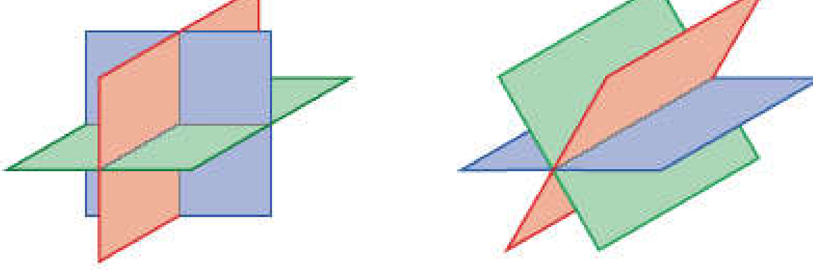


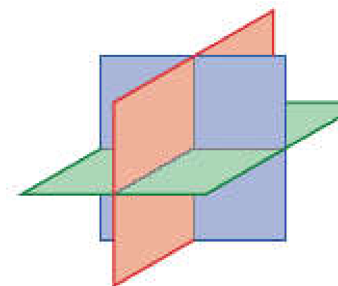
أنظمة مستحيلة (لا حلول لها)



أنظمة غير محدَّدة (عدد غير محدود من الحلول)

أنظمة محدَّدة (حل وحيد)





قد يكون صعبًا تحديد حلول نظام خطّي 3×3 باستعمال تمثيله في الفضاء الإحداثي. لكن بمقدورك أن تحل مثل هذا النظام جبريًّا باستعمال الحذف والتعويض لتحويله من نظام خطّي 3×3 إلى نظام خطي 2×2، ثم حل النظام الحاصل بالطرق التي تعلّمتها سابقًا.

مثـــال 1 حل نظام خطّي من 3 معادلات بثلاثة مجاهيل

استعمل الحذف لحل النظام الخطّي التالي:

$$\begin{cases} x+2y-3z=-2 & ❶ \\ 2x-2y+z=7 & ❷ \\ x+y+2z=-4 & ❸ \end{cases}$$

الخطوة 1 احذف أحد المجاهيل الثلاثة.

يبدو المجهول y مرشّحًا طبيعيًّا للحذف، لأنّ معامليّه في المعادلتين ❶ وَ ❷ متعاكسان.

$$\begin{array}{lr} ❶ & x+2y-3z=-2 \\ ❷ & \underline{2x-2y+z=7} \\ ❹ & 3x\quad -2z=5 \end{array}$$

اجمع المعادلتين ❶ وَ ❷

استعمل المعادلتين ❶ وَ ❸ لإيجاد معادلة ثانية بالمجهولَين x وَ z.

$$\begin{array}{llr} ❶ & x+2y-3z=-2 & x+2y-3z=- \\ ❷ & \underline{-2(x+y+2z=-4)\to} & \underline{2x-2y+\ z=7} \\ ❺ & & 3x\quad -2z=5 \end{array}$$

اضرب المعادلة ❸ في -2 واجمع المعادلة الناتجة مع المعادلة ❶.

لديك الآن نظام خطي 2×2:

$$\begin{cases} 3x-2z=5 & ❹ \\ -x-7z=6 & ❺ \end{cases}$$

الخطوة 2 احذف مجهولاً ثانيًا، وحُل المعادلة الناتجة لتحصل على قيمة المجهول الثالث. احذف المجهول x.

$$\begin{array}{llr} ❹ & 3x-2z=5 & 3x-2z=5 \\ ❺ & \underline{3(-x-7z=6)\to} & \underline{-3x-21z=18} \\ & & -23z=23 \\ & & z=-1 \end{array}$$

اضرب المعادلة ❺ في 3 واجمع المعادلة الناتجة مع المعادلة ❹.

الخطوة 3 استعمل إحدى معادلتَي النظام 2×2 لتحسب قيمة x.

$$\begin{array}{lr} ❶ & -x-7z=6 \\ ❷ & -x-7(-1)=6 \\ & x=1 \end{array}$$

عوّض عن z بقيمته -1.

الخطوة 4 عوّض عن x وَ z بقيمتَيْهما في إحدى معادلات النظام الأصلي لتحسب قيمة y.

$$\begin{array}{lr} ❶ & x+y+2z=-4 \\ ❷ & (1)+y+2(-1)=-4 \\ & y=-3 \end{array}$$

عوّض.

حل النظام هو: $(1, -3, -1)$



1. استعمل الحذف لحل النظام التالي:

$$\begin{cases} -x+y+2z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ -3x-4y+z=4 \end{cases}$$

يُمكنك أيضًا استعمال التعويض لحل نظام خطّي 3×3 . هنا أيضًا، تقضي الفكرة بتحويل النظام 3×3 إلى نظام 2×2 .

مثـــــال 2 تطبيق على مباريات الدخول

المرشح	رياضيات	علوم	لغة إنكليزية	المجموع
سوزان	90	60	70	700
آزاد	60	70	80	590
هشيار	0	60	60	240

يخضع الراغبون في الدخول إلى كلية الهندسة لمسابقة في 3 مواد هي الرياضيات والعلوم واللغة الإنكليزية. لحساب مجاميع المرشَّحين، تعمد اللجنة الفاحصة إلى تثقيل درجة المتباري في كل مادة بثقل (عدد تُضرب فيه الدرجة) قد يختلف عن ثقل درجته في المادتين الباقيتين.

يُبيّن الجدول المقابل درجات 3 مرشحين في المواد الثلاث، ومجموع كل منهم بعد التثقيل. استعمل معطيات الجدول لتجد ثقل كل مادة.

الخطوة 1 ارمز بالمتغيّر x إلى ثقل مادة الرياضيات، وبالمتغيّر y إلى ثقل مادة العلوم، وبالمتغيّر z إلى ثقل مادة اللغة الإنكليزية. اكتب نظام معادلات يُعبّر عن معطيات الجدول.

$$\begin{cases} 90x+60y+70z=700 & (1) \\ 60x+70y+80z=590 & (2) \\ 60y+60z=240 & (3) \end{cases}$$

درجات سوزان.
درجات آزاد.
درجات هشيار.

لاحظ أنّ المتغيّر x غير ظاهر في المعادلة الثالثة، لأنّ هشيار نال 0 في الرياضيات. غياب متغيّر لا يبدِّل في الأمر شيئًا. إذا نظرت إلى المعادلة الثالثة، تلاحظ أنها تسمح بحساب y بدلالة z. هذا الأمر يساعد على استعمال التعويض لتحويل النظام إلى نظام خطّي من معادلتين بمجهولين.

الخطوة 2 احسب المتغيّر y بدلالة المتغيّر z باستعمال المعادلة (3).

$$60y+60z=240$$
$$y=4-z$$

احسب y بدلالة المتغيّر z.

الخطوة 3 عوّض عن y بقيمته في كل من المعادلتين (1) وَ (2).

$$\begin{cases} 90x+60(4-z)+70z=700 \rightarrow \\ 60x+70(4-z)+80z=590 \rightarrow \end{cases} \begin{cases} 90x+10z=460 & (4) \\ 60x+10z=310 & (5) \end{cases}$$

عوّض ثم بسّط

الخطوة 4 استعمل الحذف لحل النظام الذي حصلت عليه، اطرح المعادلة (5) من المعادلة (4).

$$90x+10z=460 \quad (4)$$
$$60x+10z=310 \quad (5)$$
$$30x \quad =150 \quad (6)$$

الخطوة 5 حل المعادلة التي حصلت عليها.

$$30x=150$$
$$x=5$$

الخطوة 6 عوّض عن x بقيمته في المعادلة (4) لحساب قيمة z.

$$90(5)+10z=460$$
$$10z=10$$
$$z=1$$

الخطوة 7 عوّض عن كل من x وَ z بقيمته في المعادلة (1) واحسب قيمة y.

$$90(5)+60y+70(1)=700$$
$$60y=180$$
$$y=3$$

الحل هو $(5, 3, 1)$. ثقل درجة الرياضيات 5 ودرجة العلوم 3 ودرجة اللغة الإنكليزية 1.



2. حدِّد تثقيل كل مادة في مسابقة الدخول إلى كلية الطب وفقًا لمعطيات الجدول أدناه.

المرشح	رياضيات	علوم	لغة إنكليزية	المجموع
شيرين	80	70	50	430
سولاف	70	80	0	370
سانا	90	70	80	490

كان لكل من النظامين في المثالين 1 وَ 2 حل وحيد. لكن قد لا توجد حلول لنظام خطّي 3×3 أو قد يكون له عدد غير محدود من الحلول.

مثـــال 3 تصنيف أنظمة المعادلات الخطّية 3 × 3

صنّف النظام التالي وحدّد عدد حلوله.

$$\begin{cases} 4x-2y+4z=8 & (1) \\ -3x+y-z=-4 & (2) \\ -2x+2y-6z=4 & (3) \end{cases}$$

يُمكن هنا استعمال الحذف لأن معاملَي المتغيّر y في المعادلتين (1) وَ (3) متعاكسان. ابدأ بجمع هاتَين المعادلتَيْن.

$$\begin{array}{rl} 4x-2y+4z=8 & (1) \\ -2x+2y-6z=4 & (3) \\ \hline 2x \quad -2z=12 & (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 4x-2y+4z=8 & \\ 2(-3x+y-z=-4) \rightarrow & \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 4x-2y+4z=8 & \\ -6x+2y-2z=-8 & \\ \hline -2x \quad +2z=0 & (5) \end{array}$$

حصلت على نظام من معادلتَيْن خطّيتَين بمجهولَين.

$$\begin{cases} 2x-2z=12 & (4) \\ -2x+2z=0 & (5) \end{cases}$$

احذف المتغيّر x . اجمع المعادلتين (4) وَ (5) .

$$\begin{array}{rl} (4) & 2x-2z=12 \\ (5) & -2x+2z=0 \\ \hline & 0=12 \ \times \end{array}$$

بما أن 0 لا يُمكن أن يساوي 12، فهذه المساواة خطأ. ينتج من ذلك أنّ النظام مستحيل.

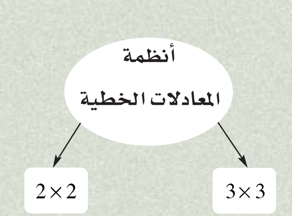


3. صنّف كل نظام وحدِّد عدد حلوله.

أ $\begin{cases} 3x-y+2z=4 \\ 2x-y+3z=7 \\ -9x+3y-6z=-12 \end{cases}$

ب $\begin{cases} 2x-y+3z=6 \\ 2x-4y+6z=10 \\ y-z=-2 \end{cases}$

فكِّرْ وناقش



1. انظر إلى الأنظمة المستحيلة وغير المحدَّدة الممثَّلة في الصفحة الأولى من هذا الدرس. صف وضعية أخرى لثلاثة مستويات تُمثِّل نظامًا مستحيلاً، ووضعية أخرى تُمثِّل نظامًا غير محدَّد.

2. **كن منظّمًا** انسخ الجدول، ثم أكمله بوصف وجوه التشابه ووجوه الاختلاف بين الأنظمة الخطّية 3×3 والأنظمة الخطّية 2×2 .



5–2 التمارين



تمارين موجّهة

انظر المثال 1

استعمِلْ الحذف لحل كل نظام.

1 $\begin{cases} -2x+y+3z=20 \\ -3x+2y+z=21 \\ 3x-2y+3z=-9 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ x+3y+2z=5 \\ x+4y-z=-5 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 2x+y-z=4 \\ x+y+3z=7 \end{cases}$

انظر المثال 2

4 **إدارة أعمال** تبيع إدارة حديقة الحيوانات ثلاثة أنواع من البطاقات: للأطفال واليافعين والكبار. يُبيّن الجدول مبيعات بطاقات الدخول إلى حديقة الحيوانات خلال 3 ساعات. جِد ثمن البطاقة من كل نوع.

الدخول إلى حديقة الحيوانات				
الوقت	الكبار	اليافعون	الأطفال	قيمة المبيعات
16:00–15:00	5	10	12	310 000
17:00–16:00	5	5	4	155 000
18:00–17:00	4	2	3	92 000

انظر المثال 3

صنّف كل نظام خطّي وحدِّد عدد حلوله.

5 $\begin{cases} 2x+4y-2z=4 \\ -x-2y+z=4 \\ 3x+6y-3z=10 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 2x+4y-5z=-10 \\ -x-2y+8z=16 \\ -2x+4y+2z=4 \end{cases}$

7 $\begin{cases} -2x+3y+z=15 \\ x+3y-z=-1 \\ -5x-6y+4z=-16 \end{cases}$

تمــارين وحلُّ مســائـل

تمارين حـرّة	
لحل التمارين	انظر المثال
8- 10	1
11	2
12- 14	3

استعمل الحذف لحل كل نظام.

8 $\begin{cases} 2x-y-3z=1 \\ 4x+3y+2z=-4 \\ -3x+2y+5z=-3 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 5x-6y+2z=21 \\ 2x+3y-3z=-9 \\ -3x+9y-4z=-24 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 4x+7y-z=42 \\ -2x+2y+3z=-26 \\ 2x-3y+5z=10 \end{cases}$

11 **تسلية** في مباراة مطرب المستقبل، تُقوِّم لجنة التحكيم المتبارين بناء على 3 معايير: الموهبة والوقوف على المسرح والأداء. لكل من هذه المعايير نسبة مئوية من التقويم النهائي. يُبيّن الجدول أدناه تقويم ثلاثة متبارين وفقًا لكل معيار بالإضافة إلى التقويم النهائي لكل منهم. ما النسبة المئوية من التقويم النهائي التي تعود إلى كل معيار؟

مباراة مطرب المستقبل				
المتباري	الموهبة	الوقوف على المسرح	الأداء	التقويم النهائي
زانا	8	9	10	9.2
ڤيان	9	7	8	8.1
آراس	6	10	8	7.8

صنّف كل نظام خطّي وحدِّد عدد حلوله.

12 $\begin{cases} 4x-3y+z=-9 \\ -3x+2y-z=6 \\ -x+3y+2z=9 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 3x+3y+3z=4 \\ 2x-y-5z=2 \\ 5x+2y-2z=8 \end{cases}$

14 $\begin{cases} -x+y+z=8 \\ 2x-2y-2z=-16 \\ 2x-y+4z=-6 \end{cases}$

15 **هندسة** يساوي قياس الزاوية A في مثلث ABC ضعف مجموع قياسَي الزاويتَين B و C. كما يساوي قياس الزاوية B ثلاثة أضعاف قياس الزاوية C. ما قياس كل زاوية؟

16 **رياضة** كان لوي دامبيه الأول في تسجيل النقاط في تاريخ الرابطة الأميركية لكرة السلة. يبلغ مجموع نقاطه 726 13 نقطة موزَّعة على سلّة من ثلاث نقاط وسلّة من نقطتين وسلّة من نقطة واحدة. حقّق دامبيه 2144 نقطة في رميات النقطتين زيادة على ما حقَّقه في رميات النقطة الواحدة. وسجَّل 1558 نقطة في رميات النقطة الواحدة زيادة على نقاط رميات الثلاث نقاط. كم نقطة سجَّل دامبيه في كل نوع من الرميات؟

17 **تفكير ناقد** يتألف النظام التالي من معادلتَين بثلاثة مجاهيل $\begin{cases} x+2y+4z=4 \\ 2x+3y+z=12 \end{cases}$

أ صِف ما يحدث عندما تحاول أن تحل هذا النظام.

ب أوضح السبب الذي يحتّم ألاّ يقلّ عدد معادلات نظام خطّي عن عدد المجاهيل، لكي يكون للنظام حل وحيد.

18 **اكتب** يتقاطع مستويان من بين المستويات الثلاثة التي تمثِّل معادلات نظام خطّي 3×3 وفق مستقيم. ما النوع الممكن لمثل هذا النظام؟

19 يُمثِّل النظام أدناه الوجوه الثلاثة (كل معادلة تمثِّل مستويًا) لهرم ثلاثي القاعدة، حيث تقع هذه القاعدة في المستوي الإحداثي $x\,y$ ، وحيث القياسات بالأمتار.

$$\begin{cases} x+y+z=53 \\ 3x-2y+z=69 \\ -x+2y-z=-59 \end{cases}$$

أ) ما إحداثيات رأس الهرم؟

ب) يرغب المهندس في وضع عمود يسند رأس الهرم. ما ارتفاع هذا العمود؟

ج) ما إحداثيات نقطة ارتكاز العمود؟



20 أي نقطة تمثِّل حل النظام $\begin{cases} 2x+y+3z=-1 \\ 4x+2y+3z=1 \\ x-y+4z=-6 \end{cases}$ ؟

أ) $(2, -2, -1)$ ج) $(2, 1, -1)$

ب) $(0, 2, -1)$ د) $(3, -2, 2)$

21 سوزان وميران وسافان أخوات. عمر سوزان ضعف عمر ميران الذي يقل 12 سنة عن عمر سافان. بعد 5 سنوات، سيصبح عمر سافان ضعف عمر ميران. ما عمر كل منهن؟

أ) سوزان 6، ميران 3، سافان 15 ج) سوزان 5، ميران 10، سافان 22

ب) سوزان 34، ميران 17، سافان 29 د) سوزان 14، ميران 7، سافان 19

22 **جواب مختصر** ما قيمة x في حل النظام $\begin{cases} x+4y=6 \\ 2x+3z=12 \\ 4y+z=10 \end{cases}$ ؟

تحدٍّ وتوسّع

23 استعمل الطريقة التي تراها مناسبة لحل النظام

$$\begin{cases} w+2x+2y+z=-2 \\ w+3x-2y-z=-6 \\ -2w-x+3y+3z=6 \\ w+4x+y-2z=-14 \end{cases}$$

24 **اقتصاد** وظّف 3 أصدقاء أموالاً في 3 أنواع من الأوراق المالية: أ، ب، ج. وظّف كل منهم مليون دينار موزّعًا المبلغ على الأنواع الثلاثة. يُبيّن الجدول أدناه كم وظّف كل منهم في كل نوع من الأوراق المالية، وما ربحه في نهاية العام. ما النسبة المئوية لمردود كل نوع؟

التوظيف في الأوراق المالية				
الشخص	أ	ب	ج	الربح
آزاد	300 000	300 000	400 000	56 000
نوزاد	600 000	200 000	200 000	76 000
دلسوز	100 000	300 000	600 000	30 000

مراجعة لولبية

ما إحداثيّا صورة النقطة، $(-3, 2)$ بكل سحب؟ (الصفوف السابقة)

25 6 وحدات إلى اليمين، وحدة واحدة إلى أعلى

26 4 وحدات إلى اليسار، وحدتان إلى أسفل

27 **بناء** كانت قياسات المطبخ على مخطط الدار $11cm$ في $8cm$. ما القياسات الحقيقية للمطبخ إذا كان مقياس الرسم $1cm:0.65m$ ؟ (الصفوف السابقة)

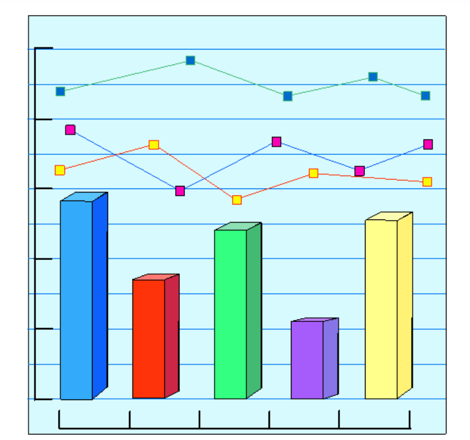
اكتب كل معادلة على صورة الميل - التقاطع، ثم ارسم المستقيم الذي يمثّلها. (الصفوف السابقة)

28 $4x-3y=-6$

29 $3y-2x=-12$

30 $2x+5y=15$

6-2 القياسات الإحصائيَّة
Statistical Measurements



الأهداف

يجد قياسات النزعة المركزية وقياسات التشتُّت لمجموعة معطيات إحصائية.

يدرس تأثير وجود قيم متطرِّفة في مجموعة معطيات.

المفردات
Vocabulary

المتوسط المُثقّل
Weighted average

التوزيع الاحتمالي
Propability Distribution

التباين
Variance

الانحراف المعياري
Standard Deviation

القيم المتطرِّفة
Outliers

القيمة المتوقَّعة
Expected value

الربيع
Quartile

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل الإحصائيون قياسات النزعة المركزية وقياسات التشتُّت لتحليل المعطيات الإحصائية. (مثال 2)

تذكَّر أن المتوسط والوسيط والمنوال هي من قياسات النزعة المركزية، أي إنها قياسات تصف مركز مجموعة من المعطيات.

المتوسط Mean هو ناتج قسمة مجموع القيم على عددها. يُشار إليه عادة بالرمز $\overline{x}$. **المنوال Mode** هو القيمة الأكثر تردُّدًا في المجموعة، يمكن أن يكون لمجموعة المعطيات أكثر من منوال، كما يمكن ألاّ يكون لها أي منوال. **الوسيط Median** هو القيمة الواقعة في وسط القيم عندما يتم ترتيبها صعودًا أو نزولاً إذا كان عدد القيم فرديًّا؛ ومتوسِّط القيمتَيْن الواقعتَيْن في الوسط إذا كان هذا العدد زوجيًّا.

مثال 1 إيجاد مقاييس النزعة المركزية

جد المتوسط والوسيط والمنوال لمجموعة المعطيات التالية:

{6، 4، 3، 4، 2، 5، 3، 4، 5، 2، 3، 4}

المتوسط: $\overline{x} = \frac{4+3+2+5+4+3+5+2+4+3+4+6}{12} = \frac{45}{12} = 3.75$

الوسيط: 2 2 3 3 3 4 : 4 4 4 5 5 6 : $\frac{4+4}{2} = 4$

المنوال: القيمة الأكثر تردُّدًا هي 4. المنوال هو 4.



1. جد المتوسط والوسيط والمنوال لكل مجموعة معطيات.

أ {6، 9، 3، 8}   ب {2، 5، 6، 2، 6}

المتوسط المُثقّل Weighted average هو المتوسط الذي يُحسب مراعيًا تكرار كل قيمة.

افترض أنه تم تقويم 30 كتابًا كما هو مبيّن في الجدول التالي:

تقويم الكتب					
التقويم	★★★★	★★★	★★	★	بلا نجوم
عدد الكتب	8	12	7	2	1

المتوسِّط المثقَّل لتقويم الكتب هو $\frac{8(4)+12(3)+7(2)+2(1)+1(0)}{8+12+7+2+1} = \frac{84}{30} = 2.8$

يسمّى المتوسط المثقّل لمجموعة من القيم العددية الناتجة عن تجربة ما، **القيمة المُتوقَّعة Expected value** لهذه التجربة. فالقيمة المنتظرة، مثلاً، لعدد النجوم التي يحوزها كتاب تم اختياره عشوائيًّا من الكتب الثلاثين هي 2.8.

التوزيع الاحتمالي Probability distribution لتجربة عشوائية هو دالّة تقرن كل نتيجة ممكنة من نتائجها بعدد يمثِّل احتمال تحقُّقه.

مثـــال 2 إيجاد القيمة المتوقعة

يُبيّن الجدول أدناه التوزيع الاحتمالي لعدد الألعاب في كل من الدورات العالمية في السنوات من 1923 إلى 2004. ما العدد المتوقَّع للألعاب في دورة واحدة؟

الدورات العالمية				
عدد الألعاب n	4	5	6	7
احتمال n لعبة	$\frac{5}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{11}{27}$

القيمة المتوقَّعة: $4\left(\frac{5}{27}\right)+5\left(\frac{5}{27}\right)+6\left(\frac{6}{27}\right)+7\left(\frac{11}{27}\right)$ استعمل المتوسِّط المثقلّ

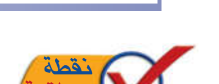
$=\frac{20}{27}+\frac{25}{27}+\frac{36}{27}+\frac{77}{27}=\frac{158}{27}\approx 5.85$ بسِّط

العدد المتوقَّع للألعاب خلال دورة واحدة هو 5.85 تقريبًا.

اضاءة

مجموع كل الاحتمالات في أيّ توزيع احتمالي يساوي 1. في المثال 2، نجد أن:

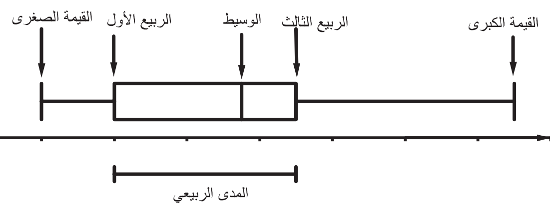
$\frac{5}{27}+\frac{5}{27}+\frac{6}{27}+\frac{11}{27}=1$



2. يُبيّن الجدول أدناه التوزيع الاحتمالي لعدد حوادث السير في الأسبوع عند أحد تقاطعات الطرق، بالاستناد إلى إحصائيات السنوات الماضية. جِد القيمة المتوقّعة لعدد الحوادث في أسبوع.

عدد الحوادث n	0	1	2	3
احتمال وقوع n حادثًا	0.75	0.15	0.08	0.02

بيان الشاربين box-and-whisker-plot مخطَّط يمثِّل توزُّع مجموعة معطيات. يُظهر هذا البيان 5 نقاط أساسية: القيمة الكبرى والقيمة الصغرى، الوسيط، الربيعين الأول والثالث.

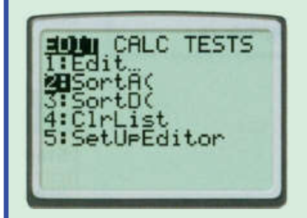


الرُّبَيْع الأول First quartile هو وسيط القيم الأصغر من وسيط المجموعة، ورمزه Q_1.

الرُّبَيْع الثالث Third quartile هو وسيط القيم الأكبر من وسيط المجموعة، ورمزه Q_3.

المدى الرُّبَيْعيّ Interquartile range هو الفرق بين الربيع الثالث والربيع الأول، أي Q_3-Q_1، وهو يمثل 50٪ من المعطيات.

من طالب إلى طالب رسم بيان الشاربين



عليك أن ترتب المعطيات قبل البدء بإنشاء بيان الشاربين. أدخل المعطيات إلى الحاسبة البيانية باستعمال وظيفة اللائحة. استعمل بعد ذلك خيار الترتيب من بين خيارات STAT لترتيب المعطيات صعودًا.

يُمكنك أيضًا أن تستعمل برنامجًا حاسوبيًّا مثل EXCEL لترتيب المعطيات.

مثـــال 3 إنشاء بيان الشاربَيْن وتحديد المدى الربيعي

أنشئ بيان الشاربين وحدِّد المدى الرُّبيعي لمعطيات المجموعة.

$\{5, 3, 9, 2, 14, 6, 8, 9, 5, 8, 13, 3, 15, 7, 4, 2, 12, 8\}$

الخطوة 1 رتِّب المعطيات صعودًا.

2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 12, 13, 14, 15

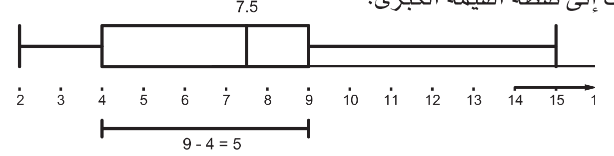
الخطوة 2 جد القيمتَيْن الكبرى والصغرى والوسيط والربيعَيْن الأول والثالث.

(2، 2، 3، 3، 4، 5، 5، 6، 7)، (8, 8, 8, 9, 9, 12, 13, 14, 15)

القيمة الصغرى 2 — الربيع الأول 4 — الوسيط 7.5 — الربيع الثالث 9 — القيمة الكبرى 15

الخطوة 3 أنشئ بيان الشاربين.

ارسم محور الأعداد ثم ارسم نقطة فوق كل قيمة من القيم الخمس. ارسم بعد ذلك المستطيل ما بين نقطة الربيع الأول ونقطة الربيع الثالث، مع قطعة مستقيمة عمودية عند الوسيط. أخيرًا، ارسم الشاربين من نقطة الربيع الأول إلى نقطة القيمة الصغرى، ومن نقطة الربيع الثالث إلى نقطة القيمة الكبرى.



المدى الربيعي هو 5: إنّه المسافة بين الربيعين الأول والثالث، أي طول المستطيل.



3. أنشئ بيان الشاربَيْن، وحدِّد المدى الربيعي لمعطيات المجموعة.

$\{13, 12, 17, 15, 12, 13, 19, 11, 14, 14, 18, 22, 23\}$

يمكن أن يكون لمجموعتي معطيات، مثل $\{19, 20, 21\}$ وَ $\{0, 20, 40\}$ ، المتوسط نفسه والوسيط نفسه، مع كونهما مختلفين كليًّا. لذا، يولي الإحصائيون أهمية كبرى لتشتُّت المعطيات خارج المتوسط أو الوسيط. وقد أدخلوا، من أجل ذلك، قياسات جديدة للتعبير عن التشتت. من هذه القياسات **المدى والمدى الربيعي والتباين والانحراف المعياري.**

التباين Variance، ويرمز إليه بالرمز σ^2 ، هو متوسِّط تربيعات المسافات بين المتوسط ومختلف القيم. **الانحراف المعياري Standard deviation**، ويرمز إليه بالرمز σ، هو الجذر التربيعي للتباين، وهو من أكثر القياسات الإحصائية فائدة واستعمالاً.

يدل صغر قيمة الانحراف المعياري على وجود أكثرية المعطيات في جوار قياسات النزعة المركزية، بينما يدل كبر هذه القيمة على تشتّت المعطيات بعيدًا عن هذه القياسات.

قــراءة

يستعمل الإحصائيون الرمز $\bar{x}$ (اقرأ إكس بار) للدلالة على المتوسط، والحرف اليوناني σ (اقرأ سيغما) للدلالة على الانحراف المعياري.

إيجاد التباين والانحراف المعياري	
الخطوة 1	جد متوسط المعطيات.
الخطوة 2	جد الفرق بين المتوسط وكل من المعطيات، واحسب تربيعه.
الخطوة 3	جد التباين σ^2 عن طريق جمع الأعداد التي حصلت عليها في الخطوة 2 وقسمتها على عددها.
الخطوة 4	جد الانحراف المعياري بحساب الجذر التربيعي للتباين.

مثــــال 4 إيجاد المتوسِّط والانحراف المعياري

تُمثِّل المجموعة $\{14, 13, 16, 9, 3, 7, 11, 12, 11, 4\}$ نسب مادة معيّنة في دم مريض على مدى 10 أيام. جِد متوسط هذه المعطيات وانحرافها المعياري.

الخطوة 1 جِد المتوسط.

$$\bar{x} = \frac{4+11+12+11+7+3+9+16+13+14}{10} = 10$$

الخطوة 2 جِد الفرق بين المتوسط وكل قيمة، ثم احسب تربيعه.

القيمة x	4	11	12	11	7	3	9	16	13	14
$x-\bar{x}$	−6	1	2	1	−3	−7	−1	6	3	4
$(x-\bar{x})^2$	36	1	4	1	9	49	1	36	9	16

الخطوة 3 جِد التباين.

$$\sigma^2 = \frac{36+1+4+1+9+49+1+36+9+16}{10} = 16.2$$

جِد متوسط قيم الصف الأخير في الجدول أعلاه.

الخطوة 4 جِد الانحراف المعياري.

$$\sigma = \sqrt{16.2} \approx 4.02$$

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين.

متوسط هذه المعطيات هو 10، وانحرافها المعياري هو 4.02 تقريبًا.



4. جِد المتوسط والانحراف المعياري للمعطيات أدناه حول عدد المرات التي يتوقف فيها المصعد في نقلات متعددة. $\{0, 3, 1, 1, 0, 5, 1, 0, 3, 0\}$

القيم المتطرفة Outiliers في مجموعة معطيات، قيم تقع خارج سياق أكثرية قيم المجموعة، كأن تكون أكبر بكثير منها أو أصغر بكثير منها. يؤثر وجود مثل هذه القيم بشدة على المتوسط والانحراف المعياري. إذا كانت قيمة متطرفة ناتجة عن خطأ في القياس، يعمد الإحصائيون إلى حذفها. هناك طرائق عدة لتحديد ما إذا كانت قيمة متطرفة. من هذه الطرق اعتبار القيم التي تبعد عن المتوسط ثلاثة أضعاف الانحراف المعياري قيمًا متطرفة.

مثــــال 5 دراسة القيم المتطرفة

تُبيّن المجموعة أدناه الدرجات التي نالها طلاب الصف العاشر في اختبار الرياضيات: $\{51, 55, 56, 53, 56, 48, 56, 48, 54, 47, 50, 96, 57, 58, 59, 45, 51\}$

الخطوة 1 أدخل المعطيات في اللائحة L1 في الحاسبة البيانية.

الخطوة 2 جد المتوسط والانحراف المعياري. اضغط STAT ثم اختر CALC. ثم اختر 1:1-variable. اضغط ENTER فتحصل على الشاشة المقابلة.

المتوسط: 55.29 تقريبًا

الانحراف المعياري: 10.92 تقريبًا



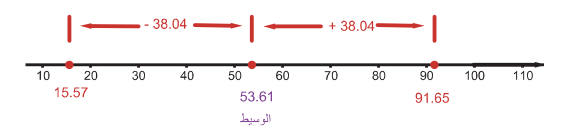
الخطوة 3 حدِّد القيم المتطرفة.

ابحث عن القيم التي تبعد عن المتوسط 3 أمثال الانحراف المعياري.

3 أمثال الانحراف المعياري هو $3 \times 10.92 = 32.76$ تقريبًا.

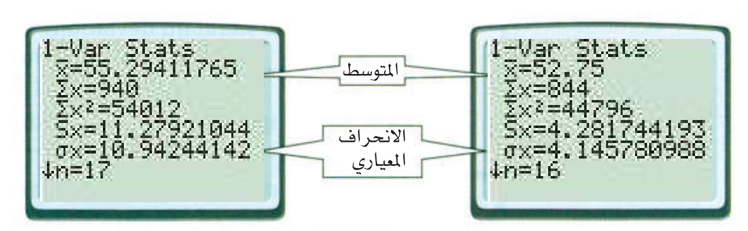


يتم إدخال المعطيات في الحاسبة البيانية بالضغط على STAT واختيار 1:Edit ...



القيم المتطرفة هي القيم التي تزيد على $32.76+55.29=88.05$ أو تقلّ عن $55.29-32.76=22.53$. هناك قيمة متطرِّفة واحدة هي 96.

الخطوة 4 احذف القيمة المتطرفة لتتبيّن تأثيرها في المتوسط والانحراف المعياري.



أدى وجود القيمة المتطرفة إلى رفع المتوسط من 52.75 إلى 92.55، وإلى رفع الانحراف المعياري من 4.16 إلى 10.92.

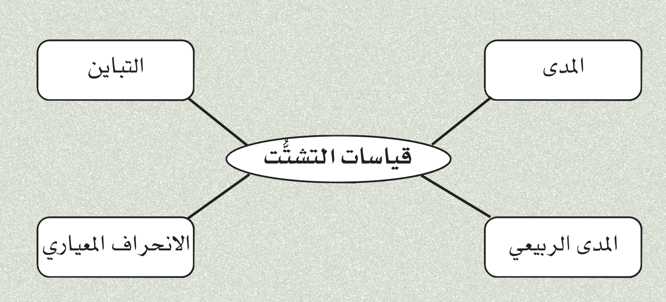


5. حدِّد القيم المتطرِّفة في مجموعة المعطيات $\{3, 19, 4, 4, 2, 3\}$ ، وأوضح كيف تؤثر في قيمة كل من المتوسط والانحراف المعياري.

فكرْ وناقش

1. أوضح تأثير إضافة العدد نفسه إلى كل قيمة في مجموعة معطيات على متوسط هذه المجموعة.
2. أوضح تأثير إضافة العدد نفسه إلى كل قيمة في مجموعة معطيات على الانحراف المعياري لهذه المجموعة.
3. ما تأثير مضاعفة التباين على الانحراف المعياري؟
4. **كن منظّمًا** انسخ المخطّط وأكمله. اكتب في كل إطار تعريفًا لما يحتويه، ومثالاً عليه.





6-2 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** مقياس التشتُّت الأكثر استعمالاً هو ـــــــ (التباين أو الانحراف المعياري)

انظر المثال 1

جِد لكل مجموعة معطيات، المتوسط والوسيط والمنوال.

2 $\{5,7,4,7,6,7\}$

3 $\{2,4,4,6,6,6,7,8\}$

4 $\{10,14,18,22,26\}$

انظر المثال 2

5 جِد القيمة المتوقّعة للجائزة.

نيل الجوائز						
القيمة	0	1 000	5 000	20 000	100 000	1 000 000
الاحتمال	0.9359	0.05	0.01	0.003	0.001	0.0001

انظر المثال 3

أنشئ بيان الشاربَيْن لكل مجموعة معطيات، وجِد المدى الربيعي.

6 $\{3, 5, 2, 2, 8, 9, 1, 11\}$

7 $\{2, 4, 1, 4, 2, 2, 7, 4\}$

8 $\{33, 34, 31, 27, 22\}$

انظر المثال 4

جِد التباين والانحراف المعياري لكل مجموعة معطيات.

9 $\{3, 3, 4, 5, 5\}$

10 $\{10, 12, 14, 15, 18, 20, 23\}$

11 $\{7, 14, 21, 28, 35, 42\}$

انظر المثال 5

12 **قياس** طلب معلم الصف الرابع إلى تلاميذه أن يقيسوا بالسنتيمتر طول الطاولة التي يجلسون إليها. دوّن المعلم قياسات التلاميذ على الشكل التالي: 49، 50، 49، 48، 19، 50، 49، 48، 50، 49، 50. حدِّد القيم المتطرِّفة، واشرح كيف تؤثِّر في قيمة كل من المتوسط والانحراف المعياري.



تمارين وحلُّ مسائل

التمارين الحرة	
لحل التمارين	أنظر المثال
15-13	1
16	2
19-17	3
22-20	4
23	5

جِد لكل مجموعة معطيات، المتوسط والوسيط والمنوال.

13 $\{4, 16, 25, 9, 36, 49\}$

14 $\{5, 10, 15, 20, 25\}$

15 $\{1, 7, 7, 2, 3, 14, 127, 8\}$

16 جِد العدد المتوقّع لعدد مرات الحصول على الصورة.

رمي 3 قطع نقود معدنية				
عدد المرات	0	1	2	3
الاحتمال	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

أنشئ بيان الشاربَيْن لكل مجموعة معطيات، وجِد المدى الربيعي.

17 $\{12, 15, 12, 6, 18, 29\}$

18 $\{2, 2, 3, 8, 2, 8, 2, 42\}$

19 $\{3, 4, 3, 1, 2\}$

جِد التباين والانحراف المعياري لكل مجموعة معطيات.

20 $\{4, 4, 4, 4, 5\}$

21 $\{8, 12, 30, 35, 48, 50, 62\}$

22 $\{14, 26, 40, 52\}$

23 **كرة سلّة** لعب آرى 13 مباراة في كرة السلّة وحقّق النقاط التالية: 24، 16، 9، 17، 17، 23، 20، 26، 17، 14، 58، 27، 28. جِد المتوسط والانحراف المعياري. حدِّد القيم المتطرِّفة، واشرح تأثيرها في قيمة كل من المتوسط والانحراف المعياري.

24 **تفكير ناقد** اكتب مجموعة معطيات لا يكون المتوسط ولا الوسيط من بينها.

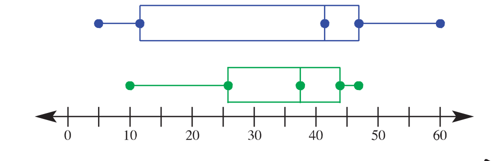
25 **تسوُّق** ذهب هريم إلى السوق لشراء ميزان دقيق لقياس درجة حرارة الغرفة. وجد في أحد المحال 4 موازين تدل على درجات الحرارة التالية 25، 26، 24، 8. أي مقياس من مقاييس النزعة المركزية لا ينبغي لهريم أن يستعمله ليختار الميزان المناسب؟

يعتبر بعض الإحصائيين أن قيمة من قيم مجموعة معطيات هي قيمة متطرِّفة إذا قلَّت عن (الربيع الأول − 1.5 × المدى الربيعي) أو زادت على (الربيع الثالث + 1.5 × المدى الربيعي). أي من قيم كل مجموعة هي قيمة متطرِّفة بنظر هؤلاء الإحصائيين؟

26 $\{2, 3, 4, 5, 5, 25\}$

27 $\{91, 90, 79, 15, 82, 90, 88\}$

28 $\{1, 36, 34, 33, 35, 92\}$



استعمل بيانَي الشاربَيْن المقابلَيْن، والعائدَين إلى مجموعتَي معطيات، لحل التمارين من 29 إلى 32.

29 أي مجموعة لها القيمة الكبرى؟ بكم تزيد هذه القيمة على القيمة الكبرى للمجموعة الأخرى؟

30 أي مجموعة وسيطها هو الأكبر؟ قدّر بكم هو أكبر من وسيط المجموعة الأخرى.

31 قدّر المدى الربيعي لكل مجموعة.

32 أي مجموعة لها الانحراف المعياري الأصغر؟ أوضح ذلك.

33 حظك في ربح جائزة النصف مليون دينار هو 0.1% ، في حين أن حظك في خسارة الألف دينار التي دفعتها ثمن البطاقة، هو 99.9% . ما القيمة المتوقعة لربحك: (مساعدة: هناك قيمتان ممكنتان لربحك: 500 000 وَ 1000−)

34 حظك في ربح جائزة المئة ألف دينار هو 10% ، وحظك في خسارة 2000 دينار هو 30% . وهناك احتمال 60% في أن تتوقف اللعبة. ما القيمة المتوقعة لربحك؟

35 **خطأ في التحليل** في ما يلي محاولتان لإيجاد الانحراف المعياري للمعطيات 4، 6، 8، 10. أي محاولة خطأ؟ أوضح الخطأ.

(أ)

$7-4=3 \rightarrow 9$
$7-6=1 \rightarrow 1$
$7-8=-1 \rightarrow 1$
$7-10=-3 \rightarrow 9$
20
$20 \div 4 = 5$
$\sqrt{5} \approx 2.24$

(ب)

$7-4=3 \rightarrow 3$
$7-6=1 \rightarrow 1$
$7-8=-1 \rightarrow 1$
$7-10=-3 \rightarrow 3$
8
$8 \div 4 = 2$
$\sqrt{2} \approx 1.4$

36 **اكتب** هل تكون القيمة المتوقَّعة لمجموعة معطيات واحدًا من هذه المعطيات دومًا؟ هل تنتمي أحيانًا إلى هذه المجموعة أم لا تنتمي أبدًا؟ أعطِ مثالاً يدعم جوابك.

37 تقوم لعبة على رمي مكعَّبَي أعداد وضرب العددَين الظاهرين.

أ) ما القيمة المتوقَّعة في هذه اللعبة؟
ب) ما احتمال أن يكون أحد نواتج الضرب أكبر من القيمة المتوقَّعة؟
ج) ما احتمال أن يكون أحد نواتج الضرب أصغر من القيمة المتوقَّعة؟
د) هل جوابا السؤالين ب) وَ ج) متساويان؟ أوضح ذلك.

38 يُبيّن الجدول معدلات تساقط المطر السنوية (بالسنتيمتر) من 1994 إلى 2003 في إحدى المدن.

السنة	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
المعدل	9.4	17.0	7.3	7.0	16.1	5.4	6.9	8.5	4.2	9.2

أ) جِد المتوسط والانحراف المعياري لهذه المعطيات.
ب) في أي سنوات كان بعد المعدل عن المتوسط أكبر من الانحراف المعياري؟
ج) جِد وسيط هذه المعطيات ومداها الربيعي.



39 أي مجموعة معطيات لها الانحراف المعياري الأصغر؟

أ) $\{1, 5, 7, 50\}$
ب) $\{100, 200, 300, 400\}$
ج) $\{2, 10, 102, 110\}$
د) $\{100, 101, 102, 105\}$

40 أي مما يلي لا يصح على مجموعتَي المعطيات $\{0, 48, 49, 50, 51, 52, 100\}$ وَ $\{0, 1, 2, 50, 98, 99, 100\}$

أ) لهما المتوسِّط نفسه.
ب) لهما المدى نفسه.
ج) لهما التباين نفسه.
د) لهما الوسيط نفسه.

41 كان متوسط نتائج أحد الاختبارات 50. أي مما يلي لا يمكن أن يكون صحيحًا؟

أ) نصفها كان صفرًا والنصف الثاني مئة.
ب) كان المدى 50.
ج) نصف النتائج كان 25 والنصف الآخر 50.
د) جميعها كانت 50.

تحدٍّ وتوسّع

42 مجموعة معطيات متوسطها 4 ووسيطها 3 وانحرافها المعياري 1.6.

أ) افترض أنك ضربت كل قيمة في 5، فكم سيكون متوسِّط المجموعة الجديدة؟ وسيطها؟ انحرافها المعياري؟

ب) افترض أنك أضفت 5 إلى كل قيمة، فكم سيكون متوسِّط المجموعة الجديدة؟ وسيطها؟ انحرافها المعياري؟

مراجعة لولبية

43 **تجارة** تعمل سارة في إحدى المكتبات الكبرى. تتقاضى سارة 000 725 دينار في الشهر يُضاف إليها 1750 دينارًا عن كل كتاب تبيعه. قبضت سارة 000 425 1 دينار الشهر الماضي. كم كتابا باعت؟ (الصفوف السابقة)

جد كل ناتج ضرب. (الصفوف السابقة)

44 $(2-x^2)(2x^2+5x-3)$

45 $4xy^2(x^2y+3x^2-2y)$

تم رمي مكعب أعداد. ما احتمال كل حدث؟

46 الحصول على 1 أو عدد زوجي.

47 الحصول على 4 أو عدد فردي.

48 الحصول على عدد يقبل القسمة على 2 أو 6.



جمع المعطيات اختباريًّا

Collecting Experimental Data

يُمكنك القيام بتجربة لتوليد معطيات وتجميعها وتنظيمها، ثم تحليلها لصوغ مقولات في الرياضيات.

نشاط 1

أنشئ جدولاً بمجاميع العددين الناتجين عن رمي نردين.

النرد الأزرق (أعمدة)، النرد الأحمر (صفوف)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

1 صف كل تناظر تلاحظه على الجدول.

2 استعمل الاحتمال النظري لإنشاء توزيع احتمالي.

المجموع	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
احتماله	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

3 استعمل التوزيع الاحتمالي السابق لإيجاد القيمة المتوقّعة.

4 ما المجموع الأكبر احتمالاً وما المجموع الأقل احتمالاً؟

5 هل هناك مجاميع تتساوى في الاحتمال؟ اذكرها إن وجدت.

حاول

1 ارمِ نردَين 36 مرة، ودوّن النتائج في جدول.

2 أنشئ توزيعًا احتماليًّا باستعمال النتائج التي توصّلت إليها.

3 استعمل التوزيع الاحتمالي الذي حصلت عليه في السؤال 7، لإيجاد القيمة المتوقّعة.

استند إلى الاختبار الذي قمت به للإجابة عن الأسئلة التالية:

4 ما المجموع الأكبر احتمالاً؟ وما المجموع الأقل احتمالاً؟

5 هل هناك مجاميع تتساوى في الاحتمال؟ اذكرها إن وجدت.

6 قارن بين النتائج التي حصلت عليها والنتائج النظرية.

7 تشارك مع عدد من زملائك في نتائج الاختبارات التي قام بها كل منكم. قارن بين النتائج التي حصلتم عليها بعد التجميع وبين ما حصلت عليه نتيجة اختبارك. قارن بينها وبين النتائج النظرية.

7-2 التوزيعات الثنائية

Binomial Distributions



الأهداف

يستعمل مبرهنة ثنائية الحدود لنشر حدودية ثنائية الحدود.
يجد الاحتمالات الثنائية ويختبر الفرضيات.

المفردات
Vocabulary

مبرهنة ذات الحدين
Binomial theorem

التجربة الثنائية
Binomial experiment

الاحتمال الثنائي
Binomial probability

لماذا نتعلم هذا الأمر؟

يُمكنك استعمال التوزيعات الثنائية لتحديد حظك في ربح جوائز العروض التجارية. (مثال 3)

تعلّمت في الصف العاشر ضرب الحدوديات.
سوف تتعلم الآن حالة خاصة من ضرب الحدوديات وهي نشر قوى ثنائيات الحدود.

مثـــال 1 نشر قوى ثنائيات الحدود

انشر $(x+y)^3$.

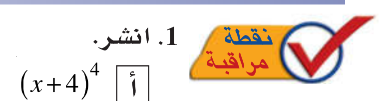
$$(x+y)^3=(x+y)(x+y)(x+y)$$ اكتب على صورة ضرب.

$$=(x+y)\left(x^2+2xy+y^2\right)$$ اضرب عاملين.

$$=x\left(x^2\right)+x(2xy)+x\left(y^2\right)+y\left(x^2\right)+y(2xy)+y\left(y^2\right)$$ وزّع.

$$=x^3+2x^2y+xy^2+x^2y+2xy^2+y^3$$ اضرب.

$$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$ بسّط.



1. انشر.

أ $(x+4)^4$ ب $(2x-1)^3$

تفحّص عوامل نشر $(x+y)^3$. إنها الأعداد الموجودة على الصف من الرتبة 3 في مثلث باسكال.

مثلث باسكال	نشر قوى ثنائية الحدود	
1	1	$(a+b)^0=$
1 1	$a+b$	$(a+b)^1=$
1 2 1	$a^2+2ab+b^2$	$(a+b)^2=$
1 3 3 1	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$(a+b)^3=$
1 4 6 4 1	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	$(a+b)^4=$
1 5 10 10 5 1	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$	$(a+b)^5=$

تُشكِّل الأعداد الواردة في كل صف من صفوف مثلّث باسكال معاملات نشر قوة ثنائية الحدود بأسّ يساوي رتبة الصف (لاحظ أن رتب صفوف باسكال تبدأ بالصفر وليس بـ 1).
يُمكن استكمال النمط في صفوف مثلّث باسكال للحصول على معاملات نشر قوة ثنائية الحدود بأي أس كان $(a+b)^n$ حيث n عدد صحيح غير سالب.



نشر قوى ثنائية الحدود

عند نشر $(a+b)^n$، تذكّر ما يلي:

1. عدد الحدود في نشر $(a+b)^n$ هو $n+1$.
2. معاملات نشر $(a+b)^n$ هي أعداد مثلث باسكال في الصف n .
3. أس قوة a هو n في الحد الأول ثم ينقص واحدًا كلما انتقلنا حدًّا.
4. أس قوة b هو الصفر في الحد الأول، ثم يزيد واحدًا كلما انتقلنا حدًّا.
5. مجموع أس قوة a وقوة b في كل حد يساوي n.

من طالب إلى طالب — نشر قوى ثنائيات الحدود

أستعمل مخطَّطًا لنشر قوى ثنائية الحدود. سوف أستعمل $(x+y)^4$ كمثال.
أكتب، في الصف الأول من الجدول، الأعداد الواردة في الصف 4 من مثلّث باسكال. أكتب في الصف الثاني من الجدول قوى x بالترتيب التنازلي للأس انطلاقًا من اليسار. في الصف الثالث من الجدول، أبدأ بكتابة قوى y بالترتيب التنازلي للأس انطلاقًا من اليمين.
أخيرًا، أضرب الحدود في كل عمود لأحصل على $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$.

1	4	6	4	1
x^4	x^3	x^2	x	
	y	y^2	y^3	y^4

مثـــال 2 استعمال مثلَّث باسكال لنشر قوى ثنائية الحدود

انشر القوة ثنائية الحدود.

أ $(y-3)^4$

1 4 6 4 1 — اكتب أعداد الصف 4 من مثلث باسكال

$$\left[1(y)^4(-3)^0\right]+\left[4(y)^3(-3)^1\right]+\left[6(y)^2(-3)^2\right]+\left[4(y)^1(-3)^3\right]+\left[1(y)^0(-3)^4\right]$$

$$y^4-12y^3+54y^2-108y+81$$

ب $(4z+5)^3$

1 3 3 1 — اكتب أعداد الصف 3 من مثلث باسكال

$$\left[1(4z)^3(5)^0\right]+\left[3(4z)^2(5)^1\right]+\left[3(4z)^1(5)^2\right]+\left[1(4z)^0(5)^3\right]$$

$$64z^3+240z^2+300z+125$$

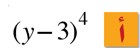
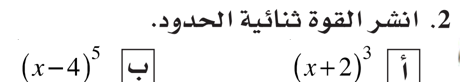
نقطة مراقبة

2. انشر القوة ثنائية الحدود.

أ) $(x+2)^3$ ب) $(x-4)^5$ ج) $(3x+1)^4$

من ناحية أخرى، هناك علاقة بين مثلَّث باسكال وأعداد التوافيق.

نشر قوى ثنائية الحدود		التوافيق	مثلَّث باسكال
$(a+b)^0 = 1$	1	${}_0C_0$	1
$(a+b)^1 = 1$	$a+b$	${}_0C_0 \quad {}_1C_1$	1 1
$(a+b)^2 = 1$	$a^2+2ab+b^2$	${}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2$	1 2 1
$(a+b)^3 = 1$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	${}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3$	1 3 3 1




يُمكنك أن تستلهم نمط الجدول السابق لنشر قوة ثنائية حدود باستعمال **مبرهنة ثنائية الحدود.**



مبرهنة ثنائية الحدود

أيًّا يكن العدد الصحيح غير السالب n، فإن

$$(x+y)^n = {}_nC_0x^ny^0 + {}_nC_1x^{n-1}y^1 + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \ldots + {}_nC_{n-1}x^1y^{n-1} + {}_nC_nx^0y^n$$

مثـــال 3 نشر قوى ثنائيات الحدود

استعمل مبرهنة ثنائية الحدود لنشر القوة ثنائية الحدود.

أ $(x+y)^4$

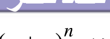
1 4 6 4 1 اكتب أعداد الصف 4 من مثلث باسكال.

$$(x+y)^4 = {}_4C_0x^4y^0 + {}_4C_1x^3y^1 + {}_4C_2x^2y^2 + {}_4C_3x^1y^3 + {}_4C_4x^0y^4$$
$$= 1x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1x^0y^4$$
$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

ب $(3p+q)^3$

1 3 3 1 اكتب أعداد الصف 3 من مثلث باسكال.

$$(3p+q)^3 = {}_3C_0(3p)^3q^0 + {}_3C_1(3p)^2q^1 + {}_3C_2(3p)^1q^2 + {}_3C_3(3p)^0q^3$$
$$= 1\times27p^3\times1 + 3\times9p^2q + 3\times3pq^2 + 1\times1q^3$$
$$= 27p^3 + 27p^2q + 9pq^2 + q^3$$



عند نشر $(x+y)^n$،
يتناقص أس x من n إلى 0
ويتزايد أس y من 0 إلى n.
كما أن جمع الأسين في كل حد
هو n.



3. استعمل مبرهنة ثنائية الحدود لنشر القوة ثنائية الحدود.

أ $(x-y)^5$ **ب** $(a+2b)^3$

التجربة الثنائية تجربة عشوائية يتكرَّر فيها، باستقلالية، فعل عشوائي له نتيجتان ممكنتان: النجاح أو الفشل، بحيث يكون احتمال النجاح p هو نفسه في كل مرة، واحتمال الفشل q هو نفسه في كل مرة. بما أن للفعل العشوائي نتيجتين ممكنتين فإن $p+q=1$ أو $q=1-p$.
في ما يلي أمثلة على تجارب ثنائية.

التجربة	النجاح	الفشل	احتمال النجاح	احتمال الفشل
رمي قطعة نقود معدنية 10 مرات	الصورة	الكتابة	$p=0.5$	$q=0.5$
رمي النرد 100 مرة	الحصول على 3	الحصول على غير 3	$p=\frac{1}{6}$	$p=\frac{5}{6}$

افترض أن احتمال أن يكون شخص ما أعسر (يكتب باستعمال يده اليسرى) هو 0.1 ، وأنك ترغب في إيجاد احتمال أن يكون شخصان من بين ثلاثة أعسرَيْن. هناك ${}_3C_2$ طريقة لتكوين مجموعة من شخصين من بين الثلاثة.

ارمز بالحرف L إلى كون الشخص أعسر وبالحرف R إلى كونه غير أعسر. طرق اختيار أعسرَيْن هي LLR و LRL و RLL . احتمال كل من هذه النتائج الممكنة هو $0.1\times0.1\times0.9$.
يقودنا ما سبق إلى قانون الاحتمال الثنائي.



الاحتّمال الثّنائي

إذا تكررت تجربة ثنائية n مرة باستقلالية، وإذا كان p احتمال النجاح وَ q احتمال الفشل في كل مرة، فإن احتمال النجاح r مرة من بين الـ n مرة هو:

$$P(r) = {}_nC_r\, p^r q^{n-r}$$

يُسمّى هذا الاحتمال **الاحتمال الثنائي**.

مثـــال 4 إيجاد الاحتمالات الثنائية

من كل 5 مراكب تجتاز الممر البحري، واحد يتجه إلى عرض البحر مباشرة متجاوزًا المرفأ. تتجه 4 مركب لتجتاز الممر.

أ ما احتمال أن يتجه مركبان فقط نحو عرض البحر مباشرة؟

احتمال أن يتجه مركب نحو عرض البحر هو $\frac{1}{5} = 0.2$

$P(r) = {}_nC_r\, p^r q^{n-r}$ $n=4$ لأنّ التجربة تتكرر 4 مرات (4 مراكب).

$P(2) = {}_4C_2\, p^2 q^{4-2}$ $r=2$ عدد النجاحات (مركبان فقط يتجهان إلى عرض البحر).

$= 6(0.04)(0.64) = 0.1536$

احتمال أن يتجه مركبان فقط نحو عرض البحر مباشرة هو 15.36%

ب ما احتمال أن يتجه مركبان على الأقل نحو عرض البحر مباشرة؟

أن يتجه مركبان على الأقل نحو عرض البحر مباشرة يعني أن يتجه نحو عرض البحر مركبان أو ثلاثة أو أربعة.

$P(2) + P(3) + P(4)$

${}_4C_2(0.2)^2(0.8)^{4-2} + {}_4C_3(0.2)^3(0.8)^{4-3} + {}_4C_4(0.2)^4(0.8)^{4-4}$

$0.1536 + 0.0256 + 0.0016 = 0.1808$

احتمال أن يتجه مركبان على الأقل نحو عرض البحر مباشرة هو 18.08%



4. **أ** تُحدِّد إدارة المدرسة عشوائيًّا لكل طالب أستاذًا من بين ثلاثة أساتذة ليكون مرجعه في أمور الدراسة.
ما احتمال أن يكون الأستاذ أوميد مرجع اثنين من الطلاب الثلاثة المقبلين؟

ب ستتقدم شيرين إلى اختبار من نوع الخيار من متعدِّد، يتألف من 5 أسئلة لكل منها 4 إجابات مقترحة.
ما احتمال أن تجيب بشكل صائب عن سؤالَين على الأقل؟

مثـــال 5 تطبيق على حل المسائل



تقدِّم شركة مرطِّبات عرضًا تجاريًّا لمشتري الزجاجات التي تنتجها. طبعت على أغطية بعض الزجاجات صورة لمن يحالفه الحظ. ذكرت الشركة أنها طبعت صور الهدية بمعدَّل زجاجة واحدة من كل 4 زجاجات. اشترى شيروان 10 زجاجات. ما احتمال أن يربح هديتين على الأقل؟

1 افهمِ المسألة

المطلوب احتمال أن يربح شيروان هديتين على الأقل.

اذكر المعلومات المهمة :

- اشترى شيروان 10 زجاجات.
- الاحتمال الثنائي في أن تربح الزجاجة هدية هو $0.25=\frac{1}{4}$.

2 خطِّطْ

الطريقة المباشرة لحل المسألة هي حساب $P(2)+P(3)+...+P(10)$. غير أن حساب احتمال الحدث المتمِّم يبدو أسهل؛ ذلك أنه يتطلب حساب $P(0)+P(1)$ ، لأن الحدث المتمِّم لربح هديتَين على الأقل هو ربح هدية واحدة أو عدم ربح أي هدية. جِد احتمال الحدث المتمِّم واطرحه من 1.

3 حُلَّ

الخطوة 1 جِد

$$P(0) \quad + \quad P(1)$$

$$P(0)+P(1) = {}_{10}C_{0}(0.25)^{0}(0.75)^{10-0} + {}_{10}C_{1}(0.25)^{1}(0.75)^{10-1}$$

$$= 1(1)(0.75)^{10} + 10(0.25)(0.75)^{9}$$

$$\approx 0.0563 + 0.1877$$

الخطوة 2 استعمل الحدث المتمم لإيجاد الجواب.

$$1-0.2440 \approx 0.7560$$

احتمال أن يربح شيروان هديتين هو 0.76 تقريبًا.

4 تحقّق

الجواب معقول. فالقيمة المتوقَّعة للربح هي $10 \times \frac{1}{4}$ أي $2.5=\frac{10}{4}$ وهو قريب من 2.

إذن،احتمال أن يربح شيروان هديتين على الأقل يتجاوز0.5 .



5. أ) سيتقدم بيستون إلى اختبار من نوع الخيار من متعدد يتألف من 20 سؤالاً، لكل منها 4 إجابات مقترحة.
ما احتمال أن يجيب بشكل صحيح عن سؤالَين على الأقل؟

ب) تنتج آلة نوعًا من قطع الغيار للسيارات. احتمال أن تكون القطعة صالحة هو 98% . أنتجت الآلة 25 قطعة. ما احتمال ألاّ يزيد عدد القطع الصالحة على 23؟

فكِّر وناقش

1. ما درجة الحدودية الناتجة عن نشر $(2x+8)^7$؟ ما عدد حدودها؟
2. كم يساوي $p+q$ في تجربة ثنائية؟ أوضح جوابك.
3. ما المقادير الثلاثة التي تضربها في بعضها لإيجاد احتمال النجاح في r مرة في تجربة ثنائية تتكرر n مرة؟
4. **كن منظّمًا** انسخ الجدول وأكمله. حل كل مسألة تكتبها.



التجارب الثنائية	
احتمال	مثال
احتمال r نجاح في تجربة تتكرر n مرة	
احتمال r نجاح على الأقل في تجربة تتكرر n مرة	
احتمال r نجاح على الأكثر في تجربة تتكرر n مرة	
احتمال باستعمال الحدث المتمِّم	

2–7 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** عدد النتائج الممكنة في تجربة ثنائية هو ______

انظر المثال 1

انشر كل مقدار بالضرب.

2 $(x+2)^3$ **3** $(x+y)^4$ **4** $(x+1)^4$ **5** $(x-3y)^3$

انظر المثال 2

انشر كل مقدار باستعمال مثلث باسكال.

6 $(x-2)^4$ **7** $(2x+y)^4$ **8** $(x+2y)^3$ **9** $(2x-y)^5$

انظر المثال 3

استعمل مبرهنة ثنائية الحدود لنشر المقدار.

10 $(x+3)^4$ **11** $(3x+5)^3$ **12** $(p-2)^6$ **13** $(x+y)^6$

انظر المثال 4

14 على مدير المدرسة أن يختار 6 طلاب للمشاركة في صورة تذكارية لطلاب المدرسة. ما احتمال أن يكون بين الطلاب الستة 4 رياضيين علما بأن احتمال أن يكون الطالب رياضيًّا هو 30%؟ ما احتمال أن يكون 4 من الطلاب على الأقل رياضيين؟

انظر المثال 5

15 **تسوّق** يعرض قسم الحلوى في أحد المتاجر ألواح الشوكولاتة. واحد من كل 5 ألواح يحمل قسيمة مخفية تخول الشاري الحصول على اللوح مجانًا. اشترت ميان 4 ألواح من الشوكولاتة، ما احتمال أن تربح 3 بطاقات؟ ما احتمال أن تربح بطاقتين على الأقل؟

انـظر المثـــال 5

16 **صناعة** يُوضّب مصنع منتجاته في علب كرتونية، ويطبع على الوجه العلوي من كل علبة طابعه الخاص. إلا أن احتمال أن يكون الطابع على الوجهين العلوي والسفلي هو 2%. حمّلت شاحنة 30 علبة. ما احتمال أن تحمل علبتان طابع المصنع على الوجهين العلوي والسفلي؟

تمـــارين وحلُّ مســـائـل

لحل التمارين	أنظر المثال
20-17	1
24-21	2
98-25	3
29	4
30	5

انشر كل مقدار بالضرب.

17 $(2x-2)^3$ 18 $\left(x+\frac{1}{3}\right)^4$ 19 $(x-y)^4$ 20 $(4+y)^3$

انشر كل مقدار باستعمال مثلث باسكال.

21 $(x-3y)^4$ 22 $(x-2)^5$ 23 $(x+y)^5$ 24 $(2x-3y)^4$

استعمل مبرهنة ثنائية الحدود لنشر المقدار.

25 $(y+5)^4$ 26 $(2m-1)^3$ 27 $(4+3x)^5$ 28 $(2a+3c)^3$

29 **حقوق مدنية** جرى استفتاء 100 000 مواطن حول حق الإنسان في التعبير عن رأي غير شعبي، وكان 83% من المستفتين مع هذا الحق. جرى اختيار 8 من المستطلعين بشكل عشوائي. ما احتمال أن يكون 6 منهم على الأقل مع هذا الحق؟

30 تم سحب 5 كرات من كيس غير شفاف الواحدة بعد الأخرى، مع إعادة كل كرة قبل سحب الكرة التالية. احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء هو 15% . ما احتمال أن تكون كرتان من بين الخمس سوداوين؟ ما احتمال أن تكون كرتان على الأقل من بين الخمس سوداوين؟

31 **جينات** تنتظر امرأة حامل أن تلد 3 توائم. ما احتمال أن تكون التوائم ذكرًا وأنثيين؟ ما احتمال أن تكون التوائم الثلاثة إناثًا؟

32 **علم النبات** احتمال أن تزهر شجرة من نوع معيّن هو 25%. ما احتمال أن تزهر 4 شجرات من بين 15 شجرة من هذا النوع، تم اختيارها عشوائيًّا؟

استعمل مبرهنة ثنائية الحدود لنشر المقدار.

33 $(x-y)^5$ 34 $(c+6)^3$ 35 $(4k-1)^4$ 36 $(p+q)^7$

37 **سفر** تسجِّل شركات الطيران حجوزًا على الطائرة تزيد على عدد مقاعدها، ذلك أن بعض المسافرين يُلغون حجزهم في آخر لحظة. افترض أن احتمال ألاّ يلغي الراكب حجزه هو 0.91. سجَّلت الشركة 22 حجزًا على طائرة من 20 مقعدًا. ما احتمال أن يجد كل مسافر حضر مقعدًا؟



38 **جينات** وضعت أنثى القنفذ 4 جراء. ما احتمال أن يكون الأربعة ذكورًا؟ ما احتمال أن يكون ثلاثة منهم على الأقل ذكورًا؟

جِد كل احتمال، عند رمي قطعة نقود معدنية 10 مرات.

39 أكثر من 7 كتابات **40** كتابتان على الأقل **41** 5 كتابات فقط

42 **مراقبة الجودة** يُنتج أحد المصانع قطع غيار للسيارات. احتمال أن تكون القطعة صالحة هو 95% . ما احتمال ألاّ يزيد عدد القطع غير الصالحة في صندوق من 8 قطع على قطعة واحدة؟

43 **حاسبة بيانية** تتضمّن الحاسبة البيانية الدالّة randBin لمحاكاة تجربة ثنائية وحساب عدد حالات النجاح. لمحاكاة تجربة ثنائية من $n=6$ فعلاً عشوائيًّا واحتمال نجاح $p=0.3$ وعدد نجاحات $r=5$ ، اضغط على MATH واختر PRB ثم)randBin وأدخل 6 ثم 0.3 ثم 5، فاصلاً بين كل عدد والآخر بالفاصلة "," .

أ حاك تجربة عشوائية ثنائية من $n=5$ أفعال عشوائية، واحتمال نجاح $p=0.8$ وعدد نجاحات $r=5$.

ب استعمل القانون لإيجاد احتمال 4 نجاحات.

ج قارن بين النتيجتين.

44 **خطوات متعددة** $p=0.8$ وَ $n=10$. استعمل الحاسبة البيانية لتجد الاحتمال الثنائي لعدد نجاحات من 0 إلى 10. قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة. أنشئ أعمدة بيانية لتمثيل النتائج التي حصلت عليها.
صِف هيئة الرسم البياني. ما العلاقة بين هذا الرسم البياني والقيمة المتوقّعة؟

45 **تفكير ناقد** أيهما أكثر احتمالاً: عائلة من 4 أولاد، هم بنتان وصبيان، أم عائلة من 4 أولاد، هم ثلاثة من جنس واحد، والرابع من الجنس الآخر؟

46 يبلغ العدد المتوقع لأيام المطر في إحدى المناطق 82 يومًا في السنة، بالاستناد إلى معطيات تاريخية. افترض أن نزول المطر في مختلف الأيام أحداث مستقلة.

أ ما احتمال أن يكون يوم اختير عشوائيًّا، يومًا ماطرًا؟

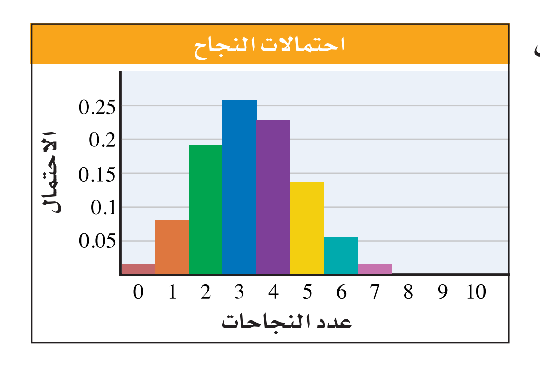
ب ما احتمال أن يكون عدد الأيام الماطرة في أسبوع اختير عشوائيًّا، 3 فقط؟

ج ما احتمال أن يكون عدد الأيام الماطرة في أسبوع اختير عشوائيًّا، 3 على الأقل؟

47 يحتوي كيس غير شفاف على 10 كرات نصفها أحمر والنصف الآخر أزرق. سحب أوميد 3 كرات على التوالي من دون إعادة، ودوَّن في كل مرة لون الكرة المسحوبة. أوضح السبب الذي يجعل هذه التجربة العشوائية غير ثنائية.

48 **سفر** بيّنت دراسة قامت بها إحدى شركات الطيران، أنّ 45% من المسافرين يحملون أكثر من حقيبة بأيديهم عند صعودهم إلى الطائرة. استقبلت المضيفة، في إحدى الرحلات أوّل 5 مسافرين. ما احتمال ألاّ يقل عن 3 عدد الذين يحملون أكثر من حقيبة؟

49 **اكتب** صِف حالة يكون مناسبًا فيها استعمال الحدث المتمِّم لحساب الاحتمال الثنائي.



تقدير استعمل الرسم البياني المقابل لحل التمرينَين 50 وَ 51. يُبيّن هذا الرسم احتمالات r نجاحات في تجربة ثنائية يتكرَّر فيها الفعل العشوائي 10 مرات.

50 قدّر احتمال ألا يزيد عدد النجاحات على 2.

51 قدّر قيمة احتمال النجاح p . أوضح كيف وجدت الجواب.



52 أي مما يلي خطأ في تجربة ثنائية؟

أ) النتائج الممكنة اثنتان: نجاح أو فشل
ج) الأفعال العشوائية مترابطة
ب) احتمال النجاح ثابت
د) الأفعال العشوائية هي نفسها

53 تتألف تجربة ثنائية من تكرار مرتَين لفعل عشوائي، احتمال النجاح فيه %40. ما احتمال النجاح مرة واحدة؟

أ) 16%   ب) 36%   ج) 48%   د) 52%

54 تتألف تجربة ثنائية من تكرار خمس مرات لفعل عشوائي، احتمال النجاح فيه%20. أي مما يلي يعطي احتمال النجاح 3 مرات؟

أ) $3(0.2)^3(0.8)^2$ ب) $10(0.2)^3(0.8)^2$ ج) $3(0.2)^2(0.8)^3$ د) $10(0.2)^2(0.8)^3$

55 **جواب فقط** يُنتج أحد المصانع قطعًا إلكترونية للحواسيب. احتمال أن تكون القطعة غير صالحة هو %4. جرى اختيار 10 قطع بشكل عشوائي. ما احتمال ألاّ يكون بينها أكثر من قطعة واحدة غير صالحة؟ قرّب الجواب إلى أقرب نسبة مئوية صحيحة.

56 **جواب قصير** يحمل %18.8 من مواطني أحد البلدان أحد الأسماء المئة الأكثر شيوعًا. جرى اختيار 10 أشخاص بشكل عشوائي. ما احتمال أن يحمل 3 منهم أو أكثر اسمًا من تلك الأسماء.

تحدٍّ وتوسّع

57 **جينات** احتمال أن يكون المرء أعسر هو 0.1. يجلس 650 شخصًا في قاعة محاضرات.

أ ما العدد المتوقع للأشخاص العُسّر في القاعة؟ أوضح ذلك.

ب يُحسب الانحراف المعياري لتجربة ثنائية مؤلَّفة من تكرار فعل عشوائي n مرة باستعمال القاعدة $\sigma = \sqrt{npq}$. ما قيمة الانحراف المعياري؟

58 جد كلاً من الاحتمالَيْن واذكر أيهما أكبر.

أ الحصول على العدد 1 مرة واحدة على الأقل عند رمي النرد 6 مرات.

ب الحصول على العدد 1 مرتين على الأقل عند رمي النرد 12 مرة.

59 بيّن أن أي عدد $_{n+1}C_{r+1}$ في مثلث باسكال يساوي مجموع العددَين اللذين يُحيطان به $_nC_r$ وَ $_nC_{r+1}$ حيث $r \neq 0$ ، $r \neq n$ وَ $n > 1$.

60 **بولينغ** احتمال أن يُصيب لاعب البولينغ مرة واحدة في محاولتَين هو 40% .

أ) اكتب معادلة لحساب p ثم حُلّها.

ب) ما احتمال أن يُصيب اللاعب في المحاولتين؟

مراجعة لولبية

احسب في كل حالة $f(-3)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ ؟ (الصفوف السابقة)

61 $f(x) = -x^2 + 2x - 4$

62 $f(x) = (-x)^2 - 3x + 1$

حدّد إن كان y دالّة أسّية بدلالة x. إذا كان الأمر كذلك، استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد دالّة أسّية تمثّل معطيات الجدول.

63

x	1	2	3	4	5
y	1.4	2.6	3.8	5.0	6.2

64

x	1	2	3	4	5
y	10	22	36	52	70

جِد المتوسّط والوسيط والمنوال لكل مجموعة معطيات. (الدرس 2-6)

65 $\{2, 18, 15, 14, 18\}$

66 $\{6, 13, 9, 7, 6, 4\}$

67 $\{24, 20, 32, 24, 16, 34\}$

68 $\{10, 5, 15, 5, 8\}$

الفصل 2

دليل الدراسة: مراجعة

حُلّ بيانيًا كلاً من المتباينات التالية:

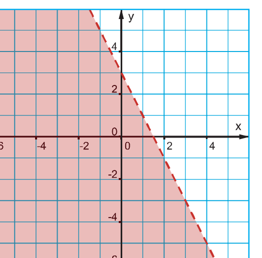
1 $y > -3$

2 $y \leq x + 3$

3 $2x + 4y > -12$

4 $6x - 2y > 8$

5 اكتب متباينة بمجهولين بحيث يشكّل الرسم المقابل حلّها البياني.



6 تبيع إدارة أحد المتاحف نوعين من بطاقات الدخول: بطاقة صالحة ليوم واحد وثمنها 12 000 دينارًا وبطاقة صالحة ليومين وثمنها 21 000 دينار. كانت مبيعات بطاقات الدخول في أحد الأيام أكثر من 2 520 000 دينارًا. اكتب متباينة وحلّها بيانيًا.

7 أنشئ نقاطًا بيانية تمثّل معطيات الجدول. جِد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأكثر تمثيلاً.

x	2	5	9	13	16
y	8	10	24	16	29

8 يُبيّن الجدول أدناه معطيات عن المدخول السنوي لبعض الأشخاص، وقيمة المنزل الذي يملكونه.

المدخول السنوي (بملايين الدنانير)	قيمة المنزل (بملايين الدنانير)
96.5	130.2
46.3	94.5
56.7	115.5
65.2	106.4
54.7	98.6
59.6	115.5

أ) مثّل بيانيًا هذه المعطيات، مستعملاً المدخول كمتغيّر حر.

ب) جِد معامل الارتباط r والمستقيم الأكثر تمثيلاً.

9 بلغت مبيعات فرعَي أحد المخازن الكبرى 12 مليار دينار. كانت مبيعات أحد الفرعين 75% على الأقل من مجموع المبيعات. اكتب نظام متباينات خطّية، وحلَّه بيانيًّا لتحديد المبيعات الممكنة لكل من الفرعَيْن.

حُلّ بيانيًا نظام المتباينات الخطّية.

10 $\begin{cases} y + 1 > 4x \\ y \leq x + 1 \end{cases}$

11 $\begin{cases} y - 3x < 3 \\ 3y \geq x + 3 \end{cases}$

حُلّ بيانيًا نظام المتباينات الخطّية وصنّف الشكل الهندسي الذي يُمثّل منطقة الحل.

12 $\begin{cases} y \leq -x + 2 \\ x > -1 \\ y > -1 \end{cases}$

13 $\begin{cases} y \geq 2x \\ y < 4 \\ y > 2 \\ y \leq \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

14 **إدارة أعمال** يرغب صاحب محل لبيع البن أن يحضّر ما لا يزيد على 120 كيلوغرامًا من خليط نوعين من البن يقل ثمن الكيلوغرام الواحد منه عن 10 000 دينار. استعمل لأجل ذلك نوعًا ثمن الكيلوغرام الواحد منه 8 000 دينار ونوعًا آخر ثمن الكيلوغرام منه 11 500 دينار. اكتب نظام متباينات يبيّن الكمّيات المستعملة من النوعين، ثم حلّ النظام بيانيًا.

15 يقدم أحد المقاهي شطائر باردة وأخرى ساخنة. يُبيّن الجدول معطيات عن الشطائر التي يبيعها المقهى. لايتعدّى عدد الشطائر التي يبيعها المقهى 125 شطيرة من النوعين يوميًا. يربح المقهى 750 دينارًا في الشطيرة الباردة وَ 1000 دينار في الشطيرة الساخنة. كم شطيرة من كل نوع عليه أن يبيع في اليوم ليحقق أقصى ربح ممكن؟

الشطائر المبيعة	الحد الأدنى	الحد الأقصى
باردة	60	80
ساخنة	40	60

حدِّد بيانيًا منطقة الجدوى.

16 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3x + 1 \\ y \leq -\frac{3}{4}x + 6 \end{cases}$

17 $\begin{cases} x < 3 \\ x \geq 0 \\ y < 2x + 1 \\ y \leq -x + 4 \end{cases}$

18 $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \\ y>\frac{1}{2}x-6 \end{cases}$

19 $\begin{cases} x\le 2 \\ x\ge -1 \\ y\ge -1 \\ y\le -x+3 \end{cases}$

20 ما أقصى قيمة لدالَّة المنفعة $p=6x+10y$ تحقِّق شروط التمرين 16؟

21 ما أقصى قيمة لدالَّة المنفعة $p=14x+9y$ تحقق شروط التمرين 17؟

تُنتج إحدى المؤسسات نوعين من نعال الأحذية: نوع سميك يتطلب تصنيع الوحدة منه 6 دقائق ويحقِّق ربحًا قدره 8 000 دينار، ونوع رقيق يتطلب تصنيع الوحدة منه 4 دقائق ويحقِّق ربحًا قدره 9 000 دينار. بمقدور شبكة الإنتاج أن تعمل حتى 12 ساعة، أو 720 دقيقة يوميًا . تبعًا لمتطلبات السوق، تنتج المؤسسة من النعال السميكة ضعفين على الأقل مما تنتجه من النعال الرقيقة.

22 اكتب البرنامج الخطّي الذي يمثِّل هذه المسألة، وحدِّد بيانيًّا منطقة الجدوى.

23 اكتب دالّة المنفعة.

24 ما أعلى ربح يُمكن للمؤسسة أن تحقِّقه في يوم واحد؟

25 **مبيعات** يبيع محل للهواتف الجوالة ما بين 10 وَ 52 هاتفًا جوالاً مع عقد للصيانة؛ وما بين 5 وَ 10 هواتف من دون عقد صيانة. لا تتعدى مجمل مبيعات المحل 30 هاتفًا في اليوم. يربح المحل 35 000 دينار في كل هاتف يبيعه مع عقد صيانة، وَ 5 000 دينار في كل هاتف يبيعه بدون عقد صيانة. كم هاتفًا من كل نوع عليه أن يبيع ليحقِّق أقصى ربح ممكن؟

استعمل الحذف لحل كل نظام.

26 $\begin{cases} x+3y+2z=13 \\ 2x+2y-z=2 \\ x-2y-3z=-12 \end{cases}$

27 $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=-1 \\ 3x-y=4 \end{cases}$

صنِّف النظام وحدِّد عدد حلوله.

28 $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ -x+2y-5z=4 \\ 3x+3y+3z=5 \end{cases}$

29 $\begin{cases} -x-y+2z=-3 \\ 4x+4y-8z=12 \\ 2x+y-3z=-2 \end{cases}$

جِد المتوسط والوسيط والمنوال لكل مجموعة معطيات.

30 6 ، 8 ، 0 ، 8 ، 5

31 12 ، 15 ، 13 ، 13 ، 15 ، 12

32 يُبيّن الجدول التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث يوميًا في مدينة صغيرة. جِد العدد المتوقع للحوادث في يوم.

عدد الحوادث n	0	1	2	3
احتمال n حادثًا	0.65	0.22	0.1	0.03

33 أنشئ بيان الشاربين لمجموعة المعطيات ثم حدّد المدى الربيعي: 33، 52، 65، 48، 83، 29، 50، 71.

34 كان عدد السباقات التي ربحها أحد سائقي السيارات الرياضية في كل عام من الأعوام العشرة الماضية كما يلي: 5، 7، 4، 11، 8،10، 8، 6، 9، 7. جِد عدد السباقات التي لا يزيد بعدها عن المتوسط انحرافًا معياريًا واحدًا.

35 تقدم طلاب الصف النهائي لاختبار الدخول إلى الجامعة، وكان متوسط درجاتهم 81.3 ، بينما كان الانحراف المعياري 4.4 . نال كاوه 96 درجة من 100. هل درجته قيمة متطرِّفة .

36 كانت درجات نشميل في 6 اختبارات كما يلي: 73، 88، 86، 90، 87، 29. جِد المتوسط والانحراف المعياري لهذه المعطيات. كانت درجتها في الاختبار السابع 32. أوضح تأثير هذه الدرجة على كل من المتوسط والانحراف المعياري.

انشر باستعمال مبرهنة ثنائيّة الحدود.

37 $(5+2x)^3$

38 $(x-2y)^4$

39 سردار هداف في فريق لكرة القدم. احتمال أن يصيب الهدف في ضربة حرة هو 0.65. نال سردار 75 ضربة حرة. جِد العدد المتوقّع لإصابته الهدف، في هذه الضربات وجِد الانحراف المعياري.

الفصل 2



اختبار الفصل

1 يبيع نادي دهوك قمصانًا وقبّعات تحمل شعار النادي، ليجمع 000 400 2 دينار على الأقل. ثمن القميص 000 15 دينار وثمن القبعة 000 8 دينار. اكتب متباينة تمثِّل عدد القبعات وعدد القمصان التي يجب بيعها. حُلّ المتباينة بيانيًّا.

2 قام فريق من الباحثين بدراسة عن المستشفيات، ودوّن في جدول معطيات عدد الأسرّة وعدد العاملين في المستشفى.

عدد الأسرّة	عدد العاملين
23	69
29	95
35	118
42	126
46	123
54	178
64	156
76	176

أ مثّل بيانيًّا معطيات الجدول معتمدًا عدد الأسرّة كمتغيّر حر.

ب جد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. ارسم هذا المستقيم مع النقاط البيانية.

ج قدّر عدد الأسرّة في مستشفى يعمل فيه 80 شخصًا.

حُلّ بيانيًّا نظام المتباينات.

3 $\begin{cases} 2y-4x\geq 4 \\ y-x\geq 1 \end{cases}$

4 $\begin{cases} y+x\geq 3 \\ y-4\leq 0 \end{cases}$

5 **كيمياء** يعمل أحد الكيميائين على تركيب 250 ml على الأكثر من محلول ملوحته 18% على الأقل باستعمال محلولَين: ملوحة الأول 9% والثاني 24%. اكتب نظام متباينات وحُلّه لتجد الكمية التي عليه استعمالها من كل محلول.

6 جِد القيمة الصغرى لدالّة المنفعة $P=5x+9y$ تحت الشروط التالية: $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ y\leq 2x+1 \\ y\leq -3x+6 \end{cases}$

صنّف النظام الخطّي وحلّ بالحذف النظام المحدّد.

7 $\begin{cases} x-y+z=-2 \\ 4x-y+2z=-3 \\ 2x-3y+2z=-7 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 3x-y-z=-1 \\ x+y+2z=8 \\ 6x-2y-2z=5 \end{cases}$

يُبيّن الجدول أدناه عدد الأقمار لكل كوكب في النظام الشمسي.

الكوكب	عدد الأقمار
عطارد	0
الزهرة	0
الأرض	1
المريخ	2
المشتري	63
زحل	33
أورانوس	27
نبتون	13
بلوتو	1

9 هل القيمة 63 قيمة متطرفة؟ أوضح ذلك.

10 احسب المتوسِّط والوسيط والمنوال والانحراف المعياري لمجموعة المعطيات التالية: 93، 107، 110، 103، 98، 95، 12، 111، 128، 99، 114، 90. حدِّد القيم المتطرِّفة في هذه المجموعة. اشرح كيف يتأثر المتوسِّط والانحراف المعياري بالقيم المتطرِّفة.

11 انشر ثنائية الحدود $(3x+4)^4$.

احتمال الربح في إحدى الألعاب هو 15% . لعب هشيار 10 مرات.

12 جِد احتمال أن يربح مرتين.

13 جِد احتمال أن يربح مرتين على الأقل.



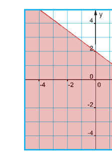
1 أي مما يلي معادلة المستقيم الذي يمر في النقطة $(-2, 7)$ وميله -3؟

(أ) $y=-3x-1$ (ب) $y=-3x+1$

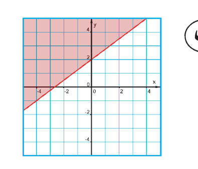
(ج) $y=-3x+13$ (د) $y=-\frac{1}{3}x+1$

2 أي مما يلي يُمثِّل منطقة الحل للمتباينة $y+\frac{3}{4}x\geq 2$؟

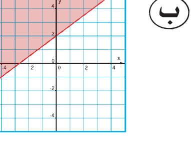
(أ)



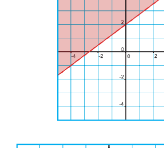
(ب)



(ج)



(د)



3 أي من مجموعات الأعداد التالية لا ينتمي إليها -3؟

(أ) الصحيحة (ب) الحقيقية

(ج) النسبية (د) الطبيعية

4 اكتب المقدار $4\sqrt{50}+3\sqrt{72}$ على أبسط صورة.

(أ) $4\sqrt{7}$ (ب) $7\sqrt{112}$

(ج) $12\sqrt{5}$ (د) $38\sqrt{2}$

5 ما ميل المستقيم $-3y=6x+12$؟

(أ) -4 (ب) -2 (ج) $-\frac{1}{2}$ (د) $-\frac{1}{4}$

6 يُبيّن الجدول أدناه معطيات عن الأجور اليومية التي يتقاضاها العاملون في إحدى الشركات وفقًا لسنوات خبرتهم. أي مما يلي يمثِّل قيمة معقولة لميل المستقيم الأفضل تمثيلاً؟

عدد سنوات الخبرة	الأجر بالدنانير
0	33 407
2	34 273
5	37 882
8	40 185
10	42 977
12	45 864
15	53 811

(أ) 450 (ب) 750 (ج) 1275 (د) 2650

7 كلفة استئجار سيارة 39 950 دينارًا يُضاف إليها 400 دينار عن كل كيلومتر تقطعه السيارة. أي مما يلي يُمثِّل بشكل أفضل العلاقة بين الكلفة C وعدد الكيلومترات المقطوعة k؟

(أ) $C=39\ 950+400$

(ب) $C=39\ 950k+400$

(ج) $C=39\ 950+400k$

(د) $C=39\ 950k+400k$

8 ما تقاطعات المستوى $2x+y-5z=20$ مع محاور الفضاء الإحداثي؟

(أ) $x=0$ ، $y=0$ ، $z=0$

(ب) $x=2$ ، $y=1$ ، $z=-5$

(ج) $x=10$ ، $y=20$ ، $z=-4$

(د) $x=10$ ، $y=20$ ، $z=4$

9 رؤوس منطقة الجدوى هي النقاط $(0,0)$، $(-2,6)$، $(3,-1)$، $(-1,1)$، $(-5,-5)$. ما القيمة الكبرى لدالّة المنفعة $P=4x-y$ في هذه المنطقة؟

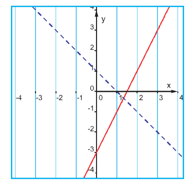
(أ) 0 (ب) 7 (ج) 13 (د) 25

10 يقصد رفند جامعة تبعد عن منزله 660 km. قدّر رفند أن عليه أن يقود سيارته 8 ساعات تقريبًا إذا قاد بسرعة ثابتة قدرها 90 km/h. أي من الدوال أدناه تمثِّل عدد الكيلومترات التي قطعها رفند بعد x ساعة من مغادرته المنزل؟

(أ) $f(x)=660-90x$ (ب) $f(x)=660+90x$

(ج) $f(x)=660-80x$ (د) $f(x)=90x$

11 أي نظام متباينات له منطقة الحل التالية؟



(أ) $\begin{cases} y\leq 2x-3 \\ y\geq -x+1 \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} y\leq 2x-3 \\ y>-x+1 \end{cases}$

(ج) $\begin{cases} y<2x-3 \\ y>-x+1 \end{cases}$ (د) $\begin{cases} y\geq 2x-3 \\ y<-x+1 \end{cases}$

12 أي من الأنظمة الخطية أدناه نظام محدد؟

أ) $\begin{cases} 2y+3x=-8 \\ 9x=-24-6y \end{cases}$

ب) $\begin{cases} 2y+7x=24 \\ 5y-6=-4x \end{cases}$

ج) $\begin{cases} y=-x+4 \\ 3y+3x=-21 \end{cases}$

د) $\begin{cases} 2y=3x-6 \\ 8y-12x=80 \end{cases}$

جواب مختصر

13 عند حساب مجموع النقاط التي يحصل عليها المرشح لامتحانات الدخول إلى كلية الطب، يتم ضرب الدرجة التي نالها في العلوم في 2، والدرجة التي نالها في الرياضيات في 3، والدرجة التي نالها في الأحياء في 4. أمّا درجته في اللغة فلا تُضرب في أي معامل. كانت درجات شيرزاد 49 في اللغة، وَ 32 في الفيزياء، وَ 2 في الرياضيات. وكان مجموع نقاطه 411. كم كانت درجته في الأحياء؟

14 جِد أصغر عدد صحيح موجب يشكِّل حلاً للمتباينة $\frac{|430-3x|}{3} > 816$.

15 أكل هلو 3 قطع من البيتزا، وَ 8 ثمرات من الفريز، واكتسب 975 سعرة حرارية. بينما اكتسب بلند 950 سعرة حرارية، بعد أن أكل 4 قطع من البيتزا وَ 6 ثمرات من الفريز. كم سعرة حرارية في قطعة البيتزا؟

جواب مختصر

16 اشترت مجموعة من زوار حديقة الحيوانات 4 بطاقات دخول للكبار، وَ 5 بطاقات للصغار، ودفعت 000 68 دينار، بينما دفعت مجموعة أخرى 000 216 دينار ثمنًا لـ 12 بطاقة للكبار وَ 17 بطاقة للصغار.

أ) اكتب نظام معادلات يمثِّل المسألة.

ب) حُلَّ هذا النظام بيانيًّا.

ج) حُلَّ النظام باستعمال طريقة أخرى. أوضح السبب الذي يجعل الطريقة التي استعملتها أفضل من الطريقة البيانية. ما ثمن البطاقة من كل نوع؟

17 النقطة B هي صورة النقطة $A(3,4)$ بالانعكاس حول المحور الأول.

أ) ما إحداثيّا النقطة B ؟

ب) النقطة C هي صورة النقطة B بالسحب 3 وحدات إلى اليسار، ووحدتين إلى أسفل. ما إحداثيا C ؟

18 الدالَّة $g(x)$ هي الدالَّة الناتجة عن تحويل الدالة $f(x)=4x-3$ بسحب إلى أسفل 5 وحدات.

أ) اكتب معادلة الدالَّة $g(x)$.

ب) اكتب معادلة الدالَّة $h(x)$ الناتجة عن تحويل الدالة $g(x)$ ، بانعكاس حول المحور الأول.

جواب مفصل

19 في مصنع الستائر 820 علبة من خيوط القطن وَ 1250 علبة من خيوط النايلون. يستهلك صنع ستارة من النوع الرخيص 18 علبة من خيوط القطن وَ 32 علبة من خيوط النايلون، بينما يستهلك صنع ستارة من النوع الجيد 36 علبة من خيوط القطن وَ 28 علبة من النايلون.

أ) اكتب شروط المسألة.

ب) ارسم منطقة الجدوى، وحدِّد رؤوسها.

ج) يربح المصنع 000 170 دينار في الستارة من النوع الرخيص، وَ 000 190 دينار في الستارة من النوع الجيد. اكتب دالَّة المنفعة.

د) كم ينبغي أن يصنّع المصنع من كل نوع، ليحقِّق أقصى ربح؟



الفصل

3

المصفوفات Matrices

الفصل الأول

الدروس

العالم التقني

يُمكنك استعمال المصفوفات لعرض المعطيات وتحليلها، كتزايد عدد المراهقين الذين يملكون آلات تكنولوجية.

هل أنت مستعد؟

المُفْرَدات

اربط المفردة بتعريفها الوارد إلى اليسار.

1 نصف قطر الدائرة
2 النظام المستحيل
3 النظام غير المحدَّد
4 التحويل الهندسي

أ عملية لا يتغيّر ناتجها إذا بادلت بين عامليها مثل $a+b=b+a$ وَ $ab=ba$.
ب المسافة بين مركز الدائرة ونقطة عليها.
ج نظام معادلات لا حلول له.
د تغيير في موقع شكل هندسي أو في قياساته أو في هيئته.
هـ نظام معادلات له عدد غير محدود من الحلول

جمع الأعداد الصحيحة وطرحها

اكتب المقدار على أبسط صورة.

5 $2+7+(-10)$
6 $-8+14+(-3)$
7 $-2+(-3)+(-5)$
8 $-9+15-7+1$
9 $20-(-5)+(-3)-2$
10 $9+8-7+5-(-3)+2$

ضرب الأعداد الصحيحة وقسمتها

اكتب المقدار على أبسط صورة.

11 $-18\div 9$
12 $-6(-1)$
13 $16(-2)$
14 $-15\div(-3)$

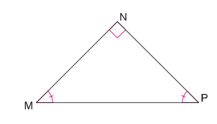
تراتب العمليات

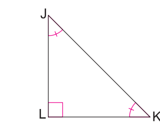
اكتب المقدار على أبسط صورة.

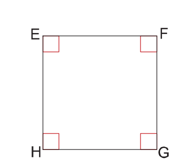
15 $2(0.5)+2(0.6)$
16 $0(6.7)+1(0.3)-5(2)-3(8)$
17 $3(2+7+0)-5(3+6+4)$
18 $4(3-6+2)-5(2+0-1)$

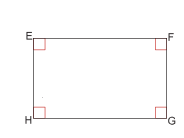
تمييز الأشكال المتشابهة

19 حدِّد الأشكال المتشابهة.









إيجاد القياسات المجهولة في الأشكال المتشابهة

20 المثلثان ABC وَ DEF متشابهان. $m\widehat{FDE}=35^\circ$. أي زاوية أخرى يساوي قياسها 35° ؟

21 المثلثان FGH وَ JKL متشابهان. $JL=12$ ، $GH=12$ ، $FH=8$ ، جد KL .

الفصل 3

دليل الدراسة : نظرة إلى الفصل

في الماضي

درست سابقًا

- تنظيم المعطيات في جداول.
- إجراء العمليات على الأعداد الحقيقية.
- حل الأنظمة الخطّية 2×2 .
- حل معادلات تربيعية.

في هذا الفصل

سوف تتعلّم

- تنظيم المعطيات في مصفوفات.
- إجراء العمليات على المصفوفات.
- حل نظام معادلات خطّية باستعمال المصفوفات.
- تحويل أشكال هندسية باستعمال المصفوفات.
- إجراء العمليات على الأعداد المركَّبة.

في المستقبل

يُمكنك استعمال مهارات هذا الفصل

- خلال دراستك لموضوعات أخرى مثل الهندسة والإحصاء وإدارة الأعمال.
- في المباريات التي تتضمَّن مستويات مختلفة من الصعوبات.
- خارج المدرسة لتنظيم المعطيات ومعالجتها خلال تحليلك لنتائج التغيّرات التي تطرأ عليها.

المفردات *Vocabulary*

المفردات	Vocabulary
العنوان	Adress
الرتبة	Dimensions
العنصر	Entry
القطر الرئيس	Main diagonal
المصفوفة	Matrix
المصفوفة المرّبعة	Square matrix

نافذة على المفردات

لكي تألف بعض المفردات الواردة في هذا الفصل، تابع الخطوات التالية:

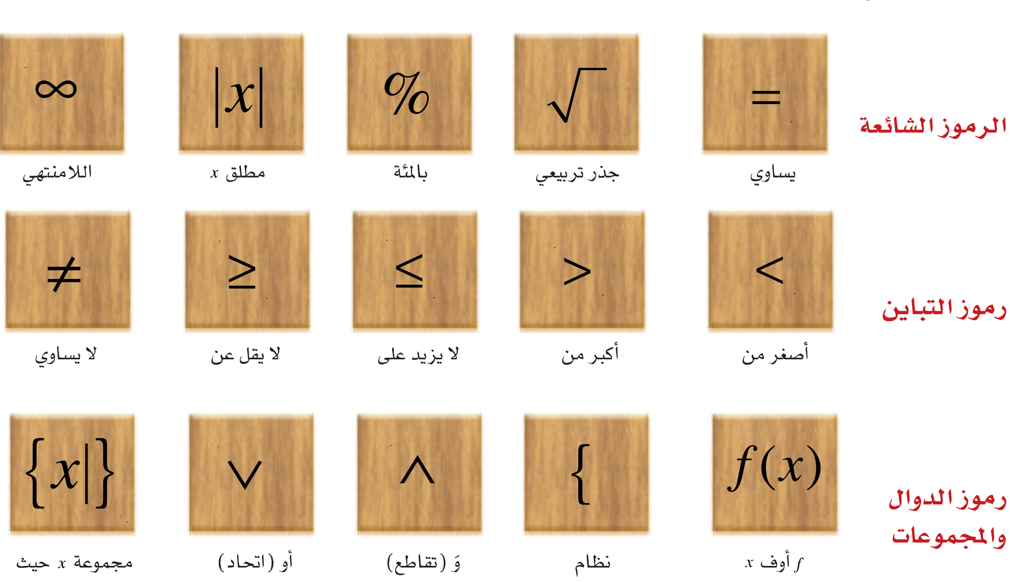
1. يُخبرك **عنوان** عدد في مصفوفة عن العمود والصف اللذين يقع العدد عند تقاطعهما. ما العنصران اللذان تستعملهما لتحديد عنوان منزل في مدينة؟
2. تُخبرك **رتبة** المصفوفة عن عدد صفوفها وعدد أعمدتها. ماذا تفهم من صديقك إذا قال إن الملعب 50 m في 30 m ؟
3. **القطر الرئيس** في المصفوفة ينطلق من الزاوية العليا إلى اليسار نحو الزاوية السفلى إلى اليمين. هل يقع رقم هذه الصفحة من الكتاب على قطرها الرئيس؟
4. تعرف أن طول المربَّع وعرضه متساويان، ماذا تستنتج عن مصفوفة وُصفت بأنها **مصفوفة مربعة** .

الفصل 3



استراتيجية قراءة : قراءة رموز الرياضيات وإدراك ما تعنيه

تُشكّل قراءة رموز الرياضيات وفهم ما تعنيه مهارة لا بد منها لكي تستوعب الموضوعات في الرياضيات. خلال دراستك للرياضيات باستعمال هذا الكتاب، اقرأ بصوت مسموع المقادير التي تتضمّن رموزًا وكتابات رياضية. سوف يساعدك مثل هذا التمرين أن تصبح قادرًا على ترجمة الرموز إلى كلمات.



كتابة رمزية	ترجمتها إلى كلمات
$f(x)=\sqrt{16x}-4$	f أوف x تساوي الجذر التربيعي لـ 16 في x،ناقص 4 .
$\frac{\|x-15\|}{6}\le 12$	مطلق x ناقص 15 ، مقسومًا على 6 لا يزيد على 12 .
$\{x/(x\le -19)\vee(x>8)\}$	مجموعة الأعداد x حيث x لا يزيد على 19- أو هو أكبر من 9 .
$\begin{cases} y\le -4x+8 \\ y>x-6 \end{cases}$	نظام المتباينتين المؤلف من» y لا يزيد على سالب 4 في x زائد 8 « وَ »y أكبر من x ناقص 6 «.

حاول

ترجم كل كتابة رمزية إلى كلمات.

1) $\{x/(x\ge -7)\vee(x\le -1)$

2) $f(y)=|15y|+\frac{y}{2}$

3) $\begin{cases} y=2x+3 \\ y=x \end{cases}$

4) $[-5,\infty)$

اكتب الجملة التالية باستعمال رموز الرياضيات.

5) مجموعة الأعداد x، حيث يقع x بين سالب 8 وَ 10 .

1-3 المصفوفات Matrices



من يَستعمل هذا الأمر؟

تُستعمل المصفوفات لتنظيم المعطيات، كأن تُنظَّمَ المعطيات عن موجودات محل تجاري باستعمال المصفوفات. (المثال 3).

الأهداف

يستعمل المصفوفات لتمثيل معطيات من الرياضيات ومن الواقع.
يجمع المصفوفات ويطرحها.
يضرب مصفوفة في عدد حقيقي.

المفردات Vocabulary

المصفوفة Matrix
رتبة المصفوفة Dimensions
عنصر المصفوفة Entry
عنوان العنصر Adress

يُبيّن الجدول أدناه النشاط التجاري على مدى شهر نيسان لمحل يبيع الأدوات المنزلية. يُظهر الجدول موجودات المحل (جردة أول نيسان) والمبيعات (خلال شهر نيسان) والمشتريات (خلال شهر نيسان أيضًا).

	الموجودات في أول نيسان		المبيعات خلال شهر نيسان		المشتريات خلال شهر نيسان	
	صغيرة	كبيرة	صغيرة	كبيرة	صغيرة	كبيرة
طاولات الحديقة	8	10	7	9	15	20
مواقد الشواء	15	12	15	12	18	24

يمكنك تمثيل المعطيات عن موجودات المحل باستعمال **مصفوفة**.

مصفوفة الموجودات ←

$$M = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

(الصفوف: طاولات للحديقة، مواقد للشواء؛ الأعمدة: صغيرة، كبيرة)

المصفوفة Matrix هي جدول مستطيل مؤلَّف من خلايا يُحيط به قوسان قائمان وتتضمّن كل خلية عددًا يُسمى **عنصرًا Entry** من عناصر المصفوفة. **رتبة Dimension** المصفوفة تدل على عدد صفوفها وعدد أعمدتها، وهي تُكتب على الشكل التالي: **عدد الصفوف × عدد الأعمدة**. فإذا كان للمصفوفة صفّان وثلاثة أعمدة، فإن رتبتها هي 3 × 2 (اقرأ 2 في 3). أما رتبة مصفوفة الموجودات أعلاه فهي 2 × 2. لكل عنصر من عناصر المصفوفة **عنوان Adress** يدل على موقعه في المصفوفة. يتكوّن عنوان العنصر من رقم الصف الموجود عليه، متبوعًا برقم العمود الذي يحويه. فالعنصر 10 في المصفوفة أعلاه هو العنصر الموجود على الصف 1 والعمود 2. نرمز إلى هذا العنصر بالرمز m_{12} .

مثـــال 1 استعمال المصفوفات لعرض المعطيات

استعمل معطيات المبيعات خلال شهر نيسان.

أ **استعمل مصفوفة لعرض المعطيات.**

مصفوفة المبيعات ←

$$s = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \quad s = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$$

(الصفوف: طاولات للحديقة، مواقد للشواء؛ الأعمدة: صغيرة، كبيرة)

ب **ما رتبة المصفوفة S ؟**

للمصفوفة S صفّان وعمودان. رتبتها إذن 2 × 2 .

ج **ما العنصر s_{12} ؟**

يقع العنصر s_{12} عند تقاطع الصف الأول والعمود الثاني، إنه 9 . يدل هذا العنصر على أن المحل باع في نيسان 9 طاولات كبيرة للحديقة.

د ما عنوان العنصر 15 ؟

يقع العنصر 15 على تقاطع الصف الثاني مع العمود الأول، إنه العنصر m_{21} .



نقطة مراقبة

1. استعمل المصفوفة المقابلة للإجابة.

$$M=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 9 \\ 12 & 11 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

أ ما رتبة المصفوفة M ؟

ب ما هو العنصر m_{32} ؟

ج يظهر الصفر في موقعَيْن، ما عنوان كل منهما؟

تتساوى مصفوفتان إذا كانتا من الرتبة نفسها، وإذا تساوت العناصر المتقابلة في المصفوفتَيْن (أي العناصر التي لها العنوان نفسه في المصفوفتين).



مثال 2 تَساوي المصفوفات

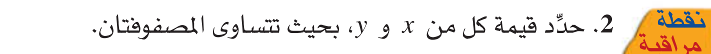
حدِّد قيمة كل من x وَ y بحيث تتساوى المصفوفتان.

$$\begin{bmatrix} 2x+4 & 5 & 1 \\ -2 & -3y+5 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 & 5 & 1 \\ -2 & 5y-3 & -4 \end{bmatrix}$$

بما أن المصفوفتين متساويتان فإن $2x+4=12$ وَ $-3y+5=5y-3$

$2x=8$ وَ $-8y=-8$

$x=4$ وَ $y=1$





نقطة مراقبة

2. حدِّد قيمة كل من x و y، بحيث تتساوى المصفوفتان.

$$\begin{bmatrix} -3 & -2x & -3 \\ -2 & 3y & -12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & -15 & -3 \\ -2 & -2y+15 & -12 \end{bmatrix}$$

اعلم واحفظ **جمع المصفوفات وطرحها**

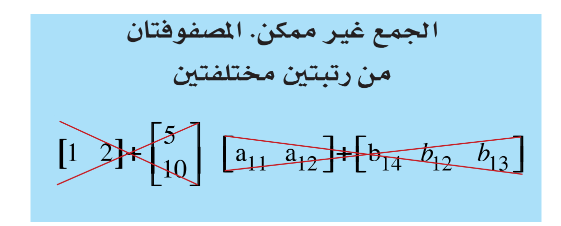
بالكلمات	عدديًا	جبريًا
لكي تجمع مصفوفتين أو تطرحهما، اجمع العناصر المتقابلة أو اطرحها.	$[1 \;\; 2]+[5 \;\; 10]=[6 \;\; 12]$	$[a_{11} \;\; a_{12}]+[b_{11} \;\; b_{12}]=[a_{11}+b_{11} \;\; a_{12}+b_{12}]$

لكي تجمع مصفوفتين أو تطرح إحداهما من الأخرى، يجب أن تكون المصفوفتان من الرتبة نفسها.

الجمع ممكن. المصفوفتان من الرتبة نفسها

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الجمع غير ممكن. المصفوفتان من رتبتين مختلفتين



$$[1 \;\; 2]+\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad [a_{11} \;\; a_{12}]+[b_{14} \;\; b_{12} \;\; b_{13}]$$

مثـــال 3 جمع المصفوفات وطرحها

استعمل المصفوفات التالية للإجابة عن الأسئلة.

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\\ 2 & 6\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\\ -5 & 14\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ 3 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

اجمع أو اطرح حيث يكون ذلك ممكنًا.

أ $A+C$

اجمع كل عنصر في المصفوفة الأولى مع العنصر الذي يقابله في المصفوفة الثانية.

$$A+C=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\\ 2 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\\ -5 & 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+3 & -2+2\\ -3+0 & 10+(-9)\\ 2+(-5) & 6+14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0\\ -3 & 1\\ -3 & 20\end{bmatrix}$$

ب $C-A$

$$C-A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\\ -5 & 14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\\ 2 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-4 & 2-(-2)\\ 0-(-3) & (-9)-10\\ -5-2 & 14-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 3 & -19\\ -7 & 8\end{bmatrix}$$

ج $C+B$

بما أن رتبة المصفوفة C (3×2) تختلف عن رتبة المصفوفة B (2×3) فإن عملية الجمع غير ممكنة.

نقطة مراقبة

3. **اجمع أو أطرح عندما يكون ذلك ممكنًا.**

أ $B+D$ ب $B-A$ ج $D-B$

تعلم أن الضرب هو جمع مُكرّر. يصح هذا الأمر على ضرب المصفوفة في عدد.

فإذا كانت $M=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ يُمكنك كتابة $M+M$ على الصورة $2M$.

يُمكنك ضرب مصفوفة في عدد. للقيام بذلك، اضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في هذا العدد.

$$2\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times2 & 2\times0\\ 2\times1 & 2\times5\end{bmatrix}$$

مثـــال 4 تطبيق على التجارة

بالعودة إلى النشاط التجاري لمحل بيع الأدوات المنزلية، احسب المصفوفة $M-S+D$ حيث M مصفوفة الموجودات وَ S مصفوفة المبيعات وَ D مصفوفة المشتريات . ماذا تمثّل المصفوفة الناتجة؟

$$M-S+D=\begin{bmatrix}8 & 10\\ 15 & 12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7 & 9\\ 15 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15 & 20\\ 18 & 24\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8-7+15 & 10-9+20\\ 15-15+18 & 12-12+24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 21\\ 18 & 24\end{bmatrix}$$

	صغيرة	كبيرة
طاولات للحديقة	16	21
مواقد للشواء	18	24

تمثّل المصفوفة الناتجة موجودات المحل في نهاية شهر نيسان. كان في المحل، في نهاية شهر نيسان، 16 طاولة حديقة صغيرة و 21 كبيرة؛ كما كان فيه 18 موقدًا صغيرًا وَ 24 كبيرًا.



4. احسب المصفوفة $A+2B-3C$ حيث

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix} \text{ وَ } B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix} \text{ وَ } C=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

مثـــال 5 كتابة المقادير المصفوفية على أبسط صورة

استعمل المصفوفات التالية للإجابة عن الأسئلة.

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}-6 & 3 & 8\end{bmatrix}$$

اكتب على أبسط صورة.

أ $2A-3B$ إن كان ذلك ممكنًا.

$$2A-3B=2\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix}$$

بما أن ضرب مصفوفة في عدد لا يغيّر رتبتها، فإن رتبتي المصفوفتَيْن $2A$ وَ $3B$ غير متساويتَيْن، مما يجعل الطرح غير ممكن.

ب $C-2A$

$$C-2A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(-2)\times 4 & (-2)\times(-2)\\ (-2)\times(-3) & (-2)\times 10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8 & 4\\ 6 & -20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 6\\ 6 & -29\end{bmatrix}$$

إضـــاءة

يُشكّل قوسا المصفوفة رمز تجميع. لحساب المقدار $C-2A$ ، ابدأ بتوزيع -2 على جميع عناصر المصفوفة A قبل البدء بالجمع تمامًا كما تفعل مع المقادير العددية.



5. اكتب على أبسط صورة عندما يكون ذلك ممكنًا.

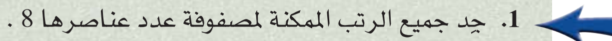
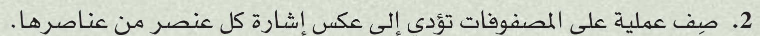
أ $2B+3C$ **ب** $4A-3C$ **ج** $D+0.5D$

اعلم و احفظ **خصائصُ جمع المصفوفات وطرحها**

بالكلمات	عدديًا	جبريًا
خاصّية التبديل جمع المصفوفات عملية تبديلية.	$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 7\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 7\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$	$A+B=B+A$
خاصية التجميع جمع المصفوفات عملية تجميعية.	$\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}\right)=\left(\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$	$A+B+C=(A+B)+C$ $A+(B+C)$
المصفوفة المحايدة في الجمع المجموعة الصفرية هي عنصر محايد في جمع المصفوفات.	$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$	$A+0=A$
معكوس المصفوفة معكوس المصفوفة M هي المصفوفة الناتجة عن إحلال محل كل عنصر من عناصر M معكوسه.	$\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 9 & -6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -5\\ -9 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$	إذا كانت B معكوس A فإن $A+B=0$ حيث 0 مصفوفة صفرية.

إضـــاءة

المصفوفة الصّفريّة مصفوفة جميع عناصرها تساوي 0.

فكِّرْ وناقش



1. جِد جميع الرتب الممكنة لمصفوفة عدد عناصرها 8 .
2. صِف عملية على المصفوفات تؤدي إلى عكس إشارة كل عنصر من عناصرها.
3. **كن منظّمًا** انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. اكتب في كل إطار مثالاً عدديًا ومثالاً مصفوفيًّا.

العملية	أعداد	مصفوفات
الجمع		
الطرح		
الضرب في عدد		

1-3 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** تُشكِّل القيمة الموجودة على تقاطع صف وعمود في المصفوفة (عنصرًا أو عنوان عنصر).

انظر المثال 1

2 عمل هشيار وشيركو ودلسوز في بيع البطاقات لحفل نهاية السنة الدراسية. يُبيّن الجدول أدناه المعطيات التي تتعلّق بما باعوه من بطاقات.

بيع بطاقات حفل نهاية السنة الدراسية			
الطالب	بطاقات منفردة	دفاتر بطاقات	المبلغ الكليّ
هشيار	39	15	114 000 دينار
شيركو	108	8	143 000 دينار
دلسوز	13	25	138 000 دينار

أ استعمل مصفوفة A لعرض معطيات الجدول.

ب ما رتبة المصفوفة A ؟

ج ما العنصر a_{13} ؟ ماذا يُمثِّل ؟

د ما عنوان العنصر 143 000 ؟

انظر المثال 2

3 حدِّد قيمة كل من x وَ y بحيث تتساوى المصفوفتان:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & x+8 \\ 2y-1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{وَ} \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 14-x \\ -13-y & 0 \end{bmatrix}$$



انظر المثال 3

استعمِلْ المصفوفات التالية لحل التمارين من 4 إلى 7. اجمع أو اطرح عندما يكون ذلك ممكنًا.

$$A=\begin{bmatrix}1.5 & 3.8 & 3\\ -1.2 & 2.4 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-1 & 1.1 & 6\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & 2.3 & 1\end{bmatrix}$$

4 $A+B$ **5** $B-C$ **6** $B-A$ **7** $B+A$

انظر المثال 4

8 **استهلاك** يُبيّن الجدول المقابل أسعار ثلاثة أنواع من ألبسة الرياضة قبل تطبيق الضريبة عليها. مثّل هذه الأسعار في مصفوفة M، ثم جِد المصفوفة T التي تُمثّل قيمة الضريبة لكل نوع، علمًا بأن النسبة المئوية للضريبة هي 8.25% . اكتب المصفوفة A التي تُمثّل أسعار الأنواع الثلاثة بعد إضافة الضريبة.

أسعار الملابس الرياضية بالدنانير			
	عادي	مع شعار	تفصيل
قميص قطني	9 000	13 000	14 000
سروال قصير	6 000	9 500	11 000
سروال طويل	15 000	21 000	23 000

انظر المثال 5

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 9 إلى 12. اكتب الناتج على أبسط صورة، عندما يكون ذلك ممكنًا.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}\ B=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\ C=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 6\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

9 $3B$ **10** $\frac{1}{2}C$ **11** $A-2B$ **12** $2C-A$

تمارين وحلُّ مسائل

تمارين حرّة	
لحل التمارين	أنظر المثال
13	1
14	2
18–15	3
19	4
23–20	5

13 استعمل معطيات الجدول للإجابة عن الأسئلة.

أ) استعمل مصفوفة A لعرض معطيات الجدول.

ب) ما رتبة المصفوفة A ؟

ج) ما العنصر a_{32} ؟ ماذا يُمثّل؟

د) ما عنوان العنصر 385 980 ؟

خيارات السفر			
الدرجة	بطاقة	فندق	سيارة
أولى	425 500	396 000	65 990
أعمال	385 980	245 500	45 900
اقتصادية	275 120	103 250	29 500

14 حدّد قيمة x و y بحيث تتساوى المصفوفتان:

$$\begin{bmatrix}2x & y+1 & -2y\end{bmatrix} \text{ وَ } \begin{bmatrix}3x-2y & 14 & -x\end{bmatrix}$$

استعمِل المصفوفات التالية لحل التمارين من 15 إلى 18. اجمع أو اطرح حيث يكون ذلك ممكنًا.

$$D=\begin{bmatrix}5.1 & 2.5\\ -2 & 0\\ 0 & 1.5\end{bmatrix}\ E=\begin{bmatrix}3.2 & -1\\ -1.5 & 2.4\end{bmatrix}\ F=\begin{bmatrix}-4.2 & -1\\ 2.2 & 0\end{bmatrix}$$

15 $F-E$ **16** $D+E$ **17** $D+F$ **18** $E+F$

19 **دراسة جامعية** يُبيّن الجدول أدناه الكلف السنوية للدراسة الجامعية.

القيمة التقديرية للكلفة السنوية للدراسة الجامعية			
	جامعة خاصة	جامعة رسمية وطنية	جامعة رسمية أجنبية
الكلفة بالدينار	27 677 000	12 841 000	19 188 000

يُقدّر الخبراء أن هذه الكلف سوف تزداد 5% العام المقبل. استعمل ضرب مصفوفة في عدد لتجد القيمة التقديرية للدراسة في كل نوع من الأنواع الثلاثة.

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 20 إلى 23. اكتب الناتج على أبسط صورة حيث يكون ذلك ممكنًا.

$$G=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad J=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ -2\end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\\ 5 & 0\end{bmatrix}$$

20 $2G$ **21** $\frac{1}{2}(H+J)$ **22** $2K-G$ **23** $H-0.3G$

24 **تقدير** يُبيّن الرسم البياني المقابل ما حصلت عليه كلارا بعد أن استعملت الحاسوب لتدوين نفقاتها خلال شهرَي شباط وآذار. استعمل مصفوفة $F\ (3\times1)$ لتمثيل نفقاتها خلال شهر شباط وأخرى M لتمثيل نفقاتها خلال شهر آذار. اجمع المصفوفتين لتحصل على نفقاتها الكلية خلال الشهرين.

نفقات كلارا

النفقات بآلاف الدنانير: 0، 200، 400، 600، 800

إيجار، طعام، مختلف

أنواع النفقات: شباط، آذار

25 **هندسة** تُمثّل المصفوفة $\begin{bmatrix}2 & 2.5\\ 3 & 3.5\end{bmatrix}$ أنصاف أقطار 4 دوائر.

أ) اكتب المصفوفة التي تُمثّل محيطات هذه الدوائر.

ب) هل يُمكن الحصول على مصفوفة تُمثّل مساحات هذه الدوائر باستعمال جمع المصفوفات وضربها في عدد؟ أوضح ذلك.

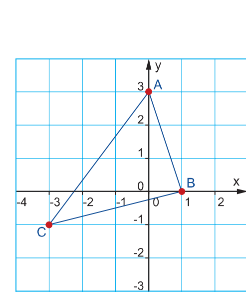
تفكير ناقد **اذكر إن كانت المقولة صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا، أو خطأ دائمًا.**

26 يُمكن جمع مصفوفتين لهما العدد نفسه من العناصر.

27 يُمكن جمع مصفوفتين إذا اختلف عدد العناصر بينهما.

28 يُمكن جمع مصفوفتين لكل منهما 3 صفوف وَ 4 أعمدة.

29 إذا كان ممكنًا جمع مصفوفتين، فإن طرحهما ممكن أيضًا.



30 أ) اكتب مصفوفة تُمثّل إحداثيات رؤوس المثلث، بحيث تقع الإحداثيات الأولى في الصف الأول والإحداثيات الثانية في الثاني.

ب) استعمل عملية على المصفوفات لإضافة 3 إلى كل إحداثي أول وَ 1 إلى كل إحداثي ثانٍ.

ج) ارسم المثلث الذي تُمثّل المصفوفة الجديدة إحداثيات رؤوسه. كيف تحصل على هذا المثلث انطلاقًا من المثلث الأصلي؟

31 حدِّد قيم x وَ y وَ z بحيث تصح المساواة المصفوفية.

$$\begin{bmatrix}3 & x\\ -2 & -8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}11 & -4\\ y & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -10\\ 9 & z\end{bmatrix}$$

32 **خطأ في التحليل** أوضح الخطأ: $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 0 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

33 **اكتب** هل طرح المصفوفات عملية تبديلية؟ أعطِ مثالاً يدعم جوابك.



34 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 2 \\ 1.5 & 2.1 & 0 \end{bmatrix}$ وَ $C = \begin{bmatrix} 2 & 0.4 & 6 \\ 6 & 6.4 & 0 \end{bmatrix}$. أي مقدار يساوي المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ؟

(أ) $2C - \frac{1}{2}B$ (ب) $C - 2B$ (ج) $B - 2C$ (د) $2B - \frac{1}{2}C$

35 أي من المقولات التالية تصحّ دائمًا في المصفوفة E من الرتبة $m \times n$؟

(أ) عدد عناصرها $m \times n$ (ب) لها عنصر e_{nm}

(ج) عدد عناصرها $m + n$ (د) لها m عمود وَ n صف.

36 ما قيمة x التي تحقّق $\begin{bmatrix} 48 & 32 \\ 8 & 28 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} 8$ ؟

(أ) 0.25 (ب) 0.5 (ج) 2 (د) 4

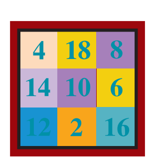
37 **جواب مختصر** جِد قيمة x التي تحقّق $[2 \quad -2] - 2[5 \quad -x] = [-8 \quad -1]$.

تحدٍّ وتوسّع

38 **تفكير ناقد** ماذا تقول عن مصفوفة عدد عناصرها عدد أولي؟ أوضح ذلك.

39 ما الذي يجعل المصفوفتين $A - B$ وَ $A + (-B)$ متساويتين، حيث A و B لهما الرتبة نفسها؟

40 في المرَّبعات السحرية، كالمرَّبعَين المقابلَين، تحصل دائمًا على العدد نفسه إذا جمعت الأعداد الموجودة في أي صف أو أي عمود أو أي قطر. هل مجموع مصفوفتَيْن تُشكِّل كل منهما مربَّعًا سحريًا، يُشكِّل بدوره مربَّعًا سحريًا؟ أوضح ذلك.



8	3	4
1	5	9
6	7	2

41 جِد المصفوفة B حيث تصح المساواة $3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

مراجعة لولبية

اكتب مقدارًا جبريًا لتمثيل كل حالة. (الصفوف السابقة)

42 محيط مثلث أطوال أضلاعه 3 أعداد زوجية متتالية.

43 عدد البطاقات التي بيعت لِـ 20 شخصًا، علمًا بأن كلاً منهم اشترى n بطاقة.

44 **نقود** مع شيلان 36 قطعة نقود من فئتي ألف دينار وَ 500 دينار. ما قيمة هذا المبلغ، علمًا بأن عدد القطع من فئة 500 دينار هو ضعف عدد القطع من ألف دينار؟ (الصفوف السابقة)

حدِّد إن كانت النقطة المعطاة حلاً لنظام المعادلتيْن. (الصفوف السابقة)

45 $(2, -2)$ ؛ $\begin{cases} x - y = 4 \\ 5x + 6y = 2 \end{cases}$

46 $(4.5, 2)$ ؛ $\begin{cases} y = 2 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$

2-3 ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices



الأهداف

يعرف خصائص المصفوفات في الضرب.

يضرب مصفوفة في أخرى.

المفردات
Vocabulary

ناتج ضرب المصفوفتين
Matrix product

المصفوفة المربَّعة
Square matrix

القطر الرئيس
Main diagonal

مصفوفة الوحدة
Unit matrix

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل صاحب مؤسسةٍ المصفوفات لإيجاد قيمة المداخيل والكلف والأرباح. (مثال 3)

تعلَّمت في الدرس السابق كيف تضرب مصفوفة في عدد. يُمكنك أيضًا أن تضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى. يُنتج ضرب مصفوفة في أخرى مصفوفة تُسمى **ناتج ضرب المصفوفتين** **Matrix product** . تُطبَّق القاعدتان التاليتان عند ضرب مصفوفة في أخرى.

- يُمكن ضرب المصفوفة A في المصفوفة B، أي حساب $A \times B$ أو AB إذا كان عدد أعمدة A يساوي عدد صفوف B .
- ناتج ضرب مصفوفة من الرتبة $m \times n$ في مصفوفة من الرتبة $n \times p$، هو مصفوفة من الرتبة $m \times p$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$A \quad B \quad AB$

$2 \times 3 \quad 3 \times 4 \rightarrow 2 \times 4$

عدد الصفوف = عدد الأعمدة

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 8 & 4 \\ 9 & 5 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$C \quad D \quad CD$

$3 \times 2 \quad 3 \times 5$ غير معرّف

عدد الصفوف ≠ عدد الأعمدة $(2 \neq 3)$

إضاءة

تذكّر التالي: لكي يكون ناتج ضرب مصفوفتين معرّفًا، فلا بد لعدد أعمدة المصفوفة اليسرى أن يساوي عدد صفوف المصفوفة اليمنى.

غالبًا ما تُستعمل الكتابة $A_{m \times n}$ للدلالة على أن المصفوفة هي من الرتبة mn .

مثـــال 1 تمييز إمكانية ضرب مصفوفتين

اذكر إن كان ناتج ضرب المصفوفتين مُعرّفًا أم لا. فإذا كان معرّفًا، أعطِ رتبته.

أ $A_{2\times5} \quad B_{5\times3}$

$A \quad B \quad AB$

$2 \times 5 \quad 5 \times 3 = 2 \times 3$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فإن ناتج الضرب مُعرّف، وهو مصفوفة من الرتبة 2×3 .

ب $C_{4\times3} \quad D_{4\times5}$

$C \quad D \quad CD$

$4 \times 3 \quad 4 \times 5$ غير معرّف

بما أن عدد أعمدة المصفوفة C لايساوي عدد صفوف المصفوفة D، فإن ناتج الضرب غير مُعرّف.

نقطة مراقبة

1. استعمل مصفوفات المثال للإجابة عن الأسئلة. اذكر إن كان ناتج ضرب المصفوفتين مُعرّفًا أم لا. فإذا كان معرّفًا، أعطِ رتبته.

أ BA ب DC ج DB



كما استعملت النظر أفقيًّا لتعرّف أعمدة المصفوفة A وعموديًّا لتعرّف صفوف المصفوفة B بغية تقرير إن كان ناتج الضرب AB معرّفًا، فإنك ستقوم بالشيء نفسه لحساب عناصر المصفوفة ناتج الضرب.



ضرب المصفوفات

بالكلمات	عدديًا	جبريًا
لحساب العنصر في p_{kj} المصفوفة $P=AB$ ، اضرب كل عنصر في الصف k من المصفوفة A في العنصر الذي يقابله في العمود j من المصفوفة B، ثم اجمع نواتج الضرب هذه.	$P=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}1\times5+2\times7 & 1\times6+2\times8\\3\times5+4\times7 & 3\times6+4\times8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\b_1 & b_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_1 & c_2\\d_1 & d_2\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}a_1c_1+a_2d_1 & a_1c_2+a_2d_2\\b_1c_1+b_2d_1 & b_1c_2+b_2d_2\end{bmatrix}$

مثـــال 2 ضرب المصفوفات

استعمل المصفوفات $A=\begin{bmatrix}0 & 4 & 9\\-3 & 3 & 2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}5 & 1\\-2 & 7\\6 & 0\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}11 & -1\\12 & 10\end{bmatrix}$

احسب ناتج الضرب إن كان مُعرّفًا.

أ AB

تفحّص الرتب لكي تقرر إن كان ناتج الضرب معرّفًا. رتبة المصفوفة A هي 2×3 ، ورتبة المصفوفة B هي 3×2 . الناتج AB معرّف، وسوف يكون مصفوفة من الرتبة 2×2 .

اضرب الصف 1 من المصفوفة A في العمود 1 من المصفوفة B، كما هو مُبيّن أدناه، واكتب الناتج مكان العنصر C_{11} في المصفوفة ناتج الضرب C .

$$C=AB=\begin{bmatrix}0 & 4 & 9\\-3 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\-2 & 7\\6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46 & ?\\? & ?\end{bmatrix} \leftarrow 0(5)+4(-2)+9(6)$$

اضرب الآن الصف 1 من المصفوفة A في العمود 2 من المصفوفة B، كما هو مُبيّن أدناه، واكتب الناتج مكان العنصر C_{12} في المصفوفة ناتج الضرب C .

$$C=AB=\begin{bmatrix}0 & 4 & 9\\-3 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\-2 & 7\\6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46 & 28\\? & ?\end{bmatrix} \leftarrow 0(1)+4(7)+9(0)$$

اضرب الصف 2 من المصفوفة A في العمود 1 من المصفوفة B، كما هو مُبيّن أدناه، واكتب الناتج مكان العنصر C_{21} في المصفوفة ناتج الضرب C.

$$C=AB=\begin{bmatrix}0 & 4 & 9\\-3 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\-2 & 7\\6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46 & 28\\-9 & ?\end{bmatrix} \leftarrow (-3)(5)+3(-2)+2(6)$$

اضرب الصف 2 من المصفوفة A في العمود 2 من المصفوفة B، كما هو مُبيّن أدناه، واكتب الناتج مكان العنصر C_{22} في المصفوفة ناتج الضرب C.

$$C=AB=\begin{bmatrix}0 & 4 & 9\\-3 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\-2 & 7\\6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46 & 28\\-9 & 18\end{bmatrix} \leftarrow (-3)(1)+3(7)+2(0)$$

إذًا $C=AB=\begin{bmatrix}46 & 28\\-9 & 18\end{bmatrix}$

انتبـــه!

لاحظ أن ناتجي الضرب AB و BA يختلفان عادة.
لا يتمتع ضرب المصفوفات بخاصية التبديل.

ب BA

تفحّص الرتب لكي تقرر إن كان ناتج الضرب معرّفًا. رتبة المصفوفة B هي 3×2 ورتبة المصفوفة A هي 2×3 . الناتج BA معرّف وهو مصفوفة من الرتبة 3×3 .

$$BA=\begin{bmatrix}5(0)+1(-3) & 5(4)+1(3) & 5(9)+1(2)\\ -2(0)+7(-3) & -2(4)+7(3) & -2(9)+7(2)\\ 6(0)+0(-3) & 6(4)+0(3) & 6(9)+0(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 23 & 47\\ -21 & 13 & -4\\ 0 & 24 & 54\end{bmatrix}$$

ج AD

تفحّص الرتب لكي تقرر إن كان ناتج الضرب معرّفًا. رتبة المصفوفة A هي 2×3 ، ورتبة المصفوفة D هي 2×2 . الناتج AD غير معرّف.



نقطة مراقبة **2.** احسب ناتج الضرب إن كان ذلك ممكنًا.

أ BD ب DA

تُستعمل المصفوفات في إدارة الأعمال لحساب المداخيل والكلف والأرباح.

مثـــال 3



تطبيق على إجراء الجردة



تبيع شركة الفجر للتجهيزات الرياضية نوعين من ألبسة الجري في مخزنين. يُبيّن الجدول الأول موجودات المخزنين من كل نوع ألبسة، والثاني أسعار المبيع والكلفة والربح لكل وحدة من وحدات كل نوع. جِد الكلفة الكلّية لنوعي الألبسة في كل مخزن.

موجودات المخزنين

	عادي	ممتاز
المخزن 1	14	10
المخزن 2	7	8

المداخيل والكلف والأرباح بآلاف الدنانير

	السعر	الكلفة	الربح
عادي	89	44	45
ممتاز	119	58	61

استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المداخيل والكلف والأرباح لكل مخزن.

$$\begin{bmatrix}14 & 10\\ 7 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}89 & 44 & 45\\ 119 & 58 & 61\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14(89)+10(119) & 14(44)+10(58) & 14(45)+10(61)\\ 7(89)+8(119) & 7(44)+8(58) & 7(45)+8(61)\end{bmatrix}$$

مداخيل كلف أرباح

$$=\begin{bmatrix}2436 & 1196 & 1240\\ 1575 & 772 & 803\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{المخزن } 1\\ \text{المخزن } 2\end{matrix}$$

كلف الألبسة في المخزن 1 هي 1196 ألف دينار وفي المخزن 772 ألف دينار.



نقطة مراقبة **3.** بدّل موجودات المخزن 2 بحيث تصبح 6 من النوع العادي وَ 9 من النوع الممتاز. احسب المصفوفة ناتج الضرب من جديد وحدِّد أرباح المخزن 2.

المصفوفة المربَّعة Square matrix هي مصفوفة لها العدد نفسه من الأعمدة والصفوف. إنها مصفوفة من الرتبة $m\times m$. **القطر الرئيس Main diagonal** في مصفوفة مربعة هو القطر الذي يصل الزاوية العليا إلى اليسار بالزاوية السفلى إلى اليمين.

مصفوفة الوحدة Unit matrix هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار باستثناء تلك الواقعة على القطر الرئيس حيث أنها تساوي 1. هناك مصفوفة وحدة واحدة لكل رتبة $n\times n$ من رتب المصفوفات المربعة.

مصفوفة الوحدة للرتبة 2×2 هي $I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ وللرتبة 3×3 هي $I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

في ضرب المصفوفات، تؤدي مصفوفة الوحدة من رتبة معينة في ضرب المصفوفات دور العدد 1 في ضرب الأعداد. إذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة $m\times m$ ، فإن $AI_m=I_mA=A$.

فإذا كانت $A=\begin{bmatrix}5&7\\-1&4\end{bmatrix}$ ، فإن:

$$AI_2=\begin{bmatrix}5&7\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\times1+7\times0&5\times0+7\times1\\-1\times1+4\times0&-1\times0+4\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&7\\-1&4\end{bmatrix}=A$$

و

$$I_2A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&7\\-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times5+0\times(-1)&1\times7+0\times4\\0\times5+1\times(-1)&0\times7+1\times4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&7\\-1&4\end{bmatrix}=A$$

بما أن من الممكن ضرب مصفوفة مرَّبعة في نفسها، فيمكن إجراء ذلك تكرارًا والحصول على قوة هذه المصفوفة.

مثـــال 4 قوى المصفوفات المرَّبعة

$$A=\begin{bmatrix}7&3\\-2&0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2&4&1\\5&0&-2\\1&-1&3\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&0&-2\end{bmatrix}\quad I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

احسب إن كان ذلك ممكنًا.

أ A^2

$$A^2=\begin{bmatrix}7&3\\-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&3\\-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\times7+3(-2)&7\times3+3\times0\\-2\times7+0\times(-2)&-2\times3+0\times0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}43&21\\-14&-6\end{bmatrix}$$

ب B^2

$$B^2=\begin{bmatrix}2&4&1\\5&0&-2\\1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4&1\\5&0&-2\\1&-1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\times2+4\times5+1\times1&2\times4+4\times0+1(-1)&2\times1+4(-2)+1\times3\\5\times2+0\times5+(-2)\times1&5\times4+0\times0+(-2)(-1)&5\times1+0(-2)+(-2)\times3\\1\times2+(-1)\times5+3\times1&1\times4+(-1)\times0+3(-1)&1\times1+(-1)(-2)+3\times3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}25&7&-3\\8&22&-1\\0&1&12\end{bmatrix}$$



4. احسب المصفوفة إن كان ذلك ممكنًا.

أ C^2 ب A^3 ج B^3 د I^4

فكِّرْ وناقِش

1. صِف ما يحدث عندما تحاول أن تجد العنصر الأول في ناتج الضرب AB، إذا كانت رتبة كل من المصفوفتين 2×3 .
2. هل ضرب المصفوفات عملية تبديلية؟ أعطِ مثالاً يدعم جوابك.
3. A مصفوفة من الرتبة 4×2؛ هل يُمكنك أن تحسب A^2 ؟ أوضح السبب.
4. **كن منظّمًا** انسخ المخطّط المقابل، ثم أكمله. اكتب سؤالاً في المعيّن يساعد الجواب عنه على التوجه يسارًا أو يمينًا. ثم أكمل المخطَّط موضّحًا عملية ضرب المصفوفات.

إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $m\times n$
وكانت B مصفوفة من الرتبة $p\times q$

؟

$AB = \ldots$

رتبة AB :...

لإيجاد AB ...



2-3 التماريـن

تمــارين موجّهــة

1 **مـفــردات** مصفوفة من الرتبة 2×2 جميع عناصرها تساوي 1 هي ـــــــــ (مصفوفة مرَّبعة أو مصفوفة وحدة).

انظر المثال 1

اذكر إن كان ناتج الضرب معرّفًا، وأعطِ رتبته إن كان كذلك.

2 $A_{4\times5}B_{5\times3}$ **3** $B_{5\times3}A_{4\times5}$ **4** $C_{9\times5}D_{5\times9}$

5 $D_{5\times9}C_{9\times5}$ **6** $E_{6\times2}F_{2\times6}$ **7** $F_{2\times6}E_{6\times2}$

انظر المثال 2

استعمِل المصفوفات التالية لحل التمارين من 8 إلى 13. احسب ناتج الضرب إن كان ذلك ممكنًا.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 7 & 3\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 5 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}3 & -1 & 7 & 10\\ 1 & -1 & 3 & 5\end{bmatrix},\ I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

8 BA **9** CA **10** CB **11** DC **12** BI **13** IB

انظر المثال 3

14 **إعادة تصنيع** يقوم طلاب ثانوية ابن الهيثم بجمع مواد قابلة لإعادة التصنيع لبيعها وتمويل حفل نهاية السنة الدراسية. يُبيّن الجدول الأول التالي ما جمعه الطلاب من المواد المختلفة في ثلاثة أسابيع. ويُبيّن الثاني المبالغ التي قبضوها كل أسبوع ثمنًا للكيلوغرام الواحد من كل نوع. استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلّي الذي جمعوه من بيع كل نوع.

المواد المجموعة			
النوع	الأسبوع 1	الأسبوع 2	الأسبوع 3
زجاج	29	25	16
علب	8	11	6
صحف	163	127	206
أوراق	53	107	84

الأثمان بالدنانير				
الأسبوع	زجاج	علب	صحف	أوراق
1	20	700	20	1060
2	20	550	10	1000
3	10	420	20	1030

انظر المثال 4

استعمِل المصفوفات التالية لحل التمارين من 15 إلى 18. احسب كل قوة، إن كان ذلك ممكنًا.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 4 & 2\\ -1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

15 A^2 **16** A^3 **17** C^2 **18** B^2

تمـــارين وحلُّ مســـائـل

تمارين حرّة	
لحل التمارين	أنظر المثال
24–19	1
29–25	2
30	3
40–31	4

اذكر إن كان ناتج الضرب معرّفًا، وأعطِ رتبته إن كان كذلك.

19 $A_{2\times1}B_{2\times3}$ **20** $B_{2\times3}A_{2\times1}$ **21** $C_{3\times5}D_{5\times1}$

22 $D_{5\times1}C_{3\times5}$ **23** $E_{7\times7}F_{6\times7}$ **24** $F_{6\times7}E_{7\times7}$

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 25 إلى 29. احسب ناتج الضرب، إن كان ذلك ممكنًا.

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 7 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}4\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$$

25 AB **26** CA **27** CB **28** IC **29** CI

30 **جردة** يبيع أحد المحالّ قياسين من صناديق الصابون. يُبيّن الجدول الأول أدناه الموجودات من هذه الصناديق في فرعين من فروع المحل، بينما يُبيّن الجدول الثاني مداخيل كل فرع وكلفه وأرباحه، لكل قياس من قياس الصناديق. جِد الكلف الكلّية.

موجودات الصناديق في الفرعين		
	قياس عادي	قياس كبير
الفرع 1	11	7
الفرع 2	8	6

المداخيل والكلف والأرباح			
	مدخول	كلفة	ربح
قياس عادي	130 000	75 000	55 000
قياس كبير	190 000	110 000	80 000

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 31 إلى 40. اكتب على أبسط صورة، إن كان ذلك ممكنًا.

$$Q=\begin{bmatrix}4 & 13 & -9\end{bmatrix}\quad S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\quad T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

31 S^2 **32** B^2 **33** T^2 **34** S^3 **35** Q^3

36 AB **37** BA **38** $2BA-C$ **39** $3CB+2B$ **40** $(BA)^2$

41 **سباق الدراجات** يتألف سباق الدراجات من ثلاث مراحل مختلفة الصعوبة، لذلك تُضرب نتيجة كل مرحلة في عامل يراعي صعوبتها وعمر المتباري. يُبيّن الجدول الأول النقاط التي حصل عليها المتبارون الأربعة في كل مرحلة، بينما يُبيّن الثاني عامل التصحيح لكل مرحلة وكل متبارٍ.

نقاط المتبارين في المراحل الثلاث			
المتباري	المرحلة 1	المرحلة 2	المرحلة 3
كوران	23.0	18.5	19.5
هلو	24.0	28.5	25.0
كاوه	19.0	22.0	21.5
كارزان	27.0	26.5	28.0

عوامل التصحيح				
المرحلة	كوران	هلو	كاوه	كارزان
1	1.2	1.6	2.0	1.8
2	2.3	2.0	2.8	2.5
3	2.7	2.6	3.2	3.1

أ نظّم المعطيات في مصفوفتين. احسب ناتج الضرب.

ب استعمل المصفوفة ناتج الضرب لحساب النقاط النهائية لكل متبارٍ.

ج ما السبب الذي يجعل العناصر خارج القطر الرئيس في ناتج الضرب لا معنى لها في هذه المسألة؟

تفكير ناقد **اذكر إن كانت المقولة صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا، أو خطأ دائمًا. أوضح جوابك.**

42 إذا كانت المصفوفة A من الرتبة 3×2 وكان للمصفوفة B ثلاثة صفوف، فإن المصفوفة AB مُعرّفة.

43 إذا كانت المصفوفة A من الرتبة 3×2 وكان للمصفوفة B ثلاثة أعمدة، فإن المصفوفة AB مُعرّفة.

44 إذا كانت المصفوفة AB مُعرّفة، فإن المصفوفة BA مُعرّفة أيضًا.

45 إذا كانت المصفوفتان AB وَ BA معرَّفتيْن فإنهما مصفوفتان مربعتان.

46 أ **اكتب** مصفوفة تُمثِّل إحداثيات رؤوس المثلث JKL، بحيث توجد الإحداثيات الأولى في الصف الأول والإحداثيات الثانية في الثاني.

ب استعمل المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ لضرب كل إحداثي أول وكل إحداثي ثانٍ في 2.

ج ارسم المثلث الذي تُمثِّل المصفوفة الجديدة إحداثيات رؤوسه. صِف المثلث الجديد.

47 جد قيمة x بحيث تصح المساواة المصفوفية. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & \frac{x}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 21 & -19 \\ 24 & -26 \end{bmatrix}$

48 **اكتب** ما السبب الذي يجعل المساواة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ صحيحة؟

49 **مباراة في التطريز** تشتمل مباراة التطريز على ثلاثة أشكال مختلفة الصعوبة، لذلك تُضرب نقطة كل شكل بعامل يراعي صعوبته، وعمر المتبارية. يُبيّن الجدول الأول نقاط المتباريات في كل شكل، ويُبيّن الجدول الثاني عامل التصحيح، لكل شكل وكل متبارية. جِد النقاط النهائية لكلّ متبارية.

النقاط التي أعطتها اللجنة الفاحصة للمتباريات			
المتبارية	الشكل 1	الشكل 2	الشكل 3
شارا	16.5	18.0	17.5
سازان	12.5	14.0	17.0
ديلان	16.0	19.5	18.0

عوامل التصحيح			
الشكل	شارا	سازان	ديلان
1	2	3	2
2	3	3	1
3	2	2	1

50 **مبيعات** يُبيّن الجدول الأول أدناه مبيعات عدد من العاملين في محل لبيع الأحذية، بينما يُبيّن الثاني نسبة العمولة الجديدة والنسبة القديمة لكل بائع.

مبيعات العاملين (بالدنانير)			
العامل	للرجال	للنساء	للأولاد
شيرزاد	5 200 000	4 200 000	2 300 000
بختيار	8 100 000	8 400 000	3 100 000
زانا	2 700 000	7 400 000	6 300 000

نسبة العمولة		
	النسبة القديمة	النسبة الجديدة
للرجال	9%	9.5%
للنساء	9%	10%
للأولاد	13%	12%

أ جِد ناتج ضرب المصفوفتَيْن. كم كانت عمولة كل بائع وفقًا لكل نسبة؟

ب أي بائع كان المستفيد الأكبر من تغيير نسب العمولة؟

51 **أُحجية** على المتبارين في إحدى مسابقات التلفزيون معرفة الموقع الذي عليهم التوجه نحوه، والذي يحدده عنصران من عناصر المصفوفة ناتج الضرب $P = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -11 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$.

يُحدِّد العنصر P_{21} موقع خط العرض (شمالاً إذا كان العنصر موجبًا، وجنوبًا إذا كان العنصر سالبًا) كما يُحدِّد العنصر P_{12} موقع خط الطول (شرقًا إذا كان العنصر موجبًا، وغربًا إذا كان العنصر سالبًا). أي موقع على الخريطة المقابلة يجب أن يكون قبلة المتبارين؟



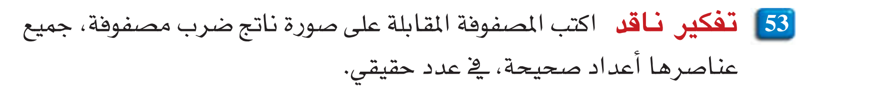
52 **كرة قدم** جِد مجموع النقاط التي حققّها كل فريق.

الفريق	رميات ركنية	ضربات حرة	أهداف
المدينة	11	9	4
الرياضي	15	12	6
الجزيرة	6	5	9

نوع الهدف	النقاط
رميات ركنية	6
ضربات حرّة	1
أهداف	3

53 **تفكير ناقد** اكتب المصفوفة المقابلة على صورة ناتج ضرب مصفوفة، جميع عناصرها أعداد صحيحة، في عدد حقيقي.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{4} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$



تحضير للاختبار

54 B مصفوفة من الرتبة 5×12. أي شرط ينبغي أن تحقّقه المصفوفة C لكي يكون ناتج الضرب CB مُعرّفًا؟



أ لها 5 أعمدة　　ب لها 12 عمودًا　　ج لها 5 صفوف　　د لها 12 صفًّا

55 أي من النتائج التالية لا تساوي النتائج الثلاث الأخرى؟

أ $2\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$　　ب $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$　　ج $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$　　د $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

56 أي من المقادير التالية يساوي العنصر C_{22} في ناتج الضرب $C=\begin{bmatrix}7 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 3 & 8\end{bmatrix}$؟

(أ) $4(-2)+2\times3$ (ب) $7\times5+(-1)8$ (ج) $4\times5+2\times8$ (د) $(-1)3+2\times8$

57 **جواب مختصر** $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -4 & 5\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}3 & -6\\ 6 & 8\end{bmatrix}$. اذكر إن كانت المصفوفة $\begin{bmatrix}33 & -18\\ -14 & 64\end{bmatrix}$ تساوي AB، أو BA أو غير ذلك.

تحدٍّ وتوسّع

58 هل ضرب المصفوفات عملية تجميعية؟ أي هل $(AB)C = A(BC)$ بافتراض أن جميع نواتج الضرب مُعرّفة؟ أعطِ مثالاً يدعم جوابك.

59 **منقولة Transpose** المصفوفة A هي المصفوفة A^T الناتجة عن استبدال كل صف من صفوف المصفوفة A بعمودها صاحب الرتبة نفسها. مثال على ذلك: إذا كانت $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix}$ فإن منقولتها هي المصفوفة $A^T=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}$

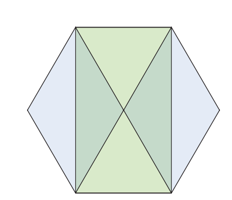
أ) هل ضرب مصفوفة في منقولتها ممكن دائمًا؟ أوضح جوابك.

ب) جِد المصفوفة $P=AA^T$ إذا كانت $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$. هل تتضمن المصفوفة P عناصر متساوية؟ ما هي؟

60 احسب قوى المصفوفة $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ ، ودوّن في كل مرة قيمة العنصر الموجود على الصف الثاني والعمود الثاني من المصفوفة الناتجة؟ ما العلاقة بين هذه القيم على التوالي؟

مراجعة لولبية

تصميم زخرفي **الهيئة الخارجية للشكل المقابل هي سداسي منتظم. المثلث الأخضر مثلث متساوي الأضلاع.** (الصفوف السابقة)



61 كم زوجًا من الزوايا المتقابلة بالرأس يتضمّن هذا الشكل؟

62 كم مثلثًا متطابقًا مع المثلث الأخضر يتضمّن هذا الشكل؟

63 كم قطعة مستقيمة متطابقة مع ضلع السداسي المنتظم يتضمّن هذا الشكل؟

ارسم في الفضاء الإحداثي كلاً من النقاط التالية. (الدرس 1-1)

64 $(0, 4, -5)$ **65** $(2, 2, 6)$ **66** $(-3, -3, 3)$ **67** $(1, -1, -1)$

احسب كل مقدار إن كان ذلك ممكنًا، حيث $S=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ و $T=\begin{bmatrix}0.5 & 0.83\\ 5 & 0\end{bmatrix}$ و $V=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ -4 & 1 & -1\end{bmatrix}$. (الدرس 1-3)

68 $S+T$ **69** $V-T$ **70** $4T$

3–3 المصفوفات والتحويلات الهندسية

Matrices and Geometric Transformations



يستعمل المصفوفات لتحويل الأشكال الهندسية.

المفردات
Vocabulary

مصفوفة السحب
Translation matrix

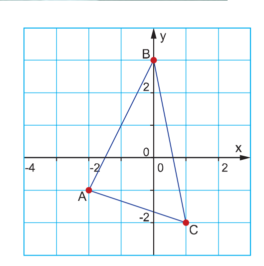
مصفوفة الدوران
Rotation matrix

مصفوفة الانعكاس
Reflection matrix

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل الفنانون أنماط تحويل مُكرَّرة للقيام بأعمالهم الفنية. (التمرين 16).

يُمكنك الدلالة على موقع شكل هندسي في المستوي الإحداثي وتحديد هيئته وقياساته باستعمال أزواج مرتَّبة تُمثِّل إحداثيات رؤوسه. فمثلاً، رؤوس الشكل المقابل هي النقاط $A(-2, -1)$ وَ $B(0, 3)$ وَ $C(1, -2)$.



يُمكنك تمثيل هذا المثلث بالمصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

الإحداثيات الأولى ← (الصف الأول)
الإحداثيات الثانية ← (الصف الثاني)

السحب Translation تحويل هندسي يُحوِّل نقطة $A(x, y)$ إلى نقطة أخرى $A'(x', y')$، حيث $x' = x + a$ وَ $y' = y + b$ (a وَ b عددان حقيقيان ثابتان).

يُمكن تمثيل السحب السابق بواسطة مصفوفة يتكرر فيها العمود $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ بعدد رؤوس الشكل المطلوب سحبه. تُسمّى هذه المصفوفة **مصفوفة السحب Translation Matrix**.

مثـــال 1 استعمال المصفوفات لسحب الأشكال الهندسية

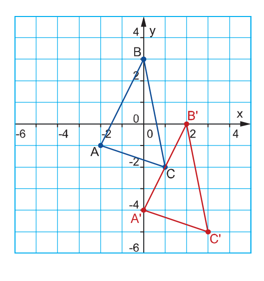
اسحب المثلث ABC، حيث $A(-2, -1)$ وَ $B(0, 3)$ وَ $C(1, -2)$، وحدتين إلى اليمين وَ 3 وحدات إلى أسفل. احسب إحداثيات رؤوس المثلث الصورة ثم ارسمه.

مصفوفة السحب هي

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

السحب الأفقي ← (الصف الأول)
السحب العمودي ← (الصف الثاني)

لحساب إحداثيات صورة المثلث بالسحب المذكور أعلاه، اجمع المصفوفة التي تُمثل المثلث الأصلي مع مصفوفة السحب.



مصفوفة المثلث + مصفوفة السحب

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+2 & 0+2 & 1+2 \\ -1-3 & 3-3 & -2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

صورة المثلث ABC بالسحب هي المثلث $A'B'C'$ حيث $A'(0, -4)$ وَ $B'(2, 0)$ وَ $C'(3, -5)$.



1. اسحب المثلث ABC، حيث $A(2, 4)$ وَ $B(3, 1)$ وَ $C(1, -1)$ 3 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل. احسب إحداثيات رؤوس المثلث الصورة، ثم ارسمه.

التناسب الهندسي (التحاكي) Dilation تحويل يُغيّر قياسات الشكل–الأصل (بالتكبير أو التصغير) بحيث يكون الشكل–الصورة مشابهًا للشكل–الأصل. تذكّر أن للأشكال المتشابهة الهيئة نفسها من دون أن تكون لها القياسات نفسها؛ وأن الزوايا المتقابلة تتطابق بينما تتساوى نسب الأضلاع المتقابلة.

عندما يكون مركز التناسب الهندسي في نقطة الأصل من المستوي الإحداثي، يكفي أن تضرب مصفوفة الشكل–الأصل بنسبة التناسب الهندسي لكي تحصل على مصفوفة الشكل–الصورة. سوف

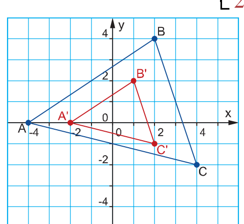
مثـــال 2 استعمال المصفوفات لتحويل الأشكال الهندسية بتناسب هندسي

حوّل المثلث ABC ، حيث $A(-4, 0)$ ، $B(2, 4)$ ، $C(4, -2)$ ، بتناسب هندسي مركزه نقطة الأصل ونسبته $\frac{1}{2}$ (تصغير). احسب إحداثيات رؤوس المثلث – الصورة ثم ارسمه.

اضرب مصفوفة المثلث في النسبة $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-4) & \frac{1}{2}\times 2 & \frac{1}{2}\times 4 \\ \frac{1}{2}\times 0 & \frac{1}{2}\times 4 & \frac{1}{2}(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

← الإحداثيات الأولى
← الإحداثيات الثانية



رؤوس المثلث–الصورة هي
$A'(-2, 0)$ وَ $B'(1, 2)$ وَ $C'(2, -1)$.



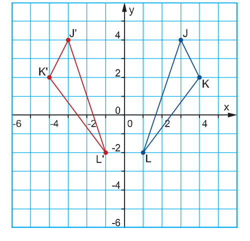
2. حوّل المثلث ABC ، حيث $A(2, 3)$ ، $B(5, 1)$ ، $C(-2, -7)$ ، بتناسب هندسي مركزه نقطة الأصل ونسبته $\frac{4}{3}$ (تكبير). احسب إحداثيات رؤوس المثلث – الصورة ثم ارسمه.

مصفوفة الانعكاس Reflection Matrix هي مصفوفة التحويل الذي يُنتج صورة شكل هندسي بالانعكاس حول محور. لتحصل على صورة شكل هندسي بالانعكاس حول المحور الثاني، اضرب المصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ في مصفوفة الشكل. من شأن ذلك أن يستبدل بكل إحداثي أول x معكوسه $(-x)$ وأن يحفظ كل إحداثي ثانٍ من دون تغيير.

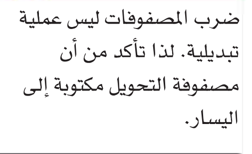
مثـــال 3 استعمال المصفوفات لعكس الأشكال الهندسية

حوّل المثلث JKL ، حيث $J(3, 4)$ وَ $K(4, 2)$ وَ $L(1, -2)$ ، بالانعكاس حول المحور الثاني. احسب إحداثيات رؤوس المثلث – الصورة ثم ارسمه.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

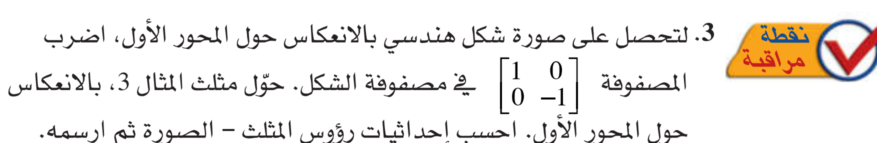


تم ضرب كل إحداثي أول في -1 وكل إحداثي ثاني في 1 .
رؤوس المثلث–الصورة هي $J'(-3, 4)$ ، $K'(-4, 2)$ ، $L'(-1, -2)$.



انتبـــه!
ضرب المصفوفات ليس عملية تبديلية. لذا تأكد من أن مصفوفة التحويل مكتوبة إلى اليسار.





3. لتحصل على صورة شكل هندسي بالانعكاس حول المحور الأول، اضرب المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ في مصفوفة الشكل. حوّل مثلث المثال 3، بالانعكاس حول المحور الأول. احسب إحداثيات رؤوس المثلث – الصورة ثم ارسمه.

مصفوفة الدوران Rotation Matrix هي مصفوفة التحويل الذي يُنتج صور شكل هندسي بدوران. يُبيّن المثال 4 أنواعًا من مصفوفة الدوران.

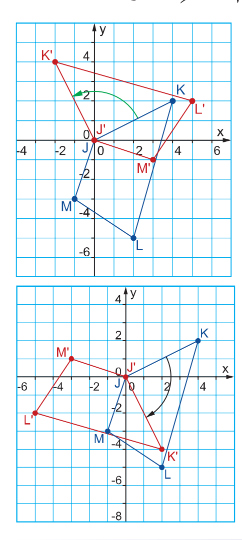
مثـــال 4 إيجاد صورة شكل هندسي بدوران

استعمل كل مصفوفة لتحويل الرباعي $JKLM$ ، حيث $J(0,0)$ وَ $K(4,2)$ وَ $L(2,-5)$ ، $M(-1,-3)$ ، بدوران حول نقطة الأصل. ارسم الشكل - الصورة ثم صفِ الدّوران.

أ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

الصورة هي صورة الرباعي بدوران عكس حركة عقارب الساعة زاويته 90° ومركزه نقطة الأصل.



ب $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

الصورة هي صورة الرباعي بدوران في اتجاه حركة عقارب الساعة زاويته 90° ومركزه نقطة الأصل.

إضـاءة

ضرب إحداثي في العدد 1- يؤدي إلى معكوسه.



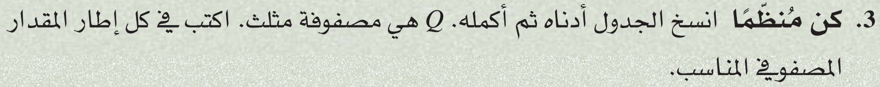
نقطة مراقبة

4. استعمل المصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. لتحويل المثلث ABC ، حيث $A(0,0)$ وَ $B(4,0)$ وَ $C(0,-3)$ ، بدوران حول نقطة الأصل. ارسم الشكل–الصورة، ثم صفِ الدّوران.

فكِّرْ وناقش

1. صِف التحويل الهندسي الناتج من ضرب المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ في مصفوفة شكل هندسي.

2. صِف التغيير الذي يُصيب الإحداثيات الأولى في مصفوفة شكل هندسي، عند ضرب كل من المصفوفات التالية فيها.



أ $A=[1 \quad 0]$ **ب** $B=[0 \quad 1]$ **ج** $C=[0.5 \quad 0]$ **د** $D=[1 \quad 1]$



3. كن مُنظّمًا انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. Q هي مصفوفة مثلث. اكتب في كل إطار المقدار المصفوفي المناسب.



التحويل	العملية مصفوفيًا
سحب المثلث عموديًا	
سحب المثلث أفقيًا	
تكبير المثلث أو تصغيره	
عكس المثلث حول المحور الثاني	
عكس المثلث حول المحور الأول	
إدارة المثلث 90° حول نقطة الأصل باتجاه عقارب الساعة	
إدارة المثلث 90° حول نقطة الأصل عكس اتجاه عقارب الساعة	

3-3 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** تُنتج ــــــــــ صورة شكل هندسي كما لو كان أحد محاور الإحداثيات مرآة.
(مصفوفة الانعكاس أو مصفوفة السحب)

انظر المثال 1

اسحب الرباعي $ABCD$ حيث $A(-2, 4)$ وَ $B(3, 1)$ وَ $C(1, -4)$ وَ $D(-2, -2)$ بالسحب المحدَّد في كل من التمرينين 2 و 3. جِد إحداثيات رؤوس الصورة، وارسمها.

2 وحدتان إلى اليسار ووحدة إلى أعلى.

3 وحدة واحدة إلى اليمين وصفر وحدة إلى أسفل.

انظر المثال 2

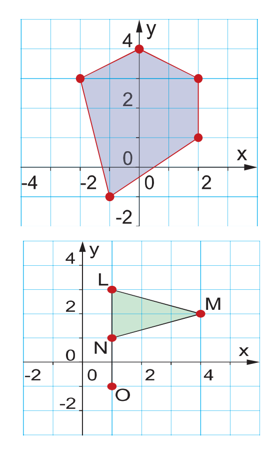
استعمِلْ مصفوفة لتكبير الرباعي $ABCD$ أو تصغيره، حيث $A(-2, 4)$ وَ $B(3, 1)$ وَ $C(1, -4)$ وَ $D(-2, -2)$، بالتحويل المحدَّد في كل من التمرينين 4 و 5. جِد إحداثيات رؤوس الصورة، وارسمها.

4 تصغير بنسبة 0.5.

5 تكبير بنسبة 2 .

انظر المثال 3

جِد صورة المضلَّع $ABCDE$ حيث $A(-2, 3)$ وَ $B(0, 4)$ وَ $C(2, 3)$ وَ $D(2, 1)$ وَ $E(-1, -1)$ ، كما هو مُحدد في كل من التمرينين 6 و 7. جِد إحداثيات رؤوس الشكل-الصورة، وارسمه.



6 بالانعكاس حول المحور الثاني.

7 استعمل المصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ لإيجاد صورة المضلَّع بانعكاس حول المستقيم $y = x$.

انظر المثال 4

استعمِلْ المصفوفة لإيجاد صورة الرباعي $LMNO$ حيث $L(1, 3)$ وَ $M(4, 2)$ وَ $N(1, 1)$ وَ $O(1, -1)$ بالدوران المُعطاة مصفوفته في كل من التمرينيْن 8 و 9. جِد إحداثيات رؤوس الشكل-الصورة، وارسمه.

8 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

9 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

تمارين وحلُّ مسائل

لحل التمارين	أنظر المثال
10	1
11	2
12	3
14-13	4

(تمارين حرّة)

10 اسحب الرباعي $ABCD$ حيث $A(0, 4)$ ، $B(-3, -1)$ ، $C(1, -5)$ ، $D(1, 0)$ 3 وحدات إلى اليمين وَ 3 وحدات إلى أعلى. جِد إحداثيات رؤوس الشكل-الصورة وارسمه.

11 جِد صورة الرباعي $ABCD$ حيث $A(1, 2)$ ، $B(-2, 3)$ ، $C(-3, 4)$ ، $D(-4, 1)$ بتناسب هندسي مركزه نقطة الأصل ونسبته $\frac{3}{2}$. جِد إحداثيات رؤوس الشكل-الصورة، وارسمه.

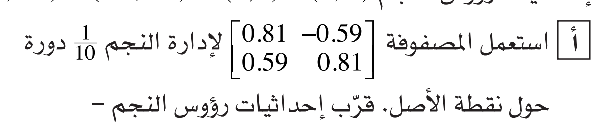
12 جِد صورة المضلع $ABCDE$ حيث $A(-2, 3)$ ، $B(0, 4)$ ، $C(2, 1)$ ، $D(2, 1)$ ، $E(-1, -1)$ بالانعكاس حول المحور الأول. جِد إحداثيات رؤوس الشكل-الصورة، وارسمه.

استعمِلْ كل مصفوفة لإيجاد صور المضلَّع $PQRST$ حيث $P(-3, 2)$ ، $Q(0, 0)$ ، $R(-4, 1)$ ، $S(-4, -4)$ ، $T(-1, 4)$ بالدوران صاحب المصفوفة. جِد إحداثيات رؤوس الشكل - الصورة، وارسمه.

13 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

14 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

15 **تصميم** صمَّمت جنار شعارًا لنادي البيئة في مدرستها على صورة نجم البحر. إحداثيات رؤوس النجم $S(0, 4)$، $T(4, 1)$، $R(2.5, -4)$، $F(-2.5, -4)$، $H(-4, 1)$.



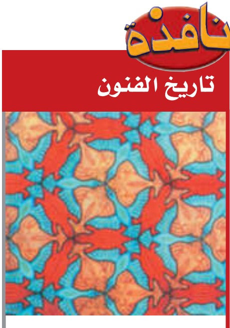
أ) استعمل المصفوفة $\begin{bmatrix} 0.81 & -0.59 \\ 0.59 & 0.81 \end{bmatrix}$ لإدارة النجم $\frac{1}{10}$ دورة حول نقطة الأصل. قرّب إحداثيات رؤوس النجم – الصورة إلى أقرب نصف وحدة.



ب) هل دار النجم في اتجاه حركة عقارب الساعة أم عكسه؟

نافذة

تاريخ الفنون



حوّل الفنان إيشر (1898–1972) أشكالاً هندسية متناظرة إلى عصافير وزواحف وأشكال أخرى.

16 **رسم** للقيام بعملية تبليط فنية، يتم رسم شكل أساسي وتحويله تكرارًا بتحويلات هندسية بحيث تُغطي الأشكال الناتجة المساحة المُراد تبليطها من دون فراغات أو تجاوز لشكل على آخر. قام أحد الفنانين برسم الشكل المُبيّن إلى اليسار.

أ) بدأ الفنان بتحويل الشكل بدوران زاويته 180° حول نقطة الأصل. اكتب مصفوفة هذا التحويل.

ب) جِد إحداثيات الرؤوس الأربعة للشكل الناتج من التحويل.

ج) قام الفنان بعد ذلك بإزاحة الصورة التي حصل عليها 4 وحدات إلى أعلى، ووحدتين إلى اليمين. اكتب مصفوفة الإزاحة.

د) جِد إحداثيات رؤوس الشكل الناتج عن هذه الإزاحة.

هـ) ارسم، في المستوى الإحداثي نفسه، الشكل الأصلي والشكل الأخير.

17 **تفكير ناقد** $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. أوضح نتيجة ضرب هذه المصفوفة T في مصفوفة شكل هندسي، ثم ضرب المصفوفة T في ناتج الضرب السابق.

اكتب المصفوفة التي تُحوّل الرسم المقابل الذي يُمثّل مجرّة الدب الأكبر، بالتحويل المعطى، ثم جِد إحداثيات الصورة.



18 إزاحة وحدتين إلى أعلى.

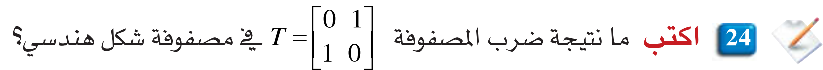
19 إزاحة وحدة واحدة إلى أسفل وَ 3 وحدات إلى اليسار.

20 تكبير نسبته 2.

21 انعكاس حول المحور الأول.

22 دوران حول نقطة الأصل في اتجاه عقارب الساعة 90°.

23 دوران حول نقطة الأصل عكس اتجاه عقارب الساعة 90°.

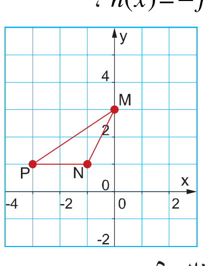


24 **اكتب** ما نتيجة ضرب المصفوفة $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ في مصفوفة شكل هندسي؟

25 اكتب مصفوفة التحويل الهندسي الذي يُحوّل الدالّة $f(x)$ إلى الدالّة $h(x) = -f(x)$، ومصفوفة التحويل الذي يُحوّلها إلى الدالّة $g(x) = f(-x)$.



26 أ) اكتب مصفوفة المثلث المقابل.



ب) اضرب المصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ في مصفوفة المثلث.

ج) ارسم مثلثًا جديدًا مستعملاً المصفوفة الناتجة. صِف هذا المثلث.

د) كرر الخطوتين (ب) وَ (ج) مع المثلث الجديد. ماذا تقول عن المثلث الثالث؟

تحضير للاختبار

27 أجرى سرجون تحويل شكل هندسي بتناسب هندسي متبوع بدوران حول نقطة الأصل في اتجاه عقارب الساعة زاويته 90° ، متبوع بانعكاس حول المحور الثاني. أي سلسلة تُمثِّل هذه التحويلات بالتتابع.

(أ) ضرب مصفوفة في عدد؛ جمع مصفوفتين؛ ضرب مصفوفتين.

(ب) ضرب مصفوفة في عدد؛ ضرب مصفوفتين؛ ضرب مصفوفتين.

(ج) جمع مصفوفتين؛ ضرب مصفوفتين؛ جمع مصفوفتين.

(د) ضرب مصفوفتين؛ جمع مصفوفتين؛ ضرب مصفوفة في عدد.

28 ما نتيجة ضرب مصفوفة شكل هندسي في المصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$؟

(أ) تكبير الشكل، ثم إدارته حول نقطة الأصل 90° في اتجاه عقارب الساعة.

(ب) تصغير الشكل، ثم إدارته حول نقطة الأصل 90° عكس اتجاه عقارب الساعة.

(ج) تصغير الشكل، ثم عكسه حول المحور الأول.

(د) تكبير الشكل، ثم عكسه حول المحور الثاني.

29 أي مصفوفة تستعمل لتحويل شكل بدوران حول نقطة الأصل زاويته 180°؟

(أ) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

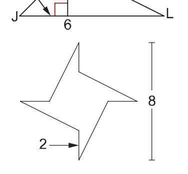
تحدٍّ وتوسّع

30 أي مصفوفة تستعمل لتحويل شكل بانعكاس حول المستقيم $y=-x$؟

31 أ) ارسم المثلث المقابل في المستوى الإحداثي واكتب مصفوفته.

ب) كيف تُحوّل هذا المثلث للحصول على الشكل الثاني؟

ج) استعمل مصفوفات للقيام بالتحويل، واكتب إحداثيات الرؤوس الأربعة للشكل-الصورة.



32 حوّل شكلاً هندسيًّا بالتحويل صاحب المصفوفة $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$. صِف هذا التحويل. ما الذي يحدث إذا حوّلت شكلاً بهذا التحويل تكرارًا؟

مراجعة لولبية

33 حدِّد إن كانت معطيات الجدول تعرّف دالَّة خطّية. (الصفوف السابقة)

البطاقات	2	5	8	11
الكلفة	35 000	87 500	140 000	192 500

حدِّد إن كان الزوج المرتَّب حلاً لنظام المتباينات. (الدرس 2-3)

34 $(2, -4)$؛ $\begin{cases} y > 2x-8 \\ y \le \frac{1}{4}x+2 \end{cases}$

35 $(0, 5)$؛ $\begin{cases} y > 0 \\ y \ge 2x-11 \\ 5x+y < 5.5 \end{cases}$

احسب، إن كان ذلك ممكنًا. (الدرس 3-2)

36 $\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

37 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

38 $[3 \ \ 1 \ \ -1]\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

4–3 المُحدِّدات وقاعدة كرامر

Determinants and Cramer's Rule





الأهداف

يحسب محدِّد مصفوفة 2×2 أو 3×3.

يحل نظامًا خطّيًّا باستعمال قاعدة كرامر.

المفردات Vocabulary

المحدِّد Determinant

مصفوفة المعاملات Coefficient matrix

قاعدة كرامر Crame's rule

من يستعمل هذا الأمر؟

يحتاج خبراء تغذية الرياضيّين أن يحلوا أنظمة معادلات خطّية لتحديد كميات السعرات الحرارية والبروتين والدهون والكربو هيدرات التي يحتاج إليها الرياضي في غذائه. (المثال 4).

يُزاوج علماء الرياضيات بين المصفوفات المربّعة والأعداد، بحيث يقابل كل مصفوفة مربّعة عدد حقيقي يُسمّى **مُحدِّد المصفوفة Determinant**. يُستعمل الرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ للدلالة على محدِّد المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. لمحدِّد المصفوفة دور مهم كما سترى لاحقًا.



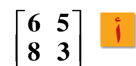
اعلم واحفظ — **محدد المصفوفة 2 × 2**

بالكلمات	عدديًا	جبريًا
محدِّد Determinant المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $ad - bc$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $= (1)(4) - (3)(2) = -2$	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ $= ad - bc$

مثال 1 إيجاد محدِّد مصفوفة 2 × 2

جِد محدِّد المصفوفة.

أ $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$



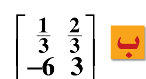
$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 3$$

$$= 18 - 40 = -22$$

اطرح ناتج ضرب الوسطين من ناتج ضرب الطرفين.

محدِّد المصفوفة هو -22.

ب $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

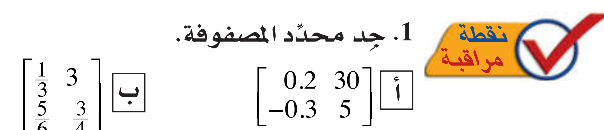


$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times 3 - \frac{2}{3}(-6) = 1 + 4 = 5$$

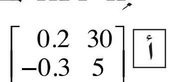
محدِّد المصفوفة هو 5.

نقطة مراقبة

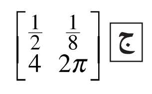




1. جِد محدِّد المصفوفة.







أ $\begin{bmatrix} 0.2 & 30 \\ -0.3 & 5 \end{bmatrix}$ **ب** $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{5}{6} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ **ج** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 4 & 2\pi \end{bmatrix}$

يُمكنك أن تستعمل المحدِّدات لحل أنظمة المعادلات الخطّية. لحل النظام $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$
ابدأ بكتابة المصفوفة $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ التي تُسمى **مصفوفة العوامل** **Coefficient matrix**.واحسب محدّدها D ثم احسب المحدّدين $Dx=\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}$ وَ $Dy=\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$. استعمل الآن قاعدة كرامر التالية:



قاعدة كرامر للأنظمة 2×2

إذا كان محدّد مصفوفة العوامل D مختلفًا عن 0، فللنظام $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$
حل وحيد هو $x=\frac{Dx}{D}$ وَ $y=\frac{Dy}{D}$ ، حيث $Dx=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ، $Dy=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

يمكنك استعمال المحدِّدات D وَ Dx وَ Dy لتعرف إن كان النظام محدَّدًا (له حل وحيد) أو مستحيلاً (لا حلول له) أو غير محدَّد (له عدد غير محدود من الحلول). في التصنيف التالي سنفترض أنّ a_1 وَ b_1 ليسا صفرًا في الوقت نفسه، وأنّ a_2 وَ b_2 ليسا صفرًا في الوقت نفسه.

تصنيف الأنظمة من معادلتين خطّيتين بمجهولين		
إذا كان $D\neq0$ فالنظام محدَّد.	إذا كان $D=0$ وَ $Dx=Dy=0$ فالنظام غير محدَّد.	إذا كان $D=0$ وَ $Dx\neq0$ أو $Dy\neq0$ فالنظام مستحيل.

مثـــــال 2 حل الأنظمة الخطّية 2×2 باستعمال قاعدة كرامر

حُلّ النظام الخطّي باستعمال قاعدة كرامر.

أ $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$

الخطوة 1 جِد محدِّد مصفوفة العوامل.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1(-1)-2(-1)=1$$

النظام محدَّد لأنّ $D\neq0$

الخطوة 2 جِد المحدِّدين Dx وَ Dy .

$$Dx=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-4 \quad ، \quad Dy=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-7$$

الخطوة 3 جِد قيمة x وَ قيمة y .

$$x=\frac{Dx}{D}=\frac{-4}{1}=-4 \quad ؛ \quad y=\frac{Dy}{D}=\frac{-7}{1}=-7$$

للنظام حل وحيد هو $(-4, -7)$.

ب $\begin{cases} y-2=3x \\ 3x-y=7 \end{cases}$

الخطوة 1 اكتب النظام على الصورة العامة.

$$\begin{cases} 3x-y=-2 \\ 3x-y=7 \end{cases}$$

الخطوة 2 جِد محدِّد مصفوفة العوامل.

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=3(-1)-3(-1)=0$$

الخطوة 3 احسب Dx .

$$Dx=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}=9$$

بما أن $D=0$ وَ $Dx\neq0$ فإن النظام مستحيل.

$$Dy=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=27 \qquad y\neq0$$

إضاءة

إذا وجدت $D=0$ وَ $Dx=0$.
فعليك أن تحسب Dy لتحكم على النظام إن كان مستحيلاً أم غير محدَّد.

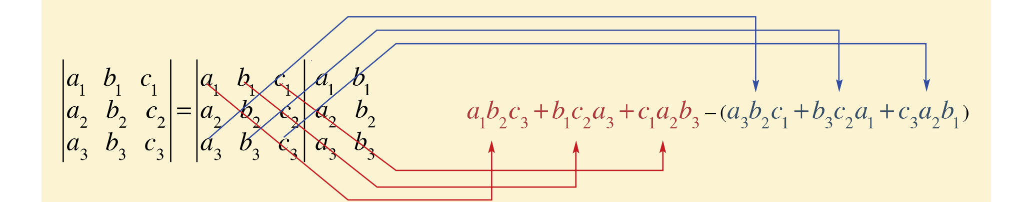


نقطة مراقبة **2.** حُلّ النظام باستعمال قاعدة كرامر $\begin{cases} 6x-2y=14 \\ 3x=y+7 \end{cases}$

لكي تستعمل قاعدة كرامر لحل نظام خطي 3×3، عليك أن تحسب محدِّدات مصفوفات من الرتبة 3×3. يُبيّن المخطّط أدناه إحدى الطرق للقيام بذلك.

اكتب العمودين الأوّلين إلى يمين المحدِّد.

اجمع نواتج ضرب أعداد كل قطر أحمر، ثم اطرح نواتج ضرب أعداد كل قطر أزرق.



$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} \quad a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-(a_3b_2c_1+b_3c_2a_1+c_3a_2b_1)$$

مثـــال 3 حساب محدِّد مصفوفة 3 × 3

جِد محدِّد المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$.

اكتب المحدِّد، ثم اكتب العمودين الأولين إلى يمين المحدِّد:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

الخطوة 1 احسب ناتج ضرب أعداد كل قطر نازل واجمع النواتج.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(4)(10)(-1)+(-2)(1)(2)+(0)(-3)(6)=-44$$

الخطوة 2 احسب ناتج ضرب أعداد كل قطر صاعد واجمع النواتج.

$$(2)(10)(0)+(6)(1)(4)+(-1)(-3)(-2)=18$$

الخطوة 3 اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول.

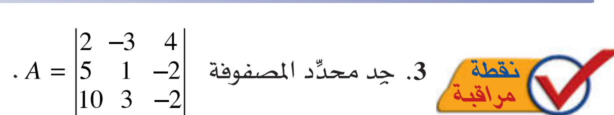
$$-44-18=-62$$

محدِّد المصفوفة A يساوي -62 .

تحقَّق استعمل الحاسبة البيانية.



يساعدك رسم الأقطار بخط خفيف على تحديد نواتج الضرب الستة الضرورية لحساب المحدَّد.



3. جِد محدِّد المصفوفة $A=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \\ 10 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

يمكن توسيع قاعدة كرامر لتشمل الأنظمة الخطّية 3×3.



قاعدة كرامر للأنظمة 3 × 3

إذا كان محدِّد مصفوفة العوامل مختلفًا عن 0 فللنظام

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

حل وحيد هو $x=\frac{Dx}{D}$ ، $y=\frac{Dy}{D}$ ، $z=\frac{Dz}{D}$

حيث $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ، $Dx=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ، $Dy=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ، $Dz=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

إذا كان $D\neq 0$ ، فللنظام حل وحيد.

إذا كان $D=0$ وَ $(Dx\neq 0$ أو $Dy\neq 0$ أو $Dz\neq 0)$ فالنظام مستحيل.

إذا كان $D=0$ و $(Dz=Dy=Dx=0)$ فالنظام غير محدّد.



مثال 4 تطبيق غذائي

يعمل أحد خبراء التغذية على تصميم نظام تغذية للاعبي كرة القدم. يتطلب النظام من اللاعب استهلاك 3600 سعرة حرارية وَ 750 g من الطعام يوميًا. يجب أن تشكّل السعرات الحرارية التي مصدرها البروتين والدهون 60% من مجموع السعرات الحرارية. كم غرامًا من البروتين والكربوهيدرات والدهون يتطلب هذا النظام.

الطعام	السعرات
بروتين	4
كربوهيدرات	4
دهون	9

السعرات الحرارية في الغرام

انتبه!

انتبه إلى ضرورة كتابة 0 كمعامل للمجهول الناقص.
$4p+0c+9f=2160$

يتضمّن النظام الغذائي p غرامًا من البروتين، وَ c غرامًا من الكربوهيدرات وَ f غرامًا من الدهون.

$4p+4c+9f=3600$ مجموع السعرات الحرارية.

$p+c+f=750$ كمية الطعام الكلية.

$4p+0c+9f=2160$ سعرات البروتين والدهون تساوي $60\%(3600)=2160$

$$Df=\begin{vmatrix}4&4&3600\\1&1&750\\4&0&2160\end{vmatrix}، Dc=\begin{vmatrix}4&3600&9\\1&750&1\\4&2160&9\end{vmatrix}، Dp=\begin{vmatrix}3600&4&9\\750&1&1\\2160&0&9\end{vmatrix}، D=\begin{vmatrix}4&4&9\\1&1&1\\4&0&9\end{vmatrix}=-20$$

$$f=\frac{Df}{D}=\frac{-2400}{-20}=120 ، c=\frac{Dc}{D}\frac{-7200}{-20}=360 ، p=\frac{Dp}{D}=\frac{-5400}{-20}=270$$

يتضمّن النظام g 270 من البروتين وَ g 360 من الكربوهيدرات وَ g 120 من الدهون.



4. ماذا لو...؟ يتطلَّب النظام استهلاك 3200 سعرة حرارية وَ g 700 من الطعام يوميًّا. يجب أن تشكِّل السعرات الحرارية التي مصدرها الكربوهيدرات 70% من مجموع السعرات الحرارية. كم غرامًا من البروتين والكربوهيدرات والدهون يتطلَّب هذا النظام؟

فكِّرْ وناقِش

1. صِف مصفوفة لا محدد لها.

2. كيف تعرف ما ستكون عليه المحدِّدات الثلاثة عندما تطبِّق قاعدة كرامر على نظام خطّي من معادلتيْن بمجهولَين، إذا كانت إحدى المعادلتيْن ناتجة من ضرب الثانية في عدد؟

3. كن منظّمًا انسخ المخطط أدناه ثم أكمله. اكتب في كل إطار القاعدة المناسبة.



	مصفوفة 2×2	مصفوفة 3×3
المحدِّد		
قاعدة كرامر		

3–4 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** ما معنى أن يكون أحد عناصر مصفوفة المعاملات صفرًا؟

انظر المثال 1

جِد محدِّد المصفوفة.

2 $\begin{bmatrix}7&5\\9&2\end{bmatrix}$ **3** $\begin{bmatrix}1.5&0.25\\6&2.5\end{bmatrix}$ **4** $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{2}{3}\\\frac{3}{4}&-4\end{bmatrix}$ **5** $\begin{bmatrix}-3&40\\-5&66\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

انظر المثال 2

استعمل قاعدة كرامر لحل النظام الخطّي.

6 $\begin{cases}6x=2-y\\3x+1=2y\end{cases}$ **7** $\begin{cases}4x+y+6=0\\8x+2y=9\end{cases}$ **8** $\begin{cases}5x-2y=3\\2.5x-y=1.5\end{cases}$ **9** $\begin{cases}2y=2-x\\-3x+6y=-9\end{cases}$

انظر المثال 3

جِد محدِّد المصفوفة.

10 $P=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$

11 $S=\begin{bmatrix}0 & -5 & -1\\ 4 & 1 & 6\\ 2 & 0.5 & 3\end{bmatrix}$

12 $E=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

انظر المثال 4

13 **استهلاك** اشترت هتاو 2kg من الفستق وَ 1.5kg من اللوز وَ 3kg من البندق. ودفعت 28 420 دينارًا، بينما دفعت صديقتها دوين 39 390 دينارًا ثمن 4.5kg من الفستق وَ 2kg من البندق. ما ثمن الكيلوغرام من كل نوع، علمًا بأن ثمن الكيلوغرام من اللوز يساوي مجموع ثمني كيلوغرام من الفستق وكيلوغرام من البندق.

تمارين وحلُّ مسائل

تمارين حرّة	
لحل التمارين	أنظر المثال
17–14	1
21–18	2
24–22	3
25	4

جِد محدِّد المصفوفة.

14 $\begin{bmatrix}3 & -0.4\\ 5 & 0.3\end{bmatrix}$

15 $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix}-\frac{2}{5} & 8\\ -\frac{1}{2} & 10\end{bmatrix}$

17 $\begin{bmatrix}r & -1\\ -2r^2 & \pi r\end{bmatrix}$

استعمل قاعدة كرامر لحل النظام الخطّي.

18 $\begin{cases}0.5x+6y=2\\ 0.25x+3y=0.5\end{cases}$

19 $\begin{cases}x+2y=3.5\\ 3x-y=2.7\end{cases}$

20 $\begin{cases}2x+y=3\\ x+\frac{y}{2}=2\end{cases}$

21 $\begin{cases}3y-x=7\\ 2x+3y=-7\end{cases}$

جِد محدِّد المصفوفة.

22 $A=\begin{bmatrix}2.5 & 1.5 & 0\\ 3.2 & 1 & -4\\ 6.4 & -5 & 2.1\end{bmatrix}$

23 $L=\begin{bmatrix}-2.4 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0.5\\ 0 & 3.5 & 1\end{bmatrix}$

24 $W=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -5 & 0\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix}$

25 **رشاقة** تُدوّن آراس عدد ساعات التمارين الرياضية التي تقوم بها، وعدد السعرات الحرارية التي تحرقها كل يوم. كم سعرة تحرق آراس في كل ساعة تمارس فيها كل نوع من التمارين؟ استعمل قاعدة كرامر للحل.

سجل ساعات تمارين آراس

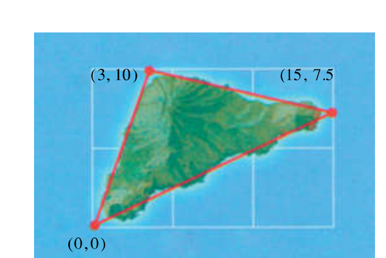
	ركوب الدراجة	كرة الطاولة	السباحة	السعرات المحروقة
الإثنين	1.5h	1h	0.75h	1620
الأربعاء	0.75h		1h	915
الجمعة	1h	1.5h		1230

26 **علوم** يُبيّن الجدول التالي الكتل الذرية لثلاث من المواد. اكتب نظام معادلات خطّية، واستعمل قاعدة كرامر لتحديد الكتلة الذرية لكل من الكاربون (C) والهيدروجين (H) والأوكسجين (O).

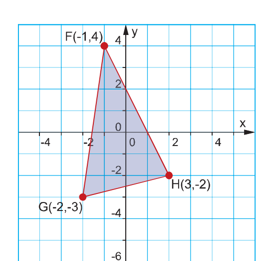
المادة	الصيغة	الكتلة الذرية
ميثان	CH_4	16
غليسيرول	$C_3H_8O_3$	92
ماء	H_2O	18

هندسة تساوي مساحة مثلث رؤوسه (x_1, y_1) وَ (x_2, y_2) وَ (x_3, y_3) القيمة المطلقة للمحدِّد $A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. استعمل هذه المعلومة لحل التمرينين 26 وَ 27.

27 جِد مساحة جزيرة الفصح.



28 جِد مساحة المثلث FGH.



29 **تفكير ناقد** ما قيمة c التي تجعل محدِّد مصفوفة معاملات النظام $\begin{cases} 2x+y=6 \\ cy=3-x \end{cases}$ يساوي صفرًا؟ أوضح كيف وجدت ذلك.

30 **إنترنت** طلب أحد مواقع الإنترنت تقويم أحد الموضوعات بإعطائه نقطة أو نقطتين أو 3 نقاط. كان عدد المقوِّمين 38 شخصًا، وعدد من أعطوا 3 نقاط ضعف عدد من أعطوا نقطة واحدة . ما عدد الأشخاص الذين أعطوا كل تقويم، علمًا بأن العدد الكلّي للنقاط كان 85 ؟

جِد محدِّد كل مصفوفة.

31 $A=\begin{bmatrix} x & x-1 \\ x+1 & x \end{bmatrix}$

32 $B=\begin{bmatrix} x-2 & x+2 \\ x+2 & x+6 \end{bmatrix}$

33 $C=\begin{bmatrix} 6x^2 & -6x+2x^2 \\ 3x & x-3 \end{bmatrix}$

34 **معادن ثمينة** تبلغ كتلة قطعة نقود صغيرة من الفضة $2.268\ g$ وكتلة قطعة نقود كبيرة $5\ g$. مع أوميد 425 قطعة من النوعين. قاس كتلتها فكانت 1483 g.

أ) كم قطعة من كل نوع مع أوميد؟

ب) ما ثمن القطع الفضيّة إذا كان ثمن القطعة الصغيرة 000 30 وثمن القطعة الكبيرة 000 72 دينار؟

35 زارت حديقة الحيوانات مجموعة من 6 راشدين وَ 3 أولاد، ودفعت 000 48 دينار، في حين أن مجموعة تضمَّنت اثنين من الراشدين وَ 10 أولاد دفعت 000 52 دينار. استعمل المجهول x لثمن بطاقة الولد، والمجهول y لثمن بطاقة الراشد.

أ) اكتب نظام معادلات، يترجم المسألة.

ب) اكتب مصفوفة العوامل، واحسب محدِّدها.

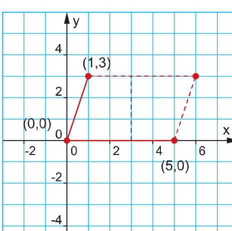
ج) كم حلاً للمسألة؟

د) استعمل قاعدة كرامر لإيجاد قيمة كل من المجهولَيْن.

هـ) ما ثمن بطاقة الدخول للراشدين؟ وثمن بطاقة الدخول للأولاد؟

36 **اكتب** كيف تتحقَّق من أن تناسبًا هو صحيح؟ وكيف تتحقَّق من أن محدد مصفوفة 2×2 هو صفر. قارن.

37 **خطوات متعدِّدة** تحدِّد النقطتان $(5, 0)$ وَ $(1, 3)$ متوازي أضلاع أحد رؤوسه نقطة الأصل في المستوى الإحداثي، كما يُبين ذلك الشكل المقابل.



أ جد مساحة متوازي الأضلاع.

ب ادخل النقطتيّن بالترتيب في $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ واحسب قيمة هذا المحدِّد. ما العلاقة بين قيمة هذا المحدِّد ومساحة متوازي الأضلاع؟

ج غيّر طول متوازي الأضلاع وعرضه، ثم احسب مساحته وقيمة المحدِّد. هل تبقى العلاقة التي وجدتها بين المحدِّد والمساحة قائمة؟

د بادل بين النقطتيّن في السؤال (ب) بحيث تصبح النقطة (x_1, y_1) النقطة $(1, 3)$. احسب المساحة والمحدِّد من جديد. ما تأثير هذه المبادلة في قيمة المحدِّد؟



38 أي من الأوصاف يصح على النظام الخطّي $\begin{cases} 3x = y - 1 \\ x + 2y = 16 \end{cases}$ ؟

أ غير محدَّد؛ عدد غير محدود من الحلول

ب مستحيل؛ كثير من الحلول

ج مستحيل؛ لا حلول

د محدَّد؛ حل وحيد

39 أي مصفوفة محدِّدها 1؟

أ $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

ج $\begin{bmatrix} -3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

د $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

40 **جواب مختصر** جد قيمة x علمًا بأن $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 25$.

تحدٍّ وتوسّع

41 افترض أن أحد أعمدة أو صفوف مصفوفة 3×3 يتألف من أصفار. ما تأثير ذلك في محدِّدها؟.

42 اكتب مصفوفة محدِّدها $x^2 + y^2$.

43 جد قيم a وَ b وَ c إذا كان $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{5}$ وَ $y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & a \\ b & c \end{vmatrix}}{5}$.

44 **مدنيات** جرى استفتاء سكان مدينة مكوَّنة من قسمين، جنوبي وشمالي، بشأن إنشاء نصب تذكاري في ساحة المدينة. يُلخِّص الجدول المقابل نتائج ذلك الاستفتاء بالنسب المئوية. كم مواطنًا من القسم الجنوبي أعطى رأيه، علمًا بأن عدد المستفتين كان 826 4 شخصًا؟

نتائج الاستفتاء		
القسم	مع النصب	ضدّه
الشمالي	47%	53%
الجنوبي	85%	15%
المجموع	49%	51%

مراجعة لولبية

45 **استهلاك** كان مع سافان 000 135 دينار عندما دخلت محل أحذية نسائية ووجدت حذاء خفِّض ثمنه بنسبة 25%. اكتب متباينة يحقِّقها السعر الأصلي للحذاء علمًا بأن سافان قد اشترته. (الصفوف السابقة)

حُل نظام المعادلات بالتعويض. (الصفوف السابقة)

46 $\begin{cases} x=\frac{1}{3}y \\ 6x-6y=16 \end{cases}$

47 $\begin{cases} x+y=-5 \\ 2x-y=-7 \end{cases}$

48 $\begin{cases} 2x=y \\ 4x+y=-2 \end{cases}$

استعمل مصفوفة لتحويل المضلَّع $DEFG$ حيث $D(1,\ 1)$ وَ $E(4,-2)$ وَ $F(-2,-3)$ وَ $G(-1,-1)$. (الدرس 3-3)

49 سحب 5 وحدات إلى اليمين، وَ 3 وحدات إلى أعلى.

50 انعكاس حول المحور الأول.

51 سحب وحدة إلى اليسار، ووحدتين إلى أسفل.

52 تناسب هندسي نسبته 3.



3-1 المصفوفات والمعطيات

استعمل الجدول لحل التمارين من 1 إلى 4.

مواصفات ميداليات الألعاب الأولمبية			
	ذهبية	فضية	برونزية
الكتلة	567 *gr*	567 *gr*	453.6 *gr*
% نحاس	7.5	7.5	90
عدد ساعات التصنيع	19.65	18.30	18.45

1 استعمل مصفوفة M لعرض معطيات الجدول.

2 ما رتبة المصفوفة M ؟

3 ما قيمة العنصر M_{32} ؟ ماذا تمثِّل هذه القيمة؟

4 ما عنوان العنصر 90؟

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 5 إلى 8.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\\ 5 & -1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}5 & 1 & -1\\ -1.5 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

5 $A+C$ **6** $2B$ **7** $C-D$ **8** $C-3A$

3-2 ضرب المصفوفات

استعمل رُتبَ المصفوفات $P_{5\times2}$ ، $Q_{2\times5}$ ، $R_{1\times5}$ ، $S_{5\times2}$ لحل التمارين من 9 إلى 12. اذكر إن كان ناتج الضرب مُعرّفًا، واكتب رتبته إذا كان كذلك.

9 PQ **10** QR **11** RS **12** SP

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 13 إلى 16.

$$E=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 5 & 3 & 0\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}0.5 & 0.75 & -1\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

13 EF **14** FH **15** HG **16** G^2

3-3 تحويل الأشكال الهندسية باستعمال المصفوفات

جِد إحداثيات رؤوس صورة الرباعي بالتحويل الهندسي، وارسم هذه الصورة.

W(0,0) ، X(1,4) ، Y(3,5) ، Z(4,2)

17 سحب وحدة واحدة إلى اليسار، ووحدتين إلى أسفل.

18 تصغير بنسبة $\frac{2}{3}$.

19 تحويل مصفوفته $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$. صِف الصورة.

20 تحويل مصفوفته $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$. صِف الصورة.

21 تحويل مصفوفته $\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$. صِف الصورة.

3-4 المحدِّدات

جِد محدِّد المصفوفة.

22 $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ **23** $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 3 & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$ **24** $\begin{bmatrix}0.5 & 1.2\\ -0.2 & 2.0\end{bmatrix}$ **25** $\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 1\\ 4 & 4 & 1\end{bmatrix}$

حُلّ باستعمال قاعدة كرامر.

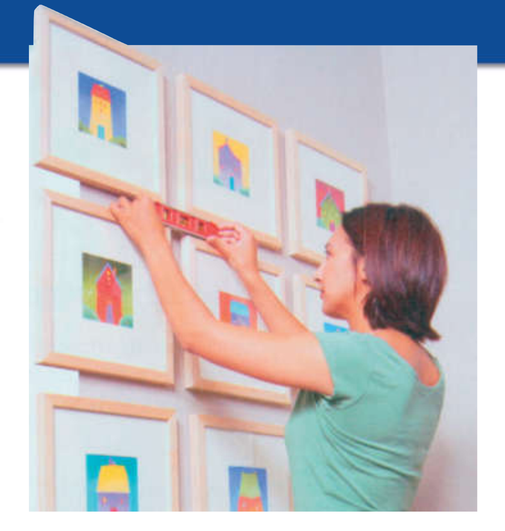
26 $\begin{cases}2x+3y=5\\ y=1-x\end{cases}$

27 $\begin{cases}x-y=2\\ y-x+4=0\end{cases}$

28 $\begin{cases}2x-y+z=3\\ 3x+2y=2z+1\\ z=x+2\end{cases}$

5-3 مقلوب المصفوفة

Matrix Inverse



الأهداف

يُقرِّر إن كان لمصفوفة مقلوب أم لا.

يحل نظام معادلات خطّية باستعمال مقلوب المصفوفة.

المفردات
Vocabulary

مقلوب المصفوفة
Matrix inverse

المعادلة المصفوفية
Matrix equation

مصفوفة المجاهيل
Variable matrix

مصفوفة الثوابت
Constant matrix

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل العاملون في تركيب الشيفرات وفكّها المصفوفات، للحفاظ على سرية الرسائل. (المثال 4)

تستطيع تشفير رسالة باستعمال المصفوفات. يستعمل من تصل إليه الرسالة عملية معاكسة، لفك الشيفرة وقراءة الرسالة.

لكي يكون لمصفوفة مقلوب، يجب أن تكون مربَّعة. غير أن هذا الشرط غير كافٍ، لأن هناك مصفوفات مربَّعة لا مقلوب لها. إذا كان ناتج ضرب المصفوفة A في المصفوفة B يساوي مصفوفة الوحدة I ، فإن $AB=BA=I$. في هذه الحالة، تُسمّى المصفوفة B **مقلوب المصفوفة** A **Matrix Inverse** ، ويُشار إليها بالرمز A^{-1} .

مثال 1 تحديد إن كانت مصفوفة مقلوب مصفوفة أخرى.

حدِّد إن كانت المصفوفة B مقلوب المصفوفة A.

أ $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ؛ $B=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

بما أن ناتج الضرب هو مصفوفة الوحدة، فإن المصفوفة B هي مقلوب المصفوفة A .

ب $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$ ؛ $B=\begin{bmatrix} -10 & 6 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -10 & 6 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بالاستناد إلى ما سبق، فإن المصفوفة B ليست مقلوب المصفوفة A .

تذكَّر

مصفوفة الوحدة من الرتبة n هي المصفوفة المربَّعة من الرتبة n التي تساوي جميع عناصرها 0 باستثناء عناصر القطر الرئيس التي تساوي جميعها 1. فمصفوفة الوحدة من الرتبة 3 هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



1. **حدِّد إن كانت المصفوفة B مقلوب المصفوفة A .**

$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0.4 \\ 1.2 & 1 & -1.4 \\ 0.4 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$



مقلوب مصفوفة مربّعة من الرتبة 2

إذا كان محدِّد المصفوفة $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ مختلفًا عن الصفر، فإن لهذه المصفوفة مقلوبًا هو $M^{-1}=\frac{1}{|M|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

لا مقلوب لمصفوفة محدِّدها يساوي الصفر.

مثـــال 2 إيجاد مقلوب مصفوفة مرَّبعة من الرتبة الثانية

جِد مقلوب المصفوفة إن كان لها مقلوب.

أ $M=\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

ابدأ بحساب محدِّد المصفوفة.

$$|M|=\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=(-2)(-4)-2\times3=2\neq0$$

بما أن محدِّد المصفوفة مختلف عن الصفر، فإن لها مقلوبًا هو:

$$M^{-1}=\frac{1}{|M|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

ب $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$

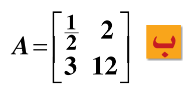
ابدأ بحساب محدِّد المصفوفة.

$$|A|=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\times12-2\times3=0$$

بما أن محدِّد المصفوفة يساوي الصفر، فليس للمصفوفة مقلوب.

إضـاءة

للحصول على المصفوفة $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ من المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بادل بين العنصريْن a و d واستبدل بكل من العنصرين الآخرين معكوسه.

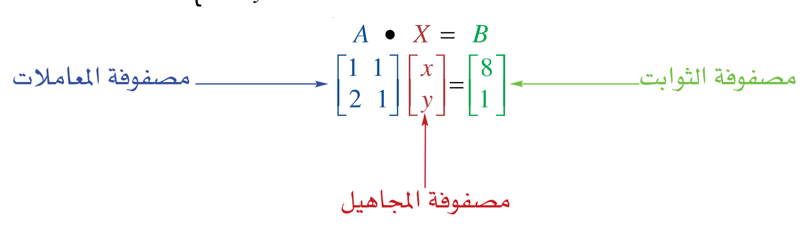


2. جِد مقلوب المصفوفة $C=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

تستطيع استعمال المصفوفات لحل نظام معادلات خطّية. باستعمال المصفوفات تحوِّل حل نظام المعادلات إلى عملية شبيهة بحل معادلة خطّية مثل $5x=20$، عن طريق ضرب كل من طرفي المعادلة في مقلوب العامل 5، أي $\frac{1}{5}$.

للقيام بذلك، تُحوّل نظام المعادلات إلى **معادلة مصفوفية** $AX=B$ **Matrix equation**، حيث يرمز A إلى مصفوفة معاملات النظام، بينما يرمز X إلى **مصفوفة المجاهيل Variable matrix**. كما يرمز B إلى **مصفوفة الثوابت Constant matrix**.

المعادلة المصفوفية التي تُمثِّل نظام المعادلتين الخطّيتين $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ هي:



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

لِحل المعادلة المصفوفية $AX=B$، اضرب كلاً من طرفي المعادلة بمقلوب المصفوفة A (بافتراض وجوده):

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B \quad \text{ناتج ضرب المصفوفة } A \text{ في مقلوبها هو مصفوفة الوحدة } I$$

$$X = A^{-1}B$$

مثـــال 3 حل نظام معادلات خطّية باستعمال مقلوب المصفوفة

اكتب المعادلة المصفوفية التي تُمثِّل النظام الخطّي $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ **، ثم حُل.**

الخطوة 1 اكتب المعادلة المصفوفية التي تُمثِّل نظام المعادلتين.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

الخطوة 2 جِد محدِّد مصفوفة المعاملات.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1-1\times2=-1\neq0$$

الخطوة 3 جِد مقلوب مصفوفة المعاملات.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

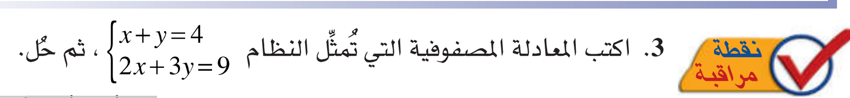
الخطوة 4 حُل.

$$\underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

الحل إذن: $x=-7$ وَ $y=15$.

انتبـه!

بما أن ضرب المصفوفات ليس تبديليًّا، احرص أن تضرب في المقلوب بالترتيب نفسه عند طرفي المساواة.
يجب أن يكون A^{-1} الأول من اليسار في كل طرف.



نقطة مراقبة 3. اكتب المعادلة المصفوفية التي تُمثِّل النظام $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$ ، ثم حُل.

تُستعمل المصفوفات التي لها مقلوب في تشفير الرسائل. افترض أنك تريد تشفير الرسالة التالية: «تصل البضاعة صباح الخميس». المرحلة الأولى في عملية التشفير هي تحويل هذه الرسالة إلى أعداد متتالية، باستعمال جدول تشفير يستبدل بكل حرف عددًا (يستعمل المرسل والمتلقي جدول التشفير نفسه). يُمكنك استعمال الجدول المقابل مثلاً حيث يرمز ـــ إلى المسافة بين كلمتين. ابدأ بكتابة الرسالة حرفًا حرفًا مع استعمال ـــ للفصل بين الكلمات.

21	ق	11	ز	1	أ
22	ك	12	س	2	ب
23	ل	13	ش	3	ت
24	م	14	ص	4	ث
25	ن	15	ض	5	ج
26	هـ	16	ط	6	ح
27	و	17	ظ	7	خ
28	ي	18	ع	8	د
0	ـــ	19	غ	9	ذ
		20	ف	10	ر

ت ص ل ـــ ا ل ب ض ا ع ة ـــ ص ب ا ح ـــ ا ل خ م ي س

12 28 24 7 23 1 0 6 1 2 14 0 3 18 1 15 2 23 1 0 23 14 3

اكتب هذه المتتالية في مصفوفة من صفّين من اليمين إلى اليسار. بما أن عدد هذه الأعداد فردي، فعليك أن تضيف العدد 0 في نهاية المتتالية. بعد الانتهاء من هذا الأمر تحصل على المصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 18 & 1 & 15 & 2 & 23 & 1 & 0 & 23 & 14 & 3 \\ 0 & 12 & 28 & 24 & 7 & 23 & 1 & 0 & 6 & 1 & 2 & 14 \end{bmatrix}$$

ليس من الصعوبة بمكان فك شيفرة هذه الرسالة. لذا يستعمل المرسل مصفوفة مربَّعة لها مقلوب لتعمية متتالية الأعداد قبل إرسالها. ويستعمل المتلقّي مقلوب هذه المصفوفة لإزالة التعمية عن متتالية الأعداد التي يتلقّاها. استعمل مصفوفة التعمية $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ ، واضربها في المصفوفة A، تحصل على:

GRADE11-CHAPTER 3 -13-final 5/13/13 3:08 PM Page 43

$$B = MA = \begin{bmatrix} 0 & 33 & 110 & 51 & 59 & 52 & 71 & 3 & 12 & 71 & 46 & 37 \\ 0 & 81 & 266 & 127 & 140 & 129 & 166 & 7 & 30 & 166 & 108 & 91 \end{bmatrix}$$

يُرسل المرسَل متتالية الأعداد التالية:

0 81 266 127 140 129 166 7 30 166 108 91 0 33 110 51 59 52 71 3 12 71 46 37

على المتلقي الآن أن يكتب هذه المتتالية في مصفوفة في صفين من اليمين إلى اليسار فيحصل على المصفوفة.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 33 & 110 & 51 & 59 & 52 & 71 & 3 & 12 & 71 & 46 & 37 \\ 0 & 81 & 266 & 127 & 140 & 129 & 166 & 7 & 30 & 166 & 108 & 91 \end{bmatrix}$$

ثم يضرب مقلوب M في C . مقلوب M هو $M^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ ، وناتج الضرب $M^{-1}C$ هو

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 18 & 1 & 15 & 2 & 23 & 1 & 0 & 23 & 14 & 3 \\ 0 & 12 & 28 & 24 & 7 & 23 & 1 & 0 & 6 & 1 & 2 & 14 \end{bmatrix}$$

على المتلقي الآن أن يكتب عناصر المصفوفة التي حصل عليها في متتالية بدءًا من يمين الصف الأول. سوف يحصل على:

0 12 28 24 7 23 1 0 6 1 2 14 0 3 18 1 15 2 23 1 0 23 14 3

أخيرًا يكتب تحت كل عدد الحرف الذي يقابله في جدول التشفير.

0 12 28 24 7 23 1 0 6 1 2 14 0 3 18 1 15 2 23 1 0 23 14 3

ت ص ل ـــ ا ل ب ض ا ع ة ـــ ص ب ا ح ـــ ا ل خ م ي س ـــ

ويقرأ الرسالة: «تصل البضاعة صباح الخميس».

مثـــال 4 تطبيق على التشفير

تلقّى راستي من صديقه لاوين الرسالة المشفّرة والمعمّاة التالية.

84 7 48 55 128 70 6 41 46 107 . يستعمل لاوين وراستي مصفوفة التعمية $M = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ **. ما رسالة لاوين؟**

الخطوة 1 جِد مقلوب المصفوفة M.

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -1 \text{ ؛ } M^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2 اكتب الرسالة التي تلقّاها راستي، من اليمين إلى اليسار على صورة مصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 70 & 6 & 41 & 46 & 107 \\ 84 & 7 & 48 & 55 & 128 \end{bmatrix}$$

الخطوة 3 احسب $M^{-1}A$.

$$M^{-1}A = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 & 6 & 41 & 46 & 107 \\ 84 & 7 & 48 & 55 & 128 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 0 & 1 & 8 & 19 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الخطوة 4 اكتب المصفوفة على صورة متتالية أعداد.

0، 1، 6، 1، 2، 14، 0، 1، 8، 19

الخطوة 5 فُكَّ تشفير الرسالة.

0	1	6	1	2	14	0	1	8	19
ـــ	ا	ح	ا	ب	ص	ـــ	ا	د	غ

رسالة لاوين هي: «غدًا صباحًا».



4. استعمل مصفوفة التعمية $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ لفك الرسالة التالية:

20 86 19 56 72 10 46 10 29 43.

فكّر وناقش

1. ماذا تستنتج عن المصفوفة A، إذا عرفت أن لها مقلوبًا؟

2. ما مقلوب مصفوفة الوحدة؟

3. **كن منظّمًا** انسخ الجدول وأكمله. قارن بين مقلوب المصفوفة ومقلوب عدد حقيقي.



	الأعداد الحقيقية	المصفوفات
الكتابة مع مثال		
كيف ترمز إلى مقلوب المصفوفة أو مقلوب العدد		
خاصّيّة التبديل		

5-3 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** كيف تكتب نظامًا من معادلتَيْن خطّيتَيْن بمجهولين، على الصورة المصفوفية؟

انظر المثال 1

اذكر إن كانت المصفوفة الأولى مقلوب المصفوفة الثانية.

2 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 3 & 12.5 & 3 \\ -1.6 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -10 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 1 \\ 1.2 & 0 & 0.8 \\ -1.6 & 0.2 & -1 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

انظر المثال 2

جِد مقلوب المصفوفة إن كان لها مقلوب.

5 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{3}{2} & 9 \end{bmatrix}$

8 $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

9 $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$

انظر المثال 3

اكتب نظام المعادلات على الصورة المصفوفية.

10 $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 5x + 9y = 1 \\ 2 - 4x - 7y = 4 \end{cases}$

12 $\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

انظر المثال 4

13 **تشفير** تلقّى سيروان من صديقه آرى رسالة يُخبره عن المدينة الموجود فيها. هذه الرسالة هي: 116 51 122 4 99 201 89 211 7 173 . استعمل سيروان مصفوفة التشفير $M = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$. في أي مدينة يُوجد آرى؟

تمارين وحلُّ مسائل

تمارين حرّة	
لحل التمارين	انظر المثال
16–14	1
21–17	2
24–22	3
25	4

اذكر إن كانت المصفوفة الأولى مقلوب المصفوفة الثانية.

14 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

15 $\begin{bmatrix} -\frac{16}{15} & -\frac{4}{15} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{8}{15} \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -2 \end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.2 & -0.2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

جِد مقلوب المصفوفة إن كان لها مقلوب.

17 $\begin{bmatrix} -0.25 & -0.5 \\ -1.5 & -2 \end{bmatrix}$

18 $\begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

19 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

20 $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

21 $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$

اكتب النظام على الصورة المصفوفية.

22 $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2y - x = 6 \end{cases}$

23 $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$

24 $\begin{cases} 4x + 7y = 10 \\ 3x + 5y = 9 \end{cases}$

25 **تشفير** تلقّى آرى رسالة من صديقه آلان يُحدِّد فيها موعد التقائهما. الرسالة هي: 10 230 120 10 150 57 9 13 299 156 13 194 75 12 . استعمل آلان مصفوفة التعمية $M = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ ، واذكر متى يلتقي الصديقان.

26 **توضيب** قارنت هتاو بين 3 عروض للفاكهة. اكتب معادلة مصفوفية، ثم حلّها لتجد ثمن الكيلوغرام من الإجّاص والدرّاق والخوخ.



27 **خطوات متعدِّدة** نظّم نادي بابل نزهة بحرية استعمل فيها 7 قوارب من نوعيَن. كبير يتسع لِـ 6 أشخاص، وصغير يتسع لشخصين. كان عدد المتنزّهين 34 شخصًا. يُعبِّر النظام الخطّي $\begin{cases} 6x + 2y = 34 \\ x + y = 7 \end{cases}$ عن هذه المسألة، حيث x عدد القوارب الكبيرة، وy إلى عدد القوارب الصغيرة.

أ اكتب مصفوفة المعاملات.

ب اكتب النظام السابق على الصورة المصفوفية.

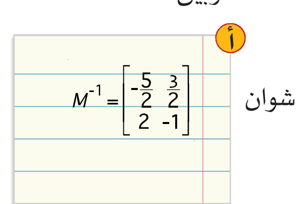
ج جِد مقلوب مصفوفة المعاملات.

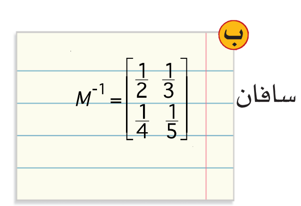
د حُلّ المعادلة المصفوفية لإيجاد عدد القوارب من كل نوع.

28 **تفكير ناقد** ما العلاقة التي تربط بين مصفوفة ومقلوبها ومصفوفة الوحدة؟

29 شفّر هكار رسالة يريد إرسالها إلى صديق. كتب الرسالة المشفَّرة في مصفوفة C، واستعمل مصفوفة تعمية M، فحصل على رسالة مشفَّرة ومعمّاة D . ما القيود التي ينبغي أن تراعيها رُتب هذه المصفوفات؟

30 **خطأ في التحليل** حسب كل من شوان وسافان مقلوب المصفوفة $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. أي منهما أخطأ؟ وبيّن الخطأ.





31 **تسلية** قال لك والدك أن في جيبه 5000 دينار مكوَّنة من قطع من فئتي 50 دينارًا وَ 100 دينار، وأنه سيُعطيك إياها، إذا عرفت كم قطعة نقود معه من كل فئة. رغبة منه في مساعدتك، ذكر لك أن عدد القطع كلها 73 قطعة. استعمل مقلوب مصفوفة لتربح 5000 دينار.

32 **ماء** وضعت بلدية المدينة صنبور ماء في إحدى الحدائق العامة ليستعمله المتنزهون. يعمل هذا الصنبور 24 ساعة في اليوم، ويُمكن استعماله بثلاث سرعات: بطيئة ومتوسطة وسريعة. يُبيّن الجدول أدناه معطيات عن استعمال هذا الصنبور خلال ثلاثة أيام. جِد سرعات صب الصنبور الثلاث بالكيلولتر.

	بطيئة (عدد الساعات)	متوسطة (عدد الساعات)	سريعة (عدد الساعات)	الكمية (كيلولتر)
الأحد	15	7	2	199
الإثنين	16	4	4	208
الثلاثاء	12	8	4	236

33 **ماذا لو...** افترض أنك ضاعفت عناصر المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

أ كيف تتغيّر عناصر مقلوب هذه المصفوفة؟

ب اكتب مقولة تصف كيف تتغيّر عناصر مقلوب مصفوفة مُعيّنة، إذا ضربت المصفوفة في عدد k.

34 للدخول إلى حديقة الحيوانات، دفع هريم 000 24 دينار ثمن 7 بطاقات للصغار وبطاقتين للكبار. دفع مازن 000 46 دينار ثمن 4 بطاقات للكبار وَ 13 بطاقة للصغار. ارمز بالمجهول x إلى ثمن بطاقة الكبار، وبالمجهول y إلى ثمن بطاقة الصغار.

أ عبّر عن المسألة بواسطة نظام من المعادلات.

ب هل محدِّد مصفوفة المعاملات يساوي الصفر؟ ما عدد الحلول؟

ج استعمل الصورة المصفوفية ومقلوب المصفوفة لإيجاد x وَ y .

د ما ثمن بطاقة الكبار؟ وما ثمن بطاقة الصغار؟

35 **تفكير ناقد** أ أثبت أن مقلوب المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

ب ما مقلوب المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ إذا كان محدِّدها يساوي 1؟

ج ما السبب الذي يجعل عناصر مقلوب المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ أعدادًا صحيحة عندما تكون عناصرها اعدادًا صحيحة، ومحدِّدها يساوي 1؟

36 جِد قيمة x بحيث لا يكون للمصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & x \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ مقلوب.

37 ما مقلوب مصفوفة لها عنصر واحد $[a]$؟

38 **كيمياء** مزجت سانا كمية من محلول يحتوي على 15% من حمض الكبريت، وآخر يحتوي على 40% من هذا الحمض، وحصلت على 50L،نسبة حمض الكبريت فيها 35%.
كم لترًا من كل محلول مزجت؟

39 **اكتب** جِد ناتج الضرب $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$. ما العلاقة بين المصفوفتين؟



40 أي مما يلي هو الصورة المصفوفية للنظام $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ x=y+1 \end{cases}$؟

أ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

ج $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

د $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

41 أي مما يلي يصح على المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$ ؟

أ للمصفوفة مقلوب، لأن محدِّدها مختلف عن الصفر.

ب للمصفوفة مقلوب، لأن محدِّدها يساوي الصفر.

ج لا مقلوب للمصفوفة، لأن محدِّدها يساوي الصفر.

د لا مقلوب للمصفوفة، لأن محدِّدها لا يساوي الصفر.

42 ما العنصر b_{11} في B إذا كانت B مقلوب المصفوفة $A=\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ؟

أ 1 ب $-\frac{1}{9}$ ج 3 د $-\frac{1}{27}$

43 أي مما يلي يصح على المصفوفة $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، إذا كان محدِّدها لا يساوي الصفر، وكان $a>0$ وَ $b<0$ وَ $c<0$ وَ $d>0$ ؟

أ جميع عناصر M^{-1} غير سالبة.

ب للمصفوفة M^{-1} عنصر سالب واحد فقط.

ج للمصفوفة M^{-1} عنصران سالبان فقط.

د للمصفوفة M^{-1} ثلاثة عناصر سالبة فقط.

44 **جواب مختصر** يقدِّم معرض لوحات فنية صورة كلفتها 25 000 دينار عن كل تبرع قيمته 500 000 دينار، وصورة كلفتها 50 000 دينار عن كل تبرع قيمته مليون دينار. جمع المعرض تبرعات قيمتها 24 مليون دينار وقدم 35 صورة. ما عدد التبرُّعات من كل نوع؟

تحدٍّ وتوسّع

45 **هوايات** يتم تثقيل العلامات التي ينالها الطالب في امتحان نهاية السنة الدراسية بعوامل مختلفة وفقًا للمادة. يُبيّن الجدول أدناه علامات 4 طلاب في 4 مواد، ومجموع كل منهم. عليك أن تجد ثقل كل مادة.

علامات امتحان نهاية العام الدراسي					
الطالب	الرياضيات	العلوم	اللغة العربية	اللغة الأجنبية	المجموع
هيوا	65	72	55	50	1038
ريبه	40	45	66	60	890
روند	55	65	60	65	1030
دانا	85	75	65	75	1275

46 جد قيم عناصر المصفوفة $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ لكي تكون مساوية لمقلوبها.

47 تلقى زيكال من أبيه الرسالة التالية 56 ، 38 ، 8 ، 32 ، 13 ، 8 ، 27 ، 5 ، 8 واستعمل لفكّ تعميتها مصفوفة 3 × 3 كل عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيس أصفار، في حين أن العناصر الأخرى كلها تساوي 1.

أ ما الرسالة التي تلقّاها؟

ب ما هي مصفوفة التعمية؟

ج رد زيكال على رسالة أبيه برسالة مشفّرة مضمونها «سوف أحاول». ما الرسالة المشفّرة التي تلقّاها الوالد؟

مراجعة لولبية

حُلّ (الصفوف السابقة)

48 $\frac{2x}{10} = \frac{12}{30}$

49 $\frac{0.5}{0.2x} = \frac{100}{7}$

50 $125\%x = 117$

استعمل الحذف لحل نظام المعادلات. (الدرس 2–5)

51 $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y - 6z = 5 \\ -4z - 5y + 0.25z = -9 \end{cases}$

52 $\begin{cases} y - x - 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = -3 \\ 0.25x + 8z + 3 = 2y \end{cases}$

جِد محدّد المصفوفة. (الدرس 3–4)

53 $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$

54 $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 3 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$

55 $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

56 $\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & 8 \\ \frac{3}{2} & -81 \end{bmatrix}$



حل نظام خطّي باستعمال برنامج Excel

يتعلق بالدرس 5-3

نشاط

حُلّ النظام $\begin{cases} 7x+2y=-8 \\ -3x+y=9 \end{cases}$.

تستطيع استعمال برنامج Excel لحساب محدِّد مصفوفة ومقلوب مصفوفة، بغية حل النظام الخطِّي $AX=B$ بكتابة $X=A^{-1}B$ وحساب المصفوفة $A^{-1}B$. لإيجاد المصفوفة A^{-1} ، ابدأ بحساب محدِّد المصفوفة A. تذكَّر أن محدِّد المصفوفة $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $|A|=ad-bc$.

C5		f_x =B2*C3-B3*C2	
	A	B	C	D
1				
2	Matrix A	7	2	
3		-3	1	
4				
5	Determinant A		13	

أدخل معاملات النظام الأربعة: a في $B2$ ، b في $C2$ ، c في $B3$ d في $C3$.
لحساب محدِّد المصفوفة، أدخل $=B2*C3-B3*C2$ في الخلية $C5$.

من ناحية أخرى، تذكَّر أن مقلوب المصفوفة $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

هو المصفوفة $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ أو $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|} \\ -\frac{c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix}$. أدخل $=C3/C5$ في الخلية $C7$ لحساب $\frac{d}{|A|}$
وَ $=-C2/C5$ في الخلية $D7$ لحساب $-\frac{b}{|A|}$ ، وَ $=-B3/C5$ في الخلية $C8$ لحساب $-\frac{c}{|A|}$
وَ $=B2/C5$ في الخلية $D8$ لحساب $\frac{a}{|A|}$.

		f_x =C7*E7+D7*E8			
	A	B	C	D	E
6					Matrix B
7	Inverse A or A^{-1}		0.076923	-0.15385	-8
8			0.230769	0.538462	9
9					
10		Solution A^{-1}B		-2	
11					

يتكوَّن الحل من مصفوفة لها عمود واحد هي $A^{-1}B$. أدخل العددين الموجودين في الطرف الأيمن من كل معادلة أي (8− وَ 7) في الخليتين $E7$ وَ $E8$ على التوالي. لحساب المصفوفة $A^{-1}B$ ، أدخل
$=C7*E7+D7*E8$ في الخلية $D10$
وَ $=C8*E7+D8*E8$ في الخلية $D11$.

D11		f_x =C8*E7+D8*E8			
	A	B	C	D	E
6					Matrix B
7	Inverse A or A^{-1}		0.076923	-0.15385	-8
8			0.230769	0.538462	9
9					
10		Solution A^{-1}B		-2	
11				3	

الحل هو $x=-2$ وَ $y=3$. لقد أنشأت آلة لحل أنظمة المعادلات الخطِّية 2×2. غيِّر أحد معاملات النظام الخطِّي السابق، أو أحد أعداد الطرف الأيمن، ولاحظ كيف تتغيّر النتائج.

حاول

1 استبدل بعددَي الطرف الأيمن في المعادلتَيْن العددين 5− وَ 9، وحُلّ النظام الجديد باستعمال الآلة الي أنشأتها.

2 كيف تتحقَّق من صحة الحل باستعمال برنامج Excel ؟

3 **تفكير ناقد** استعمل آلة الحل لحل نظام تعرف مسبقًا أنه مستحيل، وآخر تعرف مسبقًا أنه غير محدَّد. كيف تستعمل برنامج Excel لتعرف إن كان النظام مستحيلاً أو غير محدَّد؟

6-3 الأعْدادُ المُركَّبة

Complexe Numbers

لم أتخيل أني سأدفع مثل هذه الأقساط

اذن عليك أن تتعلم الأعداد التخيلية

الأهداف

يُعرّف الأعداد التخيُّلية والمركَّبة ويستعملها.

يحل معادلات تربيعية لا جذور لها في مجموعة الأعداد الحقيقيّة.

المفردات

Vocabulary

الوحدة التخيُّلية
Imaginary unit

العدد التخيُّلي
Imaginary number

العدد المركَّب
Complex number

الجزء الحقيقي
Real part

الجزء التخيُّلي
Imaginary part

مرافق العدد المركَّب
Complex conjugate

لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

يُمكن استعمال الأعداد المركَّبة لحل معادلة تربيعية لا جذور لها في مجموعة الأعداد الحقيقية. (مثال 4)

يُمكنك أن تتحقق بيانيًّا من أن الدالّة $f(x)=x^2+1$ لا أصفار لها في مجموعة الأعداد الحقيقية. إذا حاولت حل المعادلة التربيعية المرافقة لها، $x^2+1=0$، تحصل على $x=\pm\sqrt{-1}$ ما يؤكِّد عدم وجود جذور حقيقية لها.

لكن سيكون بمقدورك حل مثل هذه المعادلة لو عرّفت الجذر التربيعي للأعداد السالبة. وقد أدخل علماء الرياضيات هذه الجذور التربيعية وسمّوها **الأعداد التخيُّلية Imaginary numbers** . أول هذه الأعداد هو **الوحدة التخيُّلية Imaginary Unit**، ورمزها i. $i=\sqrt{-1}$.

يُمكنك كتابة الجذر التربيعي لأي عدد سالب باستعمال الوحدة التخيُّلية.

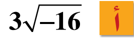


الأعداد التخيُّلية

بالكلمات	بالأعداد	في الجبر
العدد التخيُّلي Imaginary Number هو جذر تربيعيّ لعدد سالب. يُمكن كتابة أي عدد تخيُّلي على الصورة bi حيث b عدد حقيقي وَ i الوحدة التخيُّلية. تربيع أي عدد تخيُّلي هو العدد السالب الذي استُعمل لتعريفه.	$\sqrt{-1}=i$ $\sqrt{-2}=\sqrt{-1}\sqrt{2}=i\sqrt{2}$ $\sqrt{-4}=\sqrt{-1}\sqrt{4}=2i$ $i^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$	إذا كان b عددًا حقيقيًّا موجبًا فإن: $\sqrt{-b}=i\sqrt{b}$ $\sqrt{-b^2}=ib$ $\left(\sqrt{-b}\right)^2=-b$

مثـــال 1 تبسيط الجذور التربيعية للأعداد السالبة

اكتب كل مقدار بدلالة i .

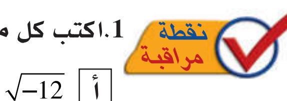


أ $3\sqrt{-16}$

$3\sqrt{(16)(-1)}$	حلِّل -16.
$3\sqrt{16}\sqrt{-1}$	خاصية ضرب الجذور.
$3\times4\sqrt{-1}$	بسِّط.
$12\sqrt{-1}$	اضرب.
$12i$	اكتب بدلالة i

ب $-\sqrt{-75}$

$-\sqrt{(75)(-1)}$	حلِّل -75.
$-\sqrt{75}\sqrt{-1}$	خاصية ضرب الجذور.
$-\sqrt{25}\sqrt{3}\sqrt{-1}$	خاصية ضرب الجذور.
$-5\sqrt{3}\sqrt{-1}$	بسِّط.
$-5\sqrt{3}i=-5i\sqrt{3}$	اكتب بدلالة i



1. اكتب كل مقدار بدلالة i .

أ $\sqrt{-12}$ ب $2\sqrt{-36}$ ج $-\frac{1}{3}\sqrt{-63}$

مثـــال 2 حل معادلة تربيعية جذراها تخيّليّان

حُلّ المعادلة.

أ $x^2 = -81$

$x = \pm\sqrt{-81}$ خذ الجذر التربيعي.

$x = \pm 9i$ اكتب بدلالة i.

تحقَّق

$x^2 =$	-81
$(9i)^2$	-81
$81i^2$	-81
$81(-1)$	-81 ✓

$x^2 =$	-81
$(-9i)^2$	-81
$81i^2$	-81
$81(-1)$	-81 ✓

ب $3x^2 + 75 = 0$

$3x^2 = -75$ أضف -75 إلى كل طرف.

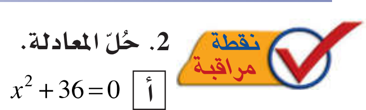
$x^2 = -25$ اقسم كل طرف على 3.

$x = \pm\sqrt{-25}$ خذ الجذر التربيعي.

$x = \pm 5i$ اكتب بدلالة i.

تحقَّق

$3x^2 + 75 =$	0
$3(\pm 5i)^2 + 75$	0
$3(25)i^2 + 75$	0
$75(-1) + 75$	0 ✓

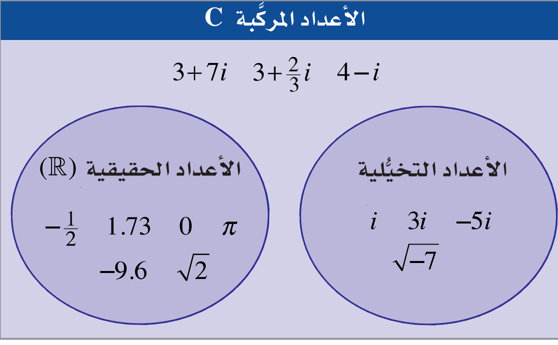


2. حُلّ المعادلة.

أ $x^2 + 36 = 0$ ب $x^2 + 48 = 0$ ج $9x^2 + 25 = 0$

العدد المركَّب Complex Number

عدد يُمكنك كتابته على صورة $a + ib$، حيث a وَ b عددان حقيقيان و $i = \sqrt{-1}$. تُشكِّل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ جزءًا من مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ أي إن $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.



لكل عدد مركَّب **جزء حقيقي Real Part** هو a وَ **جزء تخيُّلي Imaginary Part** هو b.



الأعداد الحقيقية أعداد مركَّبة جزؤها التخيُّلي يساوي 0. الأعداد التخيُّلية أعداد مركَّبة جزؤها الحقيقي يساوي 0 وجزؤها التخيُّلي مختلف عن 0.

يتساوى عددان مركَّبان إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وجزءاهما التخيُّليّان.

مثـــال 3 تَساوي عددَين مركَّبَين

جِد قيمة كل من x وَ y بحيث تصحّ المساواة $3x - 5i = 6 - (10y)i$.

الجزءان الحقيقيان

$$3x - 5i = 6 - (10y)i$$

الجزءان التخيُّليّان

$3x = 6$ يتساوى الجزءان الحقيقيان

$x = 2$

$-(10y) = -5$ يتساوى الجزءان التخيليان

$y = \frac{1}{2}$



3. جِد قيمة كل من x وَ y بحيث تصح المساواة.

أ $2x-6i=-8+(20y)i$ ب $-8+(6y)i=5x-i\sqrt{6}$



مثـــال 4 إيجاد الأصفار المركَّبة للدوال التربيعية

جِد صفرَي الدالّة التربيعيَّة.

أ $f(x)=x^2-2x+5$

$x^2-2x+5=0$	اكتب المعادلة.
$x^2-2x+1=-5+1$	زد لتظهر
$(x-1)^2=-4$	مربعًا كاملاً.
$x-1=\pm\sqrt{-4}$	خذ الجذر.
$x=1\pm 2i$	بسِّط.

ب $g(x)=x^2+10x+35$

$x^2+10x+35=0$	اكتب المعادلة.
$x^2+10x+25=-35+25$	زد لتظهر
$(x+5)^2=-10$	مربعًا كاملاً.
$x+5=\pm\sqrt{-10}$	خذ الجذر.
$x=-5\pm i\sqrt{10}$	بسِّط.





4. جِد صفرَي الدالّة التربيعية.

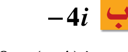
أ $f(x)=x^2+4x+13$ ب $g(x)=x^2-8x+18$

إضـــاءة

إذا كانت معاملات المعادلة التربيعية أعدادًا حقيقية، وإذا عرفت أحد جذريها وكان غير حقيقي، فالجذر الثاني يكون مرافق هذا الجذر.

هناك علاقة تربط بين صفرَي الدالَّة $-5+i\sqrt{10}$ وَ $-5-i\sqrt{10}$ في المثال 4 – ب يُشكِّل هذان العددان المركَّبان **عددَيْن مترافقَيْن**. جزءاهما الحقيقيان متساويان في حين أن جزءيهما التخيُّليَّيْن متعاكسان. **العدد المرافق Conjugate Number** للعدد المركَّب $a+bi$ هو العدد المركَّب $a-bi$.

إذا كان جذرا معادلة تربيعية، معاملاتها أعداد حقيقية، غير حقيقيين، فإنهما عددان مركَّبان مترافقان.



مثـــال 5 إيجاد العدد المرافق لعدد مركَّب

جِد العدد المرافق للعدد المركَّب.

أ $2i-15$

$-15+2i$	اكتب على صورة $a+bi$
$-15-2i$	جِد $a-bi$

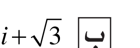
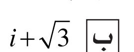
ب $-4i$

$0+(-4)i$	اكتب على صورة $a+bi$
$0-(-4)i$	جِد $a-bi$
$4i$	بسِّط



5. جِد العدد المرافق للعدد المركَّب.

أ $9-i$ ب $i+\sqrt{3}$ ج $-8i$

فكِّرْ وناقش

1. إذا عرفت أن $3+i$ جذر لمعادلة تربيعية عواملها أعداد حقيقية، فكيف تجد الجذر الآخر؟

2. اكتب عددًا مركَّبًا $a+bi$ حيث $a\neq 0$ وَ $b=0$. ثم اكتب عددًا مركَّبًا $a+bi$ حيث $a=0$ وَ $b\neq 0$. أوضح إجابتك.

3. **كن منظّمًا** انسخ المخطَّط وأكمله. اكتب في كل إطار تعريفًا ومثالاً مناسبًا.

الأعداد المركَّبة	
الأعداد الحقيقية	الأعداد التخيلية





6-3 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** العدد 7 هو ______ للعدد $\sqrt{5}+7i$. (الجزء الحقيقي أو الجزء التخيُّلي).

انظر المثال 1

اكتب العدد بدلالة i .

2 $5\sqrt{-100}$ **3** $\frac{1}{2}\sqrt{-16}$ **4** $-\sqrt{-32}$ **5** $\sqrt{-144}$

انظر المثال 2

حُلّ المعادلة.

6 $x^2=-9$ **7** $2x^2+72=0$ **8** $4x^2=-16$ **9** $x^2+121=0$

انظر المثال 3

جِد قيمتي x وَ y اللتين تحقّقان المساواة.

10 $-2x+6i=(-24y)i-14$ **11** $-4+yi=-12x-i+8$

انظر المثال 4

جِد أصفار الدالّة.

12 $f(x)=x^2-12x+45$ **13** $g(x)=x^2+6x+34$

انظر المثال 5

جِد العدد المرافق.

14 $-9i$ **15** $\sqrt{5}+5i$ **16** $8i-3$ **17** $6+i\sqrt{2}$

تمارين وحلُّ مسائل

لحل التمارين	انظر المثال
21–18	1
25–22	2
27–26	3
31–27	4
35–32	5

(تمارين حرّة)

اكتب العدد بدلالة i .

18 $8\sqrt{-4}$ **19** $-\frac{1}{3}\sqrt{-90}$ **20** $6\sqrt{-12}$ **21** $\sqrt{-50}$

حُلّ المعادلة.

22 $x^2+49=0$ **23** $5x^2=-80$ **24** $3x^2+27=0$ **25** $\frac{1}{2}x^2=-32$

جِد قيمتي x وَ y اللتين تحقّقان المساواة.

26 $9x+yi-5=-12i+4$ **27** $5(x-1)+(3y)i=-15i-20$

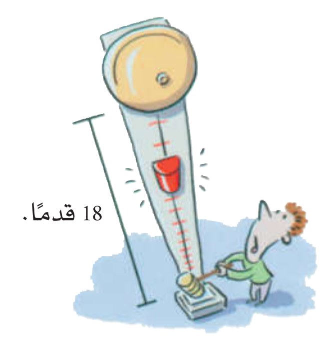
جِد أصفار الدالّة.

28 $f(x)=x^2+2x+3$ **29** $g(x)=4x^2-3x+1$

30 $f(x)=x^2+4x+8$ **31** $g(x)=3x^2-6x+10$

جِد العدد المرافق.

32 i **33** $-\frac{\sqrt{3}}{2}-2i$ **34** $-2.5i+1$ **35** $\frac{i}{10}-1$



36 **ماذا لو...؟** في إحدى ألعاب مدينة الألعاب يضرب اللاعب على نابض بمطرقة ليدفع كرة معدنية باتجاه جرس. يربح اللاعب إذا وصلت الكرة إلى الجرس. تُشكِّل الدالّة $d(t)=16t^2-32t+18$ نموذجًا لحساب المسافة d، بالقدم، بين الكرة والجرس بدلالة عدد الثواني t التي مرت على ضرب اللاعب للنابض. هل يُمكن للاعب أن يربح.

جِد الجذر الثاني لمعادلة معاملاتها حقيقية، علمًا بأن العدد المُعطى جذر لها.

37 $1+14i$ **38** $\frac{5}{7}i$ **39** $4i-2\sqrt{5}$

40 $-12-i$ **41** $9-i\sqrt{2}$ **42** $-\frac{17}{3}i$

جِد قيمتي c وَ d اللتين تحقّقان المساواة.

43 $2ci+1=-d+6-ci$ **44** $c+3ci=4+di$ **45** $c^2+4i=d+di$

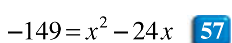
حُلّ المعادلة.

46 $8x^2=-8$ **47** $\frac{1}{3}x^2=-27$ **48** $2x^2+12.5=0$

49 $\frac{1}{2}x^2+72=0$ **50** $x^2=-30$ **51** $2x^2+16=0$

52 $x^2-4x+8=0$ **53** $x^2+10x+29=0$ **54** $x^2-12x+44=0$

55 $x^2+2x=-5$ **56** $x^2+18=-6x$ **57** $-149=x^2-24x$



اذكر إن كانت المقولة صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو خطأ دائمًا. إذا كانت صحيحة أحيانًا، أعطِ أمثلة تدعم ما ذكرت.

58 العدد الحقيقي عدد تخيُّلي.
59 العدد التخيُّلي عدد مركَّب.
60 العدد النسبي عدد مركَّب.
61 العدد المركَّب عدد تخيُّلي.
62 العدد الصحيح عدد مركَّب.
63 لا جذور حقيقية للمعادلة التربيعية.
64 للمعادلة التربيعية جذر حقيقي وجذر مركَّب.
65 جذرا المعادلة التربيعية عددان مترافقان.

جِد أصفار الدالّة.

66 $f(x)=x^2-10x+26$ **67** $g(x)=x^2+2x+17$ **68** $h(x)=x^2-10x+50$

69 $f(x)=x^2+16x+73$ **70** $g(x)=x^2-10x+37$ **71** $h(x)=x^2-16x+68$

72 **تفكير ناقد** هل يُمكنك إيجاد صفرَي الدالّة $f(x)=x^2+64$ بيانيًّا؟ أوضح جوابك.

73 **تفكير ناقد** ما العدد المركَّب المرافق لعدد حقيقي؟





74 **اكتب** ما الطريقة التي تستعملها لحل معادلة تربيعية لا جذور حقيقية لها؟

75 ركل لاعبٌ الكرة إلى الأعلى. تُشكِّل الدالّة $h(t)=-4.9t^2+36t$ نموذجًا لحساب ارتفاع الكرة، بالأمتار، بعد t ثانية من ركلها.

أ رفع فوق الملعب سقف مشبك على ارتفاع 85 مترًا. حُلّ المعادلة $-4.9t^2+36t=72$.

ب بالاستناد إلى ما وجدته في السؤال (أ)، هل يُمكن للكرة أن تصل إلى الشبكة؟ أوضح ذلك.

ج ما أعلى ارتفاع تستطيع الكرة بلوغه، بالاستناد إلى النموذج؟

نافذة

تاريخ الرياضيات



كان عالم الرياضيات السويسري ليونارد أولر *Euler* (1783–1707) أول من استعمل الرمز i للدلالة على $\sqrt{-1}$. كما أدخل الكتابة $f(x)$ للدلالة على قيمة الدالة f عندما يتَّخذ المتغير الحر القيمة x.



76 أي مما يلي هو العدد المرافق للعدد المركَّب $-2+i$ ؟

(أ) $2+i$ (ب) $2-i$ (ج) $i-2$ (د) $-2-i$

77 أي مما يلي هو $\sqrt{-225}$ مكتوبًا بدلالة i ؟

(أ) $15i$ (ب) $-15i$ (ج) $i\sqrt{15}$ (د) $-i\sqrt{15}$

78 أي مما يلي صفرا الدالَّة $f(x)=x^2-2x+17$ ؟

(أ) $1\pm4i$ (ب) $4\pm i$ (ج) $-1\pm4i$ (د) $-4\pm i$

79 أي قيمة للمجهول c تجعل المساواة $3-4i-5=(9+ci)-11$ صحيحة؟

(أ) -2 (ب) -4 (ج) 2 (د) 4

80 أي من المعادلات التالية لها الجذران $-6i$ وَ $6i$ ؟

(أ) $-\frac{1}{6}x^2=6$ (ب) $\frac{1}{4}x^2=9$ (ج) $x^2-30=6$ (د) $20-x^2=-16$

81 **جواب مختصر** أوضح نوع حلول المعادلات التي تُكتب على الصورة $x^2=a$ ، عندما يكون $a>0$ ثم عندما يكون $a<0$.

تحدٍّ وتوسّع

82 جد العدد المركَّب $a+bi$ حيث $5a+3b=1$ وَ $-5b=7+4a$.

83 هل يُمكن أن يكون لمعادلة تربيعية جذر حقيقي واحد؟ جذر تخيُّلي واحد؟ جذر مركَّب واحد؟ أوضح ذلك.

84 حدِّد نتيجة كل شرط على حل المعادلة $x^2+bx+c=0$.

أ $b=0$ ب $c\leq0$ ج $c>0$

د أي شرط يجعل الجزء التخيُّلي للحل مختلفًا عن 0 ؟

مراجعة لولبية

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 85 إلى 88. احسب إن كان ذلك ممكنًا. (الدرس 3 – 2)

$$S=\begin{bmatrix}1 & -5\\ -2 & 0\end{bmatrix},\ T=\begin{bmatrix}-4 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 1\\ 2 & -2 & 2\end{bmatrix},\ V=\begin{bmatrix}10 & 1\\ 0 & -1\\ -5 & 5\end{bmatrix}$$

85 T^2 **86** TV **87** ST **88** S^2

لكل دالَّة: أ) حدِّد إن كان بيانها ينفتح إلى أعلى أو إلى أسفل، ب) جِد محور تناظر بيانها، ج) جِد رأس بيانها، د) جِد تقاطعها مع المحور الثاني وارسم بيانها. (الصفوف السابقة)

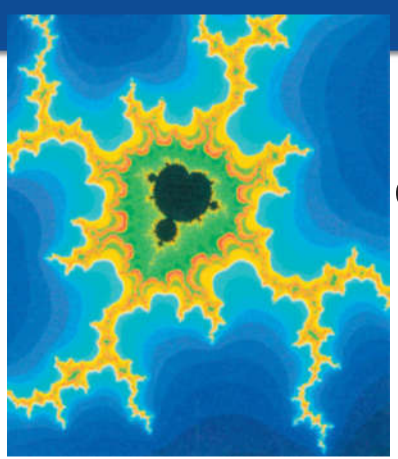
89 $f(x)=\frac{1}{5}x^2+x-10$ **90** $f(x)=-x^2+3$

91 $f(x)=2x^2+4x-3$ **92** $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+1$

حُلّ المعادلة بالتحليل. (الصفوف السابقة)

93 $x^2+5x=14$ **94** $6x^2=-x+2$ **95** $4x^2+9=15x$

96 $4x^2=1$ **97** $x^2+11x=-24$ **98** $x^2=-7x$



7–3 العمليّات على الأعداد المُركَّبة

Operations With Complex Numbers

الأهداف

يجري العمليات الأربع على الأعداد المركَّبة.

المفردات

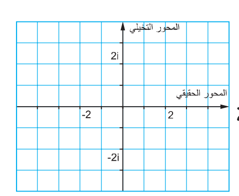
Vocabulary

المستوى المُركَّب
Complex plane
مُطلَق العدد المركَّب
Absolute value of a complex number

لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

تُستعمل الأعداد المركَّبة في القواعد التي تُنشئ أشكالاً توالدية. (التمرين 84)

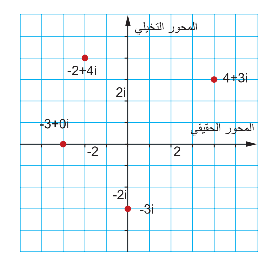
سبق أن مثّلت الأعداد الحقيقية بنقاط على محور الأعداد. سوف تتعلم في هذا الدرس كيف تُمثِّل الأعداد المركَّبة بنقاط على المستوى الإحداثي. **المستوى المركَّب Complex plane** مستوىٍ إحداثي يمثِّل محوره الأول مجموعة الأعداد الحقيقية ومحوره الثاني مجموعة الأعداد التخيُّليّة.



مثـــال 1 تمثيل الأعداد المركَّبة:

مثّل بيانيًا كلاً من الأعداد المركَّبة التالية:

أ $-3+0i$ ب $-3i$ ج $4+3i$ د $-2+4i$



مساعدة

المحور الحقيقي هو المحور الأول، والمحور التخيُّلي هو المحور الثاني. فكّر في $a+bi$ على أنه $x+yi$



1. مثّل بيانيًا كلاً من الأعداد المركَّبة التالية:

أ $3+0i$ ب $2i$ ج $-2-i$ د $3+2i$

تذكّر أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي أو مُطلَقه، هي طول المسافة بين النقطة التي تُمثِّل العدد على محور الأعداد ونقطة الأصل على هذا المحور. بالطريقة نفسها تُعرّف **القيمة المطلقة Absolute value** لعدد مركَّب أو مُطلَقه على أنها طول المسافة بين النقطة التي تُمثِّل العدد في المستوي المركَّب ونقطة الأصل في هذا المستوي.

اعلم واحفظ — القيمة المطلقة أو مُطلَق العدد المركّب

بالكلمات	في الجبر	مثال
القيمة المطلقة أو **مطلق** العدد المركَّب $a+bi$ **Absolute value** هي طول المسافة بين النقطة (a, b) ونقطة الأصل في المستوى الإحداثي. يُكتب مُطلَق العدد المركَّب $a+bi$ على صورة $\|a+bi\|$.	$\|a+bi\|=\sqrt{a^2+b^2}$	$\|3+4i\|=\sqrt{3^2+4^2}$ $=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

مثال 2 حساب مُطلَق عدد مركَّب

احسب مُطلَق العدد المركَّب.

أ $|-9+i|$

$|-9+i|$

$\sqrt{(-9)^2+1^2}$

$\sqrt{81+1}=\sqrt{82}$

ب $|6|$

$|6+0i|$

$\sqrt{6^2+0^2}$

$\sqrt{36}=6$

ج $|-4i|$

$|0-4i|$

$\sqrt{0^2+4^2}$

$\sqrt{16}=4$



2. احسب مُطلَق العدد المركَّب.



أ $1-2i$



ب $-\frac{1}{2}$

ج $23i$

جمع الأعداد المركَّبة وطرحها مشابهان لجمع وطرح المقادير الجبرية التي تتضمّن حدودًا متشابهة. لكي تجمع أعدادًا مركَّبة، اجمع الأجزاء الحقيقية من جهة والأجزاء التخيّلية من جهة.

تتمتَّع عمليات الجمع والطرح والضرب في مجموعة الأعداد المركَّبة بالخصائص نفسها التي تتمتع بها هذه العمليات في مجموعة الأعداد الحقيقية. لذا يُمكنك أن تستعمل خصائص التبديل والتجميع والتوزيع لكتابة المقادير المركَّبة على أبسط صورة.

مثال 3 جمع الأعداد المركَّبة وطرحها

اجمع أو اطرح. اكتب الناتج على صورة $a+bi$.

أ $(3-11i)+(-2+4i)$

$(3-2)+(-11i+4i)$ اجمع الجزءين الحقيقيين والجزءين التخيليين.

$1-7i$

ب $(4-i)-(5+8i)$

$(4-i)-5-8i$ وزّع.

$(4-5)+(-i-8i)$ اجمع الجزءين الحقيقيين والجزءين التخيليين.

$-1-9i$

ج $(6-2i)+(-6+2i)$

$(6-6)+(-2i+2i)$ اجمع الجزءين الحقيقيين والجزءين التخيليين.

$0+0i$

0

د $(10+3i)-(10-4i)$

$(10+3i)-10-(-4i)$ وزّع.

$(10-10)+(3i+4i)$ اجمع الجزءين الحقيقيين والجزءين التخيليين.

$0+7i=7i$

مُساعدَة

لكل عدد مركَّب معكوس. معكوس العدد المركَّب $a+bi$ هو $-a-bi$



3. اجمع أو اطرح. اكتب الناتج على صورة $a+bi$.

أ $(-3+5i)+(-6i)$

ب $2i-(3+5i)$

ج $(4+3i)+(4-3i)$

يُمكنك أيضًا جمع الأعداد المركَّبة باستعمال المستوى الإحداثي.

مثـــال 4 جمع الأعداد المركَّبة على المستوي المركَّب

جِد بيانيًا المجموع $(4+3i)+(-2+i)$.

الخطوة 1 مثّل بيانيًّا كلا من العددين المركَّبين $4+3i$ وَ $-2+i$ في المستوي المركَّب. أنشئَ القطعة المستقيمة التي تصل كلاًّ من النقطتين بنقطة الأصل.

الخطوة 2 أكمل متوازي الأضلاع. تُمثِّل النقطة التي تُشكِّل الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع مجموع العددين المركَّبين والذي يساوي $2+4i$.

إذن $(4+3i)+(-2+i)=2+4i$

تحقَّق اجمع العددين المركَّبين بجمع جزءيهماالحقيقيين وجزءَيْهما التخيُّليَّين.

$(4+3i)+(-2+i)=(4-2)+(3i+i)=2+4i$

نقطة مراقبة 4. احسب بيانيًا.

أ $(3+4i)+(1-3i)$ ب $(-4-i)+(2-2i)$

تستطيع ضرب الأعداد المركَّبة باستعمال التوزيع، متعاملاً مع الأجزاء التخيُّلية على أنها حدود متشابهة، ومستبدلا بـ i^2 العدد -1 حيث يوجد.

مثـــال 5 ضرب الأعداد المركَّبة

اضرب. اكتب الناتج على صورة $a+bi$.

أ $2i(3-5i)$

$6i-10i^2$

$6i-10(-1)$

$10+6i$

ب $(7+2i)(7-2i)$

$49-14i+14i-4i^2$

$49-4(-1)$

53

ج $(5-6i)(4-3i)$

$20-15i-24i+18i^2$

$20-39i+18(-1)$

$2-39i$

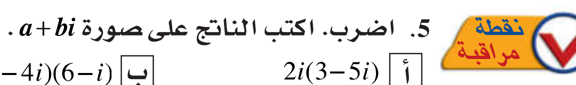
د $(6i)(6i)$

$36i^2$

$36(-1)$

-36

نقطة مراقبة 5. اضرب. اكتب الناتج على صورة $a+bi$.



أ $2i(3-5i)$ ب $(4-4i)(6-i)$ ج $(3+2i)(3-2i)$

يُمكنك إيجاد قوى الوحدة التخيُّلية i، كما هو مُبيّن في الجدول أدناه.

قوى العدد i		
$i^1=i$	$i^5=i^4\times i=1\times i=i$	$i^9=i$
$i^2=-1$	$i^6=i^4\times i^2=1\times(-1)=-1$	$i^{10}=-1$
$i^3=i^2\times i=(-1)\times i=-i$	$i^7=i^4\times i^3=1(-i)=-i$	$i^{11}=-i$
$i^4=i^2\times i^2=(-1)(-1)=1$	$i^8=i^4\times i^4=1\times 1=1$	$i^{12}=1$

مُساعدة

لاحظ أن النمط المتكرِّر في كل صف يسمح لك بحساب أي قوة من قوى العدد i، على أنها أحد الأعداد i، -1 ، $-i$ ، 1

مثـــال 6 حساب قوى العدد i

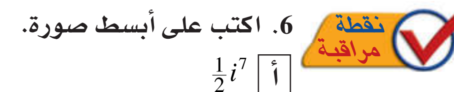
أ اكتب $-3i^{12}$ على أبسط صورة.

$$-3i^{12}=-3\left(i^2\right)^6$$
$$=-3(-1)^6=-3\times 1=-3$$

ب اكتب i^{25} على أبسط صورة.

$$i^{25}=i\times i^{24}$$
$$=i\left(i^2\right)^{12}$$
$$=i(-1)^{12}=i\times 1=i$$





6. اكتب على أبسط صورة.

أ $\frac{1}{2}i^7$



ب i^{42}

تذكّر أن المقدار المكتوب على أبسط صورة لا يُمكن أن يتضمّن جذرًا في المقام. بما أن i جذر تربيعي، فإن كتابة مقدار مركَّب على أبسط صورة يتطلب التخلُّص من i في المقام بطريقة تنسيب المقام. للوصول إلى ذلك، اضرب البسط والمقام بالعدد المرافق للعدد الموجود في المقام.

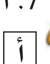
مثـــال 7 قسمة الأعداد المركَّبة

أ اكتب $\frac{3+7i}{8i}$ على أبسط صورة.

$$\frac{3+7i}{8i}=\frac{3+7i}{8i}\times\left(\frac{-8i}{-8i}\right)$$
$$=\frac{-24i-56i^2}{-64i^2}$$
$$=\frac{-24i+56}{64}$$
$$=\frac{-3i+7}{8}=\frac{7}{8}-\frac{3}{8}i$$

ب اكتب $\frac{5+i}{2-4i}$ على أبسط صورة.

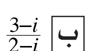
$$\frac{5+i}{2-4i}=\frac{5+i}{2-4i}\times\left(\frac{2+4i}{2+4i}\right)$$
$$=\frac{10+20i+2i+4i^2}{4+8i-8i-16i^2}$$
$$=\frac{10+22i-4}{4+16}$$
$$=\frac{6+22i}{20}=\frac{3}{10}+\frac{11}{10}i$$





7. اكتب على أبسط صورة.

أ $\frac{3+8i}{-i}$

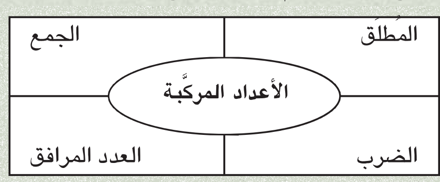


ب $\frac{3-i}{2-i}$

فكِّرْ وناقش

1. أوضح متى يتساوى عدد مركَّب $a+bi$ ومرافقه.
2. جد ناتج الضرب $(a+bi)(c+di)$ وحدِّد الجزء الحقيقي والجزء التخيّلي لهذا الناتج.
3. **كن منظّمًا** انسخ المخطّط ثم أكمله، وضعْ في كل إطار مثالاً مناسبًا.





7-3 التمـــارين

تمــارين موجّهــة

1 مـفـردات في المستوي المركَّب، يُمثِّل المحور الأول الأعداد ______ بينما يُمثِّل المحور الثاني الأعداد ______ . (الحقيقية، النسبية، التخيّلية).

انظر المثال 1

مثّل بيانيًا العدد المركَّب.

2 4 3 $-i$ 4 $3+2i$ 5 $-2-3i$

انظر المثال 2

جِد القيمة المطلقة.

6 $|4-5i|$ 7 $|-33.3|$ 8 $|-9i|$ 9 $|5+12i|$ 10 $|-1+i|$ 11 $|15i|$

انظر المثال 3

اجمع أو اطرح. اكتب الناتج على صورة $a+bi$.

12 $(2+5i)+(-2+5i)$ 13 $(-1-8i)+(4+3i)$

14 $(1-3i)-(7+i)$ 15 $(4-8i)+(-13+23i)$

16 $(6+17i)-(18-9i)$ 17 $(-30+i)-(-2+20i)$

انظر المثال 4

جِد المجموع بيانيًا.

18 $(3+4i)+(-2-4i)$ 19 $(-2-5i)+(-1+4i)$ 20 $(-4-4i)+(4+2i)$

انظر المثال 5

اضرب. اكتب الناتج على صورة $a+ib$.

21 $(1-2i)(1+2i)$ 22 $3i(5+2i)$ 23 $(9+i)(4-i)$

24 $(6+8i)(5-4i)$ 25 $(3+i)^2$ 26 $(-4-5i)(2+10i)$

انظر المثال 6

اكتب على أبسط صورة.

27 $-i^9$ 28 $2i^{15}$ 29 i^{30}

انظر المثال 7

اقسم. اكتب الناتج على صورة $a+ib$.

30 $\frac{5-4i}{i}$ 31 $\frac{11-5i}{2-4i}$ 32 $\frac{8+2i}{5+i}$

33 $\frac{17}{4+i}$ 34 $\frac{45-3i}{7-8i}$ 35 $\frac{-3-12i}{6i}$

تمــارين وحلُّ مســائـل

تمارين حرّة	
لحل التمارين	أنظر المثال
39-36	1
45-40	2
51-46	3
54-52	4
60-55	5
63-61	6
69-64	7

مثّل بيانيًا العدد المركَّب.

36 -3 37 $-2.5i$ 38 $i+1$ 39 $4-3i$

جِد القيمة المطلقة.

40 $|2+3i|$ 41 $|-18|$ 42 $\left|\frac{4}{5}i\right|$ 43 $|6-8i|$ 44 $|-0.5i|$ 45 $|10-4i|$

اجمع أو اطرح. اكتب الناتج على صورة $a+bi$.

46 $(8-9i)-(-2-i)$ **47** $4i-(11-3i)$ **48** $(4-2i)+(-9-5i)$

49 $(13+6i)+(15+35i)$ **50** $(3-i)-(-3+i)$ **51** $-16+(12+9i)$

جِد المجموع بيانيًا.

52 $(4+i)+(-3i)$ **53** $(5+4i)+(-1+2i)$ **54** $(-3-3i)+(4-3i)$

اضرب. اكتب الناتج على صورة $a+ib$.

55 $-12i(-1+4i)$ **56** $(3-5i)(2+9i)$ **57** $(7+2i)(7-2i)$

58 $(5+6i)^2$ **59** $(7-5i)(-3+9i)$ **60** $-4(8+12i)$

اكتب على أبسط صورة.

61 i^{27} **62** $-i^{11}$ **63** $5i^{10}$

اقسم. اكتب الناتج على صورة $a+ib$.

64 $\frac{2-3i}{i}$ **65** $\frac{5-2i}{3+i}$ **66** $\frac{3}{-1-5i}$

67 $\frac{19+9i}{5+i}$ **68** $\frac{8+4i}{7+i}$ **69** $\frac{6+3i}{2-2i}$

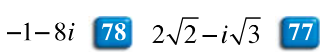
اكتب العدد المركَّب الذي تُمثِّله النقطة.

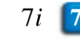



70 A **71** B **72** C **73** D **74** E

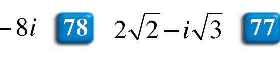


جِد مطلق العدد المركَّب.









75 $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ **76** $7i$ **77** $2\sqrt{2}-i\sqrt{3}$ **78** $-1-8i$



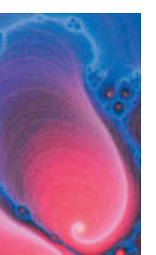
نافذة

الأشكال التوالدية



الشكل التوالدي Fractal شكل يتوالى بعضه من بعض على النسق نفسه. وهذا يعني أن أجزاء الشكل تشبه الشكل كله. توجد في الطبيعة أشكال توالدية كثيرة مثل عروق أوراق الشجر وحبات الثلج الذي يتساقط من السماء. نتيجة لذلك، يستعمل العلماء الأشكال التوالدية لإنشاء نماذج لمثل تلك الأشياء.

79 **أشكال توالدية Fractals** الأشكال التوالدية أنماط تنتج من استعمال الأعداد المركَّبة وتكرار قوانين رياضية. عوّض بالعدد الأول في القانون ثم خذ الناتج وعوّض به في القانون مجددًا وهكذا ... يُمكن استعمال كل عدد مركَّب ينتج من هذه العملية التكرارية لتحديد لون بيكسل (أو نقطة) على شاشة الحاسوب. تُبيّن الصورة المقابلة مثالاً على ما يُمكن أن ينتج. يعتمد الكثير من أنماط الأشكال التوالدية على قانون مجموعة جوليا Julia وهو: $Z_{n+1}=(Z_n)^2+c$ حيث c عدد ثابت. استعمل قانون مجموعة جوليا حيث $c=0.25$.



أ احسب Z_2 علمًا بأن $Z_1=0.5+0.6i$.

ب احسب Z_3 مستعملاً العدد Z_2 الذي وجدته في السؤال (أ).

ج احسب Z_4 مستعملاً العدد Z_3 الذي وجدته في السؤال (ب).

اكتب المقدار المركَّب على صورة $a+ib$ بعد تبسيطه.

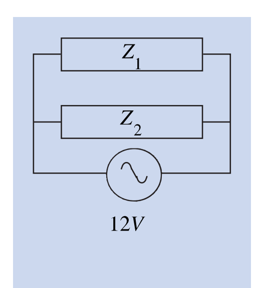
80 $6i-(4+5i)$ **81** $(-2.3+i)-(7.5-0.3i)$ **82** $(6-5i)^2$

83 $(-2-3i)^2$ **84** $(5+7i)(5-7i)$ **85** $(2-i)(2+i)(2-i)$

86 $3-i^{11}$ **87** $i^{52}-i^{48}$ **88** $i^{35}-i^{24}+i^{18}$

89 $\frac{12+i}{i}$ **90** $\frac{18-3i}{i}$ **91** $\frac{4+2i}{6+i}$

92 $\frac{1+i}{-2+4i}$ **93** $\frac{4}{2-3i}$ **94** $\frac{6}{\sqrt{2}-i}$



خطوات متعددة **يواجه التيار الكهربائي عند مروره في جسم معيَّن مقاومة تُقاس بالأوم. وجد المهندسون الكهربائيون أن من المناسب التعبير عن هذه المقاومة Z باستعمال الأعداد المركَّبة. يعتبر علماء الفيزياء أن المقاومة الكلّية لشبكة كهربائية مكوَّنة من مسارين متوازيين مقاومتهما Z_1 وَ Z_2 تعادل مقاومة مسار كهربائي واحد مقاومته $Z_{eq}=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$.**

95 جِد المقاومة الكلّية لشبكة كهربائية من مسارَين متوازيَين مقاومة أوّلهما $Z_1=3+2i$ ومقاومة الثاني $Z_2=1-2i$.

96 جِد المقاومة الكلية لشبكة كهربائية من مسارَين متوازيَين مقاومة أوّلهما $Z_1=2+2i$ ومقاومة الثاني $Z_2=4-i$.

اذكر إن كانت المقولة صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو خطأ دائمًا. إذا كانت المقولة صحيحة أحيانًا، أعطِ مثالاً على حالة تكون فيها صحيحة، وآخر على حالة تكون فيها خطأ. إن كانت المقولة خطأ دائمًا، أعطِ مثالاً يدعم جوابك.

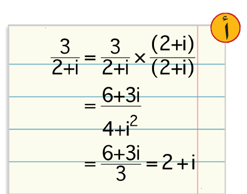
97 مجموع أي عدد مركَّب $a+bi$ ومرافقه، هو عدد حقيقي.

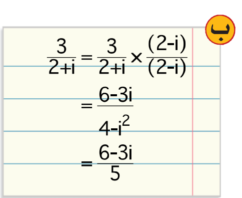
98 الفرق بين عدد مركَّب $a+bi$ $(b\neq 0)$ ومرافقه، هو عدد حقيقي.

99 ناتج ضرب عدد مركَّب $a+bi$ $(b\neq 0)$ في مرافقه، هو عدد حقيقي موجب.

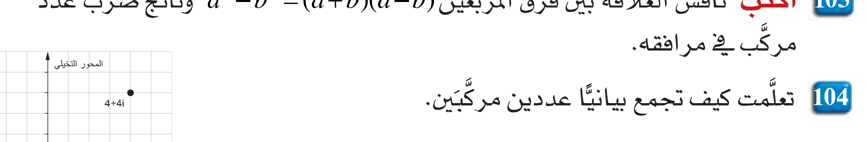
100 ناتج ضرب عدد تخيُّلي bi $(b\neq 0)$ في آخر di $(d\neq 0)$، هو عدد حقيقي موجب.

101 **خطأ في التحليل** في ما يلي محاولتان لكتابة العدد المركَّب $\frac{3}{2+i}$ على أبسط صورة. أي المحاولتين خطأ؟ بيِّن الخطأ.



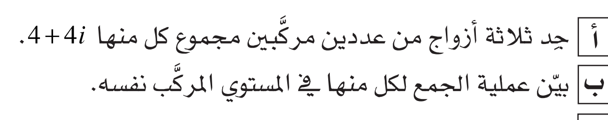


102 **تفكير ناقد** لماذا يتساوى مُطلَق عدد مركَّب مع مُطلَق مرافقه؟ استعمل التمثيل البياني لتعليل الجواب.



103 **اكتب** ناقش العلاقة بين فرق المرَّبعيَن $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ وناتج ضرب عدد مركَّب في مرافقه.

104 تعلَّمت كيف تجمع بيانيًّا عددين مركَّبَين.



أ جِد ثلاثة أزواج من عددين مركَّبين مجموع كل منها $4+4i$.

ب بيِّن عملية الجمع لكل منها في المستوى المركَّب نفسه.

ج صِف ما حصلت عليه.

تحضير للاختبار



استعمل الرسم البياني المقابل لحل التمرينين 105 وَ 106 .

105 أي نقطة في الشكل تُمثِّل العدد المركَّب $1-2i$؟

(أ) النقطة A (ب) النقطة B (ج) النقطة C (د) النقطة D

106 ما العدد المركَّب الذي تُمثِّله النقطة E؟

(أ) -2 (ب) 2 (ج) $-2i$ (د) $2i$

107 أي من الأعداد المركَّبة التالية هو الصورة الأبسط للمقدار $(2-5i)-(2+5i)$؟

(أ) $10i$ (ب) $4+10i$ (ج) $-10i$ (د) $4-10i$

108 أي من الأعداد المركَّبة التالية هو الصورة الأبسط للمقدار $(-5+3i)^2$؟

(أ) $16-15i$ (ب) $16-30i$ (ج) $34-15i$ (د) $34-30i$

تحدٍّ وتوسّع

109 استعمل ما تعرفه عن قوى الوحدة التخيُّلية i لكي تحل هذا التمرين.

أ أكمل الجدول أدناه واستخلص نمطًا.

$i^1 =$ ■	$i^0 =$ ■	$i^{-1} =$ ■	$i^{-2} =$ ■	$i^{-3} =$ ■	$i^{-4} =$ ■	$i^{-5} =$ ■

ب أوضح النمط الذي توصلت إليه والذي يتعلق بالقوى ذات الأسّ السالب للوحدة التخيّلية i . ما القيم التي يُمكن لهذه القوى أن تتّخذها؟

ج اكتب i^{-12} وَ i^{-37} وَ i^{-90} على أبسط صورة.

جِد الصورة العامة لنتيجة كل من العمليتيْن التاليتين على الأعداد المركَّبة:

110 $(a+bi)(c+di)$

111 $\frac{a+bi}{c+di}$

مراجعة لولبية

112 **نقود** يُبيِّن الجدول أدناه ما يُنفقه دلسوز على فطوره أسبوعيًّا على مدى 8 أسابيع. مثّل بيانيًّا هذه المعطيات. ارسم المستقيم الأقرب إلى هذه النقاط واكتب معادلته. (الدرس)

عدد الوجبات	5	7	3	5	6	2	4	5
الكلفة (بآلاف الدنانير)	10	13	8	9	8	5	10	11

حُلّ المتباينة جبريًّا. (الصفوف السابقة)

113 $3x^2-6x\leq 0$

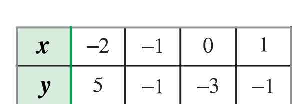
114 $10<x^2-4x-11$

115 $-6\geq 2x^2+7x-21$

116 $3-x^2<7-5x$

حدد إن كان بالإمكان أن يمثِّل الجدول دالَّة تربيعية. أوضح ذلك.

117



x	-2	-1	0	1
y	5	-1	-3	-1

118

x	0	2	4	6
y	18	10	2	-6

الفصل 3

دليل الدراسة : مراجعة

$Q=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، $P=\begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$R=\begin{bmatrix} 6 & -8 & 4 \\ -10 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

جِد المقدار إن كان ذلك ممكنًا.

1 $P-2Q$

2 $0.2Q$

3 $\frac{1}{2}R-\frac{1}{3}P$

4 $\frac{1}{2}(2P+R)$

استعمل المعطيات التالية لحل التمارين من 5 إلى 7.

في حملة لتنظيف الشاطئ، جمع فريق الصف الحادي عشر 125 علبة مرطّبات وَ 45 عبوة. وجمع فريق الصف العاشر 95 علبة مرطبات وَ 65 عبوة.

5 استعمل مصفوفة A لعرض المعطيات أعلاه.

6 اكتب مصفوفة D تُبيّن الفرق بين ما جمعه الفريقان.

7 جمع كل فريق في اليوم التالي ضعف ما جمعه من كل نوع في اليوم الأول. اكتب مصفوفة تُبيّن ذلك.

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين 8-14

$C=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

جِد المقدار إن كان مُعرّفًا.

8 AB

9 CA

10 AC

11 BC

12 A^2

13 C^2

14 $(BA)^2$

15 يُبيّن الجدولان أسعار البطاقات بالدينار، وما بيع منها في 3 أيام.

أسعار البطاقات

	كبار	أولاد
الثلاثاء	5 000	2 500
الأربعاء	7 500	4 250
الخميس	9 000	5 750

البطاقات المبيعة

	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس
كبار	67	196	245
أولاد	104	75	154

أ نظِّم معطيات كل جدول في مصفوفة.

ب استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد مدخول كل يوم.

ج جِد مدخول كل يوم من بيع بطاقات الكبار وبيع بطاقات الصغار.

استعمل المصفوفات لكي تجد صورة الرباعي $A(-2, -1)$ $B(-1, 3)$ ،$C(2, 4)$ $D(0, 0)$ بكل من التحويلات التالية.

16 سحب وحدتين إلى اليمين، ووحدة واحدة إلى أعلى.

17 تكبير الرباعي بعامل 1.5.

18 باستعمال المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. ما نوع التحويل؟

19 باستعمال المصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. ما نوع التحويل؟

20 استعمل المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ لتحويل المثلث ABC حيث $A(-1, -2)$ وَ $B(0, 1)$ وَ $C(3, -2)$.
ارسم المثلث وصورته بالتحويل. صِف التحويل.

جِد محدِّد المصفوفة.

21 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

22 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

23 $\begin{bmatrix} -0.5 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

24 $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

25 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & -6 \end{bmatrix}$

26 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 9 & -13 & 8 \end{bmatrix}$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام خطي.

27 $\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=1 \end{cases}$

28 $\begin{cases} 2x+5y+21=0 \\ 7y+47=6x \end{cases}$

29 $\begin{cases} 4.5x+3y=10.5 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$

30 $\begin{cases} 5x-6y=7+7z \\ 6x-4y+10z=-34 \\ 2x+4y=29+3z \end{cases}$

31 $\begin{cases} x-y+z=5 \\ y-x-z=2 \\ x-y+z=7 \end{cases}$

32 $\begin{cases} y-2.4x=0.8 \\ 3x+0.5z=2.25 \\ 3.5y+z=8.5 \end{cases}$

33 جِد نقطة تقاطع المستقيمين $2x+3y=8$ وَ $y=x+1$.

أ اكتب مصفوفة المعاملات واحسب محدِّدها.

ب حُلّ النظام باستعمال قاعدة كرامر.

جِد مقلوب المصفوفة.

34 $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

35 $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

36 $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$

37 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

38 $\begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$

39 $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

اكتب النظام الخطّي باستعمال المصفوفات، ثم حلّه.

40 $\begin{cases} \frac{3}{2}x=20+y \\ x+6y=80 \end{cases}$

41 $\begin{cases} x=1+y \\ x+y=9 \end{cases}$

42 $\begin{cases} 3x+3y-z=19 \\ 5x+4y-3z=28 \\ 2x+2y-z=12 \end{cases}$

43 $\begin{cases} 2x+9=2z \\ 5x+y+32=7z \\ 2(3x+y)=8z-39 \end{cases}$

44 يقدِّم أحد محالّ بيع التذكارات هدايا لزبائنه. يقدم هدية صغيرة قيمتها 5000 دينار للزبون إذا تراوحت قيمة مشترياته بين 000 25 دينار و999 74 دينارًا، وهدية متوسطة قيمتها 000 8 دينار إذا تراوحت قيمة مشترياته بين 000 75 دينار وَ 999 149 دينارًا، وهدية كبيرة قيمتها 500 12 دينار إذا لم تقل قيمة مشترياته عن 000 150 دينار. قدّم المحل 102 من الهدايا، بلغت قيمتها 000 654 دينار، وكان عدد الهدايا الصغيرة 6 أضعاف عدد الهدايا الكبيرة.

أ اكتب نظام معادلات يُعبّر عن المسألة.

ب استعمل قاعدة كرامر لحل النظام وتحديد عدد الهدايا من كل نوع.

حُلّ المعادلة.

45 $x^2=-81$

46 $6x^2+150=0$

47 $x^2+6x+10=0$

48 $x^2+12x+45=0$

49 $x^2-14x+75=0$

50 $x^2-22x+133=0$

جِد مرافق العدد المركَّب.

51 $5i-4$

52 $3+i\sqrt{5}$

احسب المُطلق.

53 $|-3i|$

54 $|4-2i|$

55 $|12-16i|$

56 $|7i|$

اكتب المقدار على صورة $a+bi$.

57 $(1+5i)+(6-i)$

58 $(9+4i)-(3+2i)$

59 $(5-i)-(11-i)$

60 $-5i(3-4i)$

61 $(5-2i)(6+8i)$

62 $(3+2i)(3-2i)$

63 $(4+i)(1-5i)$

64 $(-7+4i)(3+9i)$

65 i^{32}

66 $-5i^{21}$

67 $\frac{2+9i}{-2i}$

68 $\frac{5+2i}{3-4i}$

69 $\frac{-12+26i}{2+4i}$

70 $\frac{8-4i}{1+i}$

الفصل
3



اختبار الفصل

استعمل معطيات الجدول لحل التمارين من 1 إلى 4.

	الجوائز			
	المركز الأول	المركز الثاني	المركز الثالث	مجموع النقاط
ميان	5	1	2	41
شاهناز	3	5	1	42
شيرين	3	1	4	29

1 استعمل مصفوفة A تعرض معطيات الجدول.

2 ما رتبة هذه المصفوفة.

3 ما قيمة العنصر a_{31} ؟

4 ما عنوان العنصر الذي قيمته 2؟

استعمل المصفوفات في التمارين من 5 إلى 10. احسب الناتج إن كان ذلك ممكنًا.

$$E=\begin{bmatrix}2&3\\-1&0\\4&1\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}4&-2&0\\-1&1&-2\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}2&-1\\3&1\end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix}-2&1\\3&0\\5&-1\end{bmatrix},\ J=\begin{bmatrix}1&-5&6\end{bmatrix},\ K=\begin{bmatrix}7\\0\\-2\end{bmatrix}$$

5 $E+F$ 6 EF 7 FE

8 H^2 9 G^3 10 FK

استعمل مصفوفة لتحويل المثلث PQR بالتحويل المحدَّد.

11 سحب وحدتين إلى أعلى ووحدة واحدة إلى اليمين.

12 تكبير بنسبة $\frac{3}{2}$.

13 تحويل بالمصفوفة $\begin{bmatrix}0&2\\2&0\end{bmatrix}$. صِف الصورة.

جِد محدِّد المصفوفة.

14 $\begin{bmatrix}4&0\\0&-3\end{bmatrix}$ 15 $\begin{bmatrix}0.25&1\\2&8\end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix}3&-1\\-2&-1\end{bmatrix}$ 17 $\begin{bmatrix}1&-2&3\\3&-1&-3\\2&1&5\end{bmatrix}$

حُلّ النظام باستعمال قاعدة كرامر.

18 $\begin{cases}x+2y=1\\3x-y=10\end{cases}$ 19 $\begin{cases}x+3z=3+2y\\3x+22=y+3z\\2x+y+5z=8\end{cases}$

جِد مقلوب المصفوفة إن كان ذلك ممكنًا.

20 $\begin{bmatrix}2&0.7\\4&1.4\end{bmatrix}$ 21 $\begin{bmatrix}3&-1\\1&3\end{bmatrix}$

22 $\begin{bmatrix}3&1\\2&-1\end{bmatrix}$ 23 $\begin{bmatrix}3&2&-1\\2&3&-5\\1&4&2\end{bmatrix}$

24 ثمن $2.5\,kg$ من التين، وَ $1.5\,kg$ من التمر 14420 دينارًا. وثمن $3.5\,kg$ من التين وَ $1\,kg$ من التمر 16 910 دنانير. استعمل المصفوفات لإيجاد ثمن $1\,kg$ من كل نوع.

اكتب النظام الخطّي على الصورة المصفوفية، ثم حُلّه إن كان ذلك ممكنًا.

25 $\begin{cases}6x+y=2\\3x-2y+1=0\end{cases}$ 26 $\begin{cases}5x-2y=3\\2.5x-y=1.5\end{cases}$

27 $\begin{cases}x+2y=3.5\\3x=2.7+y\end{cases}$ 28 $\begin{cases}2x-z=3+y\\x+2=y+5\\4z+x+y=1\end{cases}$

اكتب المقدار على صورة $a+bi$.

29 $(1-2i)-(5+2i)$ 30 $(6-2i)(2-2i)$

31 $-2i^{18}$ 32 $\frac{1-8i}{4i}$

حُلّ المعادلة.

33 $x^2+25=0$ 34 $x^2+12x=-40$

35 $(x-1)^2+7=0$ 36 $2x^2-x+5=0$

جِد مرافق العدد المركَّب.

37 $5+3i$ 38 $6-7i$ 39 $-2+i\sqrt{2}$



1 عمر هلز يقل سنتين عن 4 أضعاف عمر هيرش وعمر سردار يزيد 6 سنوات على نصف عمر هلز. ارمز بـ x إلى عمر هيرش وَبـ y إلى عمر هلز. أي مقدار يمثِّل عمر سردار؟

(أ) $\frac{1}{2}x+6$

(ب) $2x+5$

(ج) $4x+\frac{1}{2}y+4$

(د) $\frac{1}{2}(4x+2)-6$

2 يُبيّن الرسم البياني مستقيمًا يشكل خط الحدود لمنطقة الحل العائدة إلى متباينة خطّية. لا ينتمي الزوجان المرتبان $(21, 83)$ وَ $(16, 62)$ إلى مجموعة الحل، أي مما يلي صحيح؟

(أ) يجب أن يكون خط الحدود منقّطًا، ويجب تظليل المنطقة الواقعة فوق الخط.

(ب) يجب أن يكون خط الحدود متّصلاً، ويجب تظليل المنطقة الواقعة فوق الخط.

(ج) يجب أن يكون خط الحدود منقّطًا، ويجب تظليل المنطقة الواقعة تحت الخط.

(د) يجب أن يكون خط الحدود متّصلاً، ويجب تظليل المنطقة الواقعة تحت الخط.

3 أي مقدار مصفوفة يساوي $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$؟

(أ) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 22 & 28 \end{bmatrix}$

(ب) $2\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} -6 & 17 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 8 & -13 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

4 في 27 آذار 2004، بلغت الطائرة الخارقة السرعة $X-43A$ ، التي طورتها وكالة الفضاء الأمريكية نازا، سرعة ماك 7 أي سبعة أضعاف سرعة الصوت، مما يعني أن هذه الطائرة تقطع 16 ميلاً كل 12 ثانية. أي من الدوال أدناه تمثِّل ما تقطعه هذه الطائرة بدلالة الزمن عندما تطير بسرعة ماك 7؟

(أ) $f(s)=16x+12s$

(ب) $f(s)=\frac{3}{4}s$

(ج) $f(s)=16s$

(د) $f(s)=1\frac{1}{3}s$

5 اشترك دلشاد في مؤتمر، وشارك في عدة ورش عمل خلال المؤتمر. قام دلشاد بتقويم ورش العمل التي شارك فيها بإعطاء كل منها تقويمًا من 1 إلى 10. يُبيّن الجدول أدناه، مدة كل ورشة عمل وتقويم دلشاد لها.

عدد الدقائق	53	93	48	120	32
التقويم	7	4	5	9	8

ما معامل ارتباط العلاقة بين مدة ورشة العمل وتقويم دلشاد لها، مقرَّبًا إلى أقرب جزء من مئة؟

(أ) 0.01

(ب) 0.12

(ج) 0.88

(د) 0.13

6 $M=\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ وَ $N=\begin{bmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. أي مما يلي المصفوفة $2MN$ ؟

(أ) $\begin{bmatrix} -24 & 184 & 0 \\ -12 & 124 & 192 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} -12 & 92 & 0 \\ -6 & 62 & 96 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} -24 & -12 \\ 184 & 124 \\ 0 & 192 \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} -12 & -6 \\ 92 & 62 \\ 0 & 96 \end{bmatrix}$

7 إلى أي مستو تعود التقاطعات التالية مع محاور الإحداثيات $(20, 0, 0)$ ، $(0, 40, 0)$ ، $(0, 0, 5)$ ؟

(أ) $20x+40y+5z=0$

(ب) $20x+40y+5z=1$

(ج) $4x+8y+z=5$

(د) $2x+y+8z=40$

8 أي مما يلي يساوي المقدار $\frac{5(6-8i)}{2-i}$ ؟

(أ) $-20+10i$ (ب) $15-8i$

(ج) $15-40i$ (د) $20-10i$

9 أي مما يلي مقلوب المصفوفة $\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ ؟

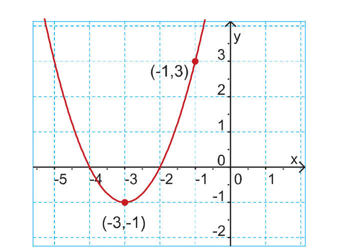
(أ) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix}2 & 4\\ -4 & -2\end{bmatrix}$

10 أي مما يلي معادلة الدالّة صاحبة البيان؟

(أ) $y=(x-3)^2-1$ (ب) $y=(x+3)^2-1$

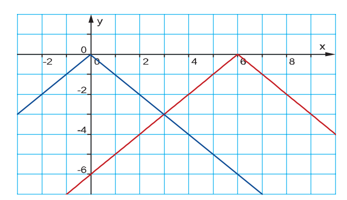
(ج) $y=(x-1)^2-3$ (د) $y=(x+1)^2-3$



جواب مختصر

11 تفحَّص بيان الدالّتين $f(x)=-|x|$ وَ $g(x)=f(x-h)$

ما قيمة h ؟



12 استعمل مصفوفة لتحويل المثلث ABC حيث $A(-1, 0)$ وَ $B(4, 3)$ وَ $C(2, -1)$.

أ $A'B'C'$ صورة سحب المثلث ABC وحدة واحدة إلى اليمين، وَ 4 وحدات إلى أعلى. أعطِ إحداثيات رؤوس $A'B'C'$.

ب $A''B''C''$ صورة $A'B'C'$ بانعكاس حول المحور الثاني. أعطِ إحداثيات رؤوس $A''B''C''$.

13 جِد محدِّد المصفوفة $\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -1\\ 0.4 & 10\end{bmatrix}$.

14 يُبيّن الجدول أدناه أجور رَكْن السيارات في موقف المطار، وفقًا لمدَّة الرَّكْن. ما ميل الدالّة الخطّية التي تُمثِّل أجرة الرَّكْن بالدنانير، بدلالة مدة الركن بالساعات؟

المدة	1	3	5	7
الأجرة	3350	5050	6750	8450

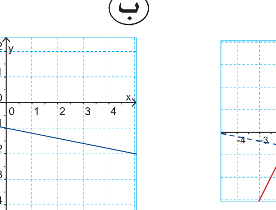
15 أي قيمة للمتغيّر c تجعل النظام الخطي

$\begin{cases}2y-x+10=0\\ 3x-6y-c=16\end{cases}$ غير محدَّد؟

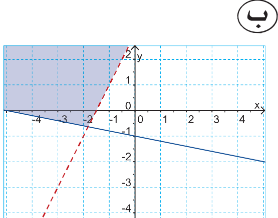
جواب مباشر

16 اكتب نظام متباينات يُمثِّل الشكل حلَّه البياني.

(أ)

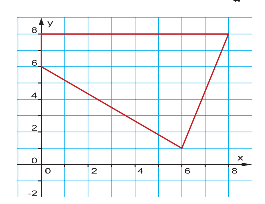


(ب)



17 أوضح التباين بين النظامين في التمرين السابق.

18 يُبيّن الرسم البياني أدناه منطقة الجدوى لمسألة برمجة خطّية.



أ اكتب شروط هذه المسألة.

ب جِد القيمة الكبرى لدالّة المنفعة $P=3x-4y$ في هذه المسألة.

جواب مفصَّل

19 استعمل المعادلة الخطّية $2x-3y=-15$.

أ وضِّح كيف تكتب هذه المعادلة على صورة الميل – التقاطع.

ب ما السبب الذي يجعل صورة الميل – التقاطع أفضل صورة لكتابة مثل هذه المعادلة، قبل رسم المستقيم الذي تمثِّله؟

ج اكتب خطوات رسم المستقيم الذي تمثِّله هذه المعادلة خطوة خطوة.

الفصل

4

الدوال الأسّية واللوغاريتميّة

Exponential and Logarithmic Functions

الفصل الرابع

الدوال الأسّية واللوغاريتمية

جِد "e" في القوس

يُعتبر قوس البوابة في مدينة سانت لويس الأمريكية أعلى المعالم الأمريكية. لهذا القوس شكل منحنٍ شبيه بالقطع المكافئ. سوف تدرس هذه المنحنيات في مشروع الفصل.

هل أنت مستعد؟

المُفردات

اربط المفردة بتعريفها الوارد إلى اليسار.

1 الثابت
2 الدالّة
3 العلاقة
4 المتغيّر

أ رمز يُستعمل لتمثيل عدد قد يتّخذ قيمًا مختلفة.
ب مجموعة الأعداد المستعملة في العد ومعكوساتها.
ج علاقة تربط كل قيمة للمتغيّر الحر بقيمة وحيدة من قيم المتغيّر التابع.
د حد لا يتضمّن متغيّرات.
هـ مجموعة أزواج مرتبة.

خصائص القوى

اكتب المقدار على أبسط صورة.

5 $x^2(x^3)(x)$
6 $3y^{-1}(5x^2y^2)$
7 $\frac{a^8}{a^2}$
8 $y^{15} \div y^{10}$
9 $\frac{x^2y^5}{xy^6}$
10 $\left(\frac{x}{3}\right)^{-3}$
11 $(3x)^2(4x^3)$
12 $\frac{a^{-2}b^3}{a^4b^{-1}}$

الفائدة البسيطة

استعمل قانون الفائدة البسيطة $I = Prt$، حيث يرمز I إلى الفائدة، ويرمز P إلى المبلغ الأصلي، بينما يرمز r إلى نسبة الفائدة السنوية، وَ t إلى المدَّة بالسنوات.

13 جِد فائدة مبلغ 30 مليون دينار، تم توظيفه لسنتين بفائدة سنوية نسبتها 3% .

14 جِد نسبة الفائدة السنوية على مبلغ مليونَي دينار، تم توظيفه لمدة سنتين وأثمر فائدة قدرها 90 000 دينار.

15 اقترض كاروان مبلغًا من المال لمدة 3 سنوات بفائدة بسيطة نسبتها 6%. ما قيمة هذا القرض، علمًا بأن كاروان سدّد الرصيد كلّه، 5310 ملايين دينار؟

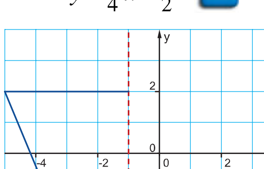
حل معادلة بالنسبة إلى متغيّر

احسب قيمة المتغيّر x بدلالة المتغيّرات الأخرى.

16 $3x - y = 4$
17 $y = -7x + 3$
18 $\frac{x}{2} = 3y - 4$
19 $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

تناظر

20 انسخ الشكل المقابل، ثم أكمله باستعمال محور التناظر الأحمر.



الصورة العلمية

اكتب على الصورة العلمية.

21 7 000 000 000
22 0.0000000093
23 16.75

الفصل 4

دليل الدراسة : نظرة إلى الفصل

في الماضي

درست سابقًا

- استعمال خصائص القوى لكتابة مقدار على أبسط صورة.
- إجراء العمليات المتعاكسة.
- حل مسائل تتضمن دوال خطّية وتربيعية وحدودية.

في هذا الفصل

سوف تتعلّم

- الدوال الأسّية.
- اللوغاريتمات والدالّة العكسية.
- الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- حل مسائل تتضمن دوال أسّية أو لوغاريتمية.

في المستقبل

يُمكنك استعمال مهارات هذا الفصل

- لحل مسائل تتضمن الفائدة المركَّبة.
- في الميادين العلمية، مثل الأحياء وعلم الاجتماع، حيث يتم جمع المعطيات وتنظيمها وتحليلها.
- في الصفوف الأعلى التي تتناول الإحصاء ورياضيات الأعمال.

المفردات Vocabulary

المفردات	Vocabulary
المقارب	Asymptote
الأساس	Base
اللوغاريتم العادي	Common logarithm
المعادلة الأسّية	Exponential equation
الدالّة العكسية	Inverse function
المعادلة اللوغاريتمية	Logarithmic equation
الدالّة اللوغاريتمية	Logarithmic function
اللوغاريتم الطبيعي	Natural logarithm

نافذة على المفردات

لكي تألف بعض المفردات الواردة في هذا الفصل، تابع الخطوات التالية:

1. يُمكنك أن تفكِّر في **الأساس** على أنه مرافق للأس. أي عدد هو الأساس في 10^3؟
2. **اللوغاريتم العادي** هو أس في قوة للعدد 10. كيف تتصور ما ستكون عليه قيمة اللوغاريتم العادي للعدد 1000؟
3. أين تتوقع أن تجد المجهول x في **معادلة أسّية** ؟
4. القسمة هي العملية العكسية للضرب. كيف تتوقع أن يكون تأثير الدالّة العكسية لدالة معطاة، على تلك الدالّة؟
5. أساس **اللوغاريتم الطبيعي** هو العدد e. أي قيمة ثابتة أخرى ترمز إليها بحرف ؟
6. كلمة Asymptote كلمة يونانية تعني عدم الالتقاء. كيف تنظر إلى العلاقة بين منحن ومستقيم **مقارب** له ؟

الفصل 4



استراتيجية الكتابة : استعمل أسلوبك

عندما تدرس مفهومًا صعبًا من مفاهيم الرياضيات، أعد كتابة المفهوم بأسلوبك، مما يساعدك على إدراك ما تدرسه بشكل أفضل. وربما كان مفيدًا أن تقدِّم مثالك الخاص لتوضيح المفهوم.

تتحدَّد **درجة الحدودية** باستعمال الحد ذي الدرجة العليا. تكون حدودية بمتغيّر واحد مكتوبة على الصورة العامة عندما تكون حدودها مكتوبة بالترتيب التنازلي لدرجاتها. وهكذا، عندما تكون الحدودية مكتوبة على الصورة العامة، فإنّ درجة الحد الأول هي درجة الحدودية، ومعامل الحد الأول هو المعامل الرئيس للحدودية.

الحدوديات

1. درجةُ الحدودية درجة حدّها ذي الدرجة الأعلى.
2. الصورة العامة: الحدود مكتوبة بالترتيب التنازلي لدرجاتها.
3. في الصورة العامة، درجة الحد الأول هي درجة الحدودية.
4. معامل الحد الأول هو المعامل الرئيس.

مثال: الصورة العامة $2x^4-5x^3+3x-9x+10$

درجة الحدودية: 4

المعامل الرئيس: 2

اكتب الفقرة السابقة باستعمال جمل قصيرة لتوضيح المفاهيم المهمة التي تتناول الحدوديات

ضمّن اشرح مثالاً يربط بين النص والرياضيات.

حاول

اقرأ الفقرة التالية وأعد كتابتها بأسلوبك.

تنص مبرهنة الجذر غير النسبي على أن الجذور غير النسبية لمعادلة معاملاتها أعداد نسبية، تكون مترافقة. فإذا عرفت، مثلاً ، أن $1+\sqrt{2}$ جذر من جذور المعادلة $x^3-x^2-3x-1=0$ تقول إن $1-\sqrt{2}$ هو أيضًا جذر من جذورها.

تذكَّر أن الأعداد الحقيقية نوعان: الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية. تستطيع استعمال مبرهنة الجذر النسبي ومبرهنة الجذر غير النسبي معًا، لإيجاد جميع جذور المعادلة $P(x)=0$.

1-4 الدوال الأسّية والنمو والتراجع
Exponential Functions, Growth and Decay

الأهداف
يكتب مقادير أسّية لتمثيل حالات النمو والتراجع، ويحسب قيم هذه المقادير.

المفردات Vocabulary
الدالّة الأسّية Exponetial function

الأساس Base

المقارب Asymptote

النمو الأسّي Exponential growth

التراجع الأسّي Exponential decay

من يستعمل هذا الأمر؟
يستطيع الذين يقتنون الأشياء النادرة أن يستعملوا الدوال الأسّية لإنشاء نموذج يمثّل قيمة الأشياء التي يقتنونها، كالآلات الموسيقية النادرة. (مثال 2)

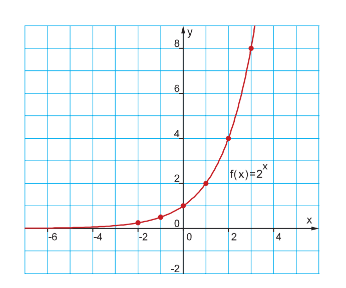
ينص قانون مور Moore، المستعمل في صناعة الحواسيب، على أن عدد الترانزيستورات التي تتضمّنها مكوّنات الحاسوب، يتضاعف كل سنة. يُبيّن الجدول أدناه أعدادًا تقريبية حول تزايد عدد الترانزيستورات التي يتضمّنها مكوّن منذ بدايات هذه الصناعة.

عدد الترانزيستورات في مكوّن							
السنة	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
العدد	60	120	240	480	960	1920	3840

$\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$

يُمكن تمثيل النمو الذي يتضاعف كل سنة باستعمال دالّة تتضمَّن المتغيّر في الأس. تُعرف مثل هذه الدوال **بالدوال الأسّية Exponential functions**. الدالّة الأم للدوالّ الأسّيّة هي الدالَّة $f(x)=b^x$ حيث **الأساس Base** b عدد ثابت، والأس x المتغيّر الحر.

الأساس ← $f(x)=b^x$ → الأس و $b>0, b\neq 1$



يُبيّن الرسم المقابل بيان الدالَّة الأسّية الأم $f(x)=2^x$. مجال هذه الدالَّة هو مجموعة الأعداد الحقيقية كاملة، في حين أن مداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\{y/y>0\}$.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

تـذكَّـر

في العلاقة $y=b^x$ ، y متغيّر تابع للمتغيّر x ، لأن قيمة y تتحدَّد بقيمة x .

لاحظ أن بيان الدالَّة يقترب أكثر فأكثر من المحور الأول كلما تناقصت قيم x . لاحظ أيضًا أن البيان لا يلمس المحور الأول ويبقى فوقه، لأن قيمة المقدار 2^x تبقى موجبة أيًّا تكن قيمة x . المحور الأول هو مقارب أفقي لبيان الدالَّة $f(x)=2^x$. **المقارب Asymptote** مستقيم يقترب منه بيان الدالّة أكثر فأكثر كلما أصبحت قيم x كبيرة جدًّا أو صغيرة جدًّا.

كل دالَّة $f(x)=ab^x$ ، حيث $a>0$ وَ $b>1$ هي دالة **نموّ أسّي Exponential growth** تتزايد قيمتها بتزايد قيمة x . أما إذا كان $0<b<1$ فالدالّة $f(x)=ab^x$ هي دالّة **تراجع أسّي Exponential decay** تتناقص قيمتها بتزايد قيمة x .

مثـــــال 1 رسم بيانات الدوال الأسّية

اذكر إن كانت الدالَّة دالَّة نمو أسّي أو دالَّة تراجع أسّي، ثم ارسم بيانها.

أ $f(x)=1.5^x$

الخطوة 1 جِد قيمة الأساس.

$f(x)=1.5^x$ الأساس، 1.5 أكبر من 1، الدالَّة هي دالَّة نمو أسّي.

الخطوة 2 ارسم بيان الدالَّة باستعمال جدول قيم.

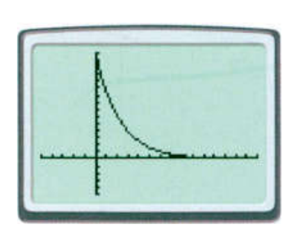
x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.4	0.7	1	1.5	2.3	3.4	5.1

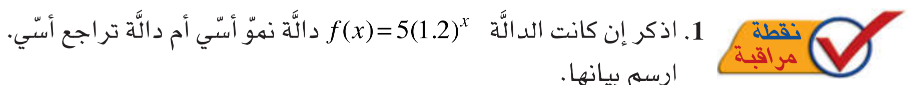
ب $f(x)=30(0.8)^x$

الخطوة 1 جِد قيمة الأساس.

$f(x)=30(0.8)^x$ الأساس، 0.8 أصغر من 1، الدالَّة هي دالَّة تراجع أسّي.

الخطوة 2 ارسم بيان الدالَّة باستعمال حاسبة بيانية.

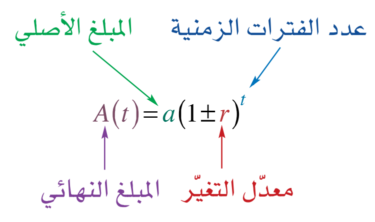




نقطة مراقبة

1. اذكر إن كانت الدالَّة $f(x)=5(1.2)^x$ دالَّة نموّ أسّي أم دالَّة تراجع أسّي. ارسم بيانها.

يُمكنك تمثيل النمو أو التراجع باستعمال النسبة المئوية الثابتة للنمو أو التراجع، وذلك باستعمال القاعدة التالية.



أساس الدالَّة أعلاه، $1+r$، يُسمّى **عامل النمو**، كما يُسمّى الأساس $1-r$ **عامل التراجع**.

من طالب إلى طالب — النمو والتراجع

عندما تتزايد قيمة دالّة بمعدل ثابت، مثل 7%، يعني أن أضربها في 7%+100%، أي في 107%. في الصورة العُشرية، أترجم ذلك إلى الضرب في 1+0.7، أي 1.07.

عندما تتناقص قيمة دالّة بمعدّل ثابت، مثل 12%، يعني أن أضربها في 12%−100%، أي في 88%. في الصورة العُشرية، أضرب في 1−0.12، أي 0.88.

مثـــــال 2 تطبيق على الاقتصاد

في العام 2000، اشترى كوفند غيتارًا نادرًا يعود إلى العام 1959، دفع ثمنه 12 مليون دينار. قدّر الخبراء أن قيمته تزداد بمعدل 14% سنويًا. جِد بيانيًا السنة التي يُصبح فيها ثمن الغيتار 60 مليون دينار.

الخطوة 1 اكتب دالَّة تشكّل نموذجًا لتغيُّر قيمة الغيتار.

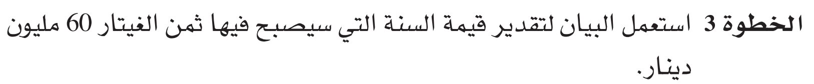
$f(t)=a(1+r)^t$ دالَّة نمو أسّي

$=12(1+0.14)^t$ عوّض عن a بقيمته 12، وعن r بقيمته 0.14

$=12(1.14)^t$

الخطوة 2 ارسم بيان الدالَّة.

عندما ترسم بيان دالَّة أسّية باستعمال الحاسبة البيانية، عليك تعديل مواصفات النافذة لكي تظهر النقطة التي ستستعملها.



الخطوة 3 استعمل البيان لتقدير قيمة السنة التي سيصبح فيها ثمن الغيتار 60 مليون دينار.

استعمل وظيفة TRACE لإيجاد قيمة t عندما $f(t)=60$.

تبلغ قيمة الدالَّة حوالي 60، عندما $t=12.29$. ستصل قيمة الغيتار إلى 60 مليون دينار بعد 12.29 سنة من شرائه، أي في العام 2012.

مساعدة

في الحاسبة البيانية، استعمل x بدل t:

$y_1=12\ 000 * 1.14 \wedge x$



نقطة مراقبة

2. كان عدد الحيتان المحدَّبة الأسترالية 350 حوتًا سنة 1981. وتزايد عددها بمعدل 14% سنويًا. اكتب دالَّة أسّية تشكّل نموذجًا لهذا التزايد، ثم ارسم بيان الدالَّة واستعمله لتحدد السنة التي سيبلغ فيها عدد هذه الحيتان 20 000 حوت.

مثـــــال 3 تطبيق على تراجع الثمن

تتناقص قيمة شاحنة، جديدة ثمنها 28 مليون دينار، بمعدَّل 9.5% سنويًا. اكتب دالَّة أسّية تشكّل نموذجًا لهذا التناقص. ثم ارسم بيان الدالَّة واستعمله لتحدِّد السنة التي سيبلغ فيها ثمن الشاحنة 5 ملايين دينار.

الخطوة 1 اكتب دالَّة تشكّل نموذجًا لتغيُّر قيمة الشاحنة.

$f(t)=a(1-r)^t$ دالَّة تراجع أسّي

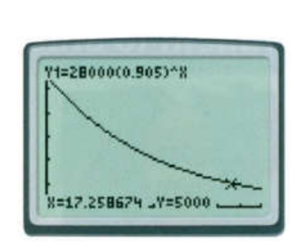
$=28(1-0.095)^t$ عوّض عن a بقيمته 28 ، وعن r بقيمته 0.095

$=28(0.905)^t$

الخطوة 2 ارسم بيان الدالَّة.

عندما ترسم بيان دالَّة أسّية باستعمال الحاسبة البيانية، عليك تعديل مواصفات النافذة لكي تظهر النقطة التي ستستعملها.

استعمل وظيفة TRACE لإيجاد قيمة t عندما $f(t)=5$.



الخطوة 3 استعمل البيان لتجد السنة التي سيصبح فيها ثمن الشاحنة 5 ملايين دينار.
تبلغ قيمة الدالَّة حوالي 5 عندما $t=17.3$. سيصبح ثمن الشاحنة 5 ملايين دينار بعد 17.3 سنة من شرائها.



3. يتناقص ثمن دراجة نارية ثمنها مليون دينار بمعدَّل 15% سنويًّا. اكتب دالَّة أسّية تشكِّل نموذجًا لهذا التناقص، ثم ارسم بيان الدالَّة واستعمله لتحدِّد متى يصبح ثمنها 100 ألف دينار.

فكر وناقش

1. استعمل حاسبة لتقارن بين القيمتين 1.01^{500} وَ 0.99^{500} . فسِّر ما توصَّلت إليه.
2. ناقش الفروق بين بيانيِ الدالَّتين $f(x)=1.1^x$ وَ $g(x)=0.9^x$. ما الذي يحدث لكل منهما عندما $x=0$ ؟
3. صِف الدالَّة $f(t)=a(1-r)^t$ عندما $0<r<1$ وَ $t>0$. صِف الدالَّة عندما $r<0$ وَ $t>0$.
4. **كن منظّمًا** انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. قارن بين النمو الأسّي والتراجع الأسّي.



$f(x)=ab^x$ حيث $a>0$	نمو	تراجع
قيمة b		
الهيئة العامة للبيان		
ما يحدث للدالَّة عندما يتزايد x		
ما يحدث للدالَّة عندما يتناقص x		

1-4 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** إذا كان الأساس في دالَّة أسّية عددًا بين 0 وَ 1، تكون الدالَّة دالَّة ـــ؟ـــ (نمو أسّي أو تراجع أسّي).

انظر المثال 1

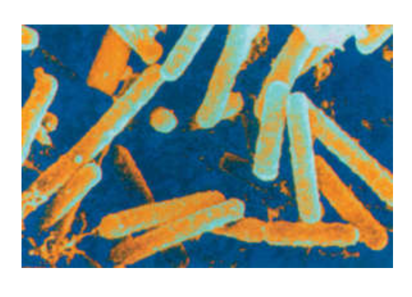
اذكر إن كانت الدالَّة دالَّة نمو أسّي أو دالة تراجع أسّي، ثم ارسم بيانها.

2 $f(x)=32(0.5^x)$
3 $f(x)=0.5(1.2^x)$
4 $f(x)=0.4\left(\frac{3}{4}\right)^x$

انظر المثال 2

5 **أحياء** يحتوي وعاء لزراعة البكتيريا على 150 بكتيريا من أحد الأنواع التي تتضاعف كل ساعة. قدّر عدد البكتيريا في الوعاء بعد 12 ساعة.

أ اكتب دالَّة تمثِّل تطوُّر عدد البكتيريا بدلالة الزمن.
ب ارسم بيان هذه الدالَّة.
ج استعمل البيان لتقدير عدد البكتيريا بعد 12 ساعة.



انظر المثال 3

6 **فيزياء** رميت كرة جديدة ناعمة الملمس على أرض صلبة من ارتفاع 120cm، فارتدت نحو الأعلى عدة مرات إلى ارتفاع بلغ في كل مرة $\frac{2}{5}$ الارتفاع الذي سبقه.

أ) اكتب دالَّة تمثِّل الارتفاع الذي بلغته الكرة في كل مرة.

ب) ارسم بيان هذه الدالّة.

ج) بعد كم مرة يقل ارتفاع الكرة عن 1 cm؟

تمارين وحلُّ مسائل

تمارين حرّة	
لحل التمارين	أنظر المثال
9–7	1
10	2
11	3

اذكر إن كانت الدالَّة دالَّة نمو أسّي أو دالَّة تراجع أسّي، ثم ارسم بيانها.

7 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ **8** $f(x)=\frac{1}{3}(1.3)^x$ **9** $f(x)=10(2.7)^x$

10 **قطارات** بلغت كمّية البضائع المنقولة بواسطة القطارات في الولايات المتحدة 580 مليار طن/ميل سنة 1960. وتزايدت هذه الكمّية بمعدل 2.32% سنويًّا منذ تلك السنة.

أ) اكتب دالَّة تمثِّل تطوُّر كمّية البضائع المنقولة بالقطارات سنويًّا (1960 = السنة 0).

ب) ارسم بيان هذه الدالَّة.

ج) في أي سنة ستزيد كمية البضائع المنقولة بالقطارات في الولايات المتحدة عن ألف مليار طن/ميل؟

11 **طب** تتناقص كمية الأنسولين المستعمل لتنظيم نسبة السكَّر في الدم بمعدل 5% تقريبًا كل دقيقة. تبلغ الكمية التي يحتاج إليها الجسم حوالي 10 وحدات.

أ) اكتب دالَّة تمثِّل كمّية الأنسولين المتبقية في الدم بدلالة الزمن، بعد حقن الجسم بعشر وحدات.

ب) ارسم بيان هذه الدالَّة.

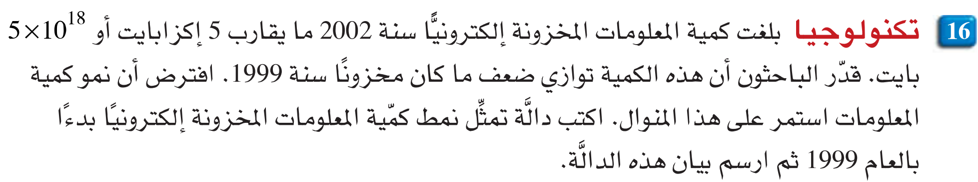
ج) قدّر كمّية الأنسولين المتبقية في الدم بعد 10 دقائق.

د) بعد كم دقيقة تهبط كمّية الأنسولين إلى النصف؟

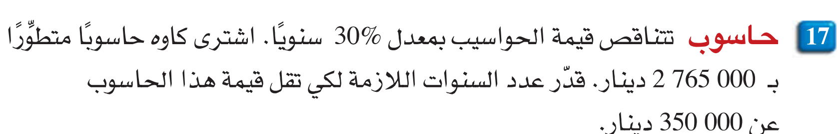
اذكر إن كانت الدالَّة دالَّة أسّية أم لا.

12 $f(x)=2(x)^{10}$ **13** $f(x)=0^x$ **14** $f(x)=1(0.5)^x$

15 في العام 1626، اشترت مجموعة من المهاجرين الألمان جزيرة منهاتن، التي تشكِّل اليوم جزءًا من مدينة نيويورك، مقابل بضائع قيمتها 24 دولارًا من دولارات ذلك العصر. افترض أن هذا المبلغ قد تم إيداعه حينها بفائدة مركَّبة نسبتها السنوية 3.5% . كم سيكون هذا المبلغ سنة 2008؟



16 **تكنولوجيا** بلغت كمية المعلومات المخزونة إلكترونيًّا سنة 2002 ما يقارب 5 إكزابايات أو 5×10^{18} بايت. قدّر الباحثون أن هذه الكمية توازي ضعف ما كان مخزونًا سنة 1999. افترض أن نمو كمية المعلومات استمر على هذا المنوال. اكتب دالَّة تمثِّل نمط كمّية المعلومات المخزونة إلكترونيًّا بدءًا بالعام 1999 ثم ارسم بيان هذه الدالَّة.



17 **حاسوب** تتناقص قيمة الحواسيب بمعدل 30% سنويًا. اشترى كاوه حاسوبًا متطوِّرًا بـ 000 765 2 دينار. قدّر عدد السنوات اللازمة لكي تقل قيمة هذا الحاسوب عن 000 350 دينار.

نافذة على تاريخ الرياضيات



ربما يعود اسم Manhattan إلى تركيب كلمتين من كلمات السكان الأصليين في أمريكا: كلمة Manah وتعني جزيرة وكلمة hatin وتعني غابة.

أكمل الجدول أدناه. قرّب القيم إلى أقرب جزء من مئة.

	x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
18	$f(x)=2.2^x$	■	■	■	■	■	■	■	■	■
19	$g(x)=0.4^x$	■	■	■	■	■	■	■	■	■

20 تسمح بعض بطاقات الاعتماد لحاملها بأن يصبح المبلغ A الذي يدين به حامل البطاقة بعد n شهرًا $A=P(1.015)^n$ ، حيث يرمز P إلى المبلغ المدفوع.

أ ارسم بيان هذه الدالَّة إذا كان المبلغ الأصلي مليون دينار.

ب كم يصبح المبلغ بعد سنة؟

ج متى يصل المبلغ إلى 000 300 1 دينار؟

21 **مبيعات** بلغت المبيعات الشهرية لأحد مربّي الدجاج حدَّها الأقصى 000 12 دجاجة في كانون الثاني. بينما تراجعت مبيعاته في الشهور التالية بمعدل 20% شهريًا.

أ كم دجاجة باع المربّي في الشهر السادس الذي تلى كانون الثاني؟

ب بعد كم شهر قلَّت مبيعات هذا المربّي عن 1000 دجاجة.

22 **مصارف** تستعمل المصارف قانونًا لحساب القيمة الآنية لمبلغ مودع. هذا القانون هو $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ ، حيث A المبلغ الآني، وَ P المبلغ الأصلي المودع، وَ r معدل الفائدة السنوي، وَ t المدة بالسنوات، وَ n عدد الفترات في السنة التي يتم فيها تذخير الحساب، أي حساب الفائدة وإضافتها إلى المبلغ المودع.
أودع خسرو 5 ملايين دينار بفائدة معدّلها السنوي 5%، بتذخير فصليّ (4 مرات في السنة).

أ كم ستكون قيمة المبلغ بعد 5 سنوات؟

ب متى يتجاوز المبلغ المودع العشرة ملايين دينار؟

ج **ماذا لو...؟** كم سيربح خسرو بعد 5 سنوات، لو أن تذخير الحساب تم شهريًّا وليس فصليًّا؟

23 **تفكير ناقد** ما إحداثيات النقطة المشتركة لبياني الدالَّتين $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ وَ $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ ؟

جِد المدى الذي يقابل المجال $[0, 10]$ لكلٍّ من الدوال التالية:

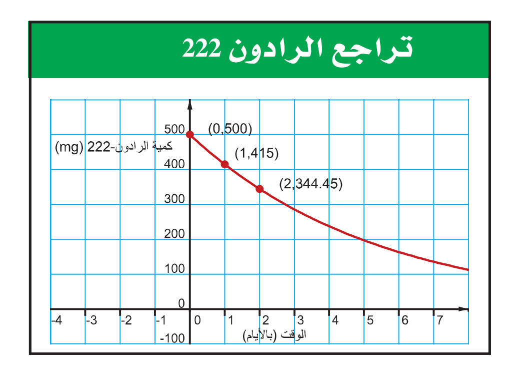
24 $f(x)=3^x-2^x$ **25** $f(x)=100(0.9)^x$ **26** $f(x)=\frac{3}{4}(2)^x$

27 **علم الأرض** الرادون-222 $(Radon-222)$ غاز يتسرَّب من الصخور والتربة. يُمكن لهذا الغاز أن يتراكم في العمارات، وأن يشكّل خطرًا على من يتنشقه. يتراجع الرادون − 222 ليصبح بولونيوم $(Polonium)$ أو رصاصًا.

أ جِد النسبة المئوية لتراجع الرادون−222 يوميًّا.

ب اكتب دالَّة أسّيّة تمثّل كمّية الرادون−222 المتبقية بعد t يومًا من كمية أصلية قدرها $500mg$.

ج كم يبقى من هذه الكمية بعد 14 يومًا؟



28 **تقدير** قُدِّر عدد سكان الأرض سنة 2000 بـ 6.1 مليار نسمة. كما قُدِّر معدل تزايدهم بـ 1.4% سنويًّا. قدِّرْ عدد سكان الأرض سنة 2020. اكتب دالَّة تمثِّل نمو عدد سكان الأرض بدلالة السنوات بعد العام 2000 (2000 = السنة 0)، واستعملها لتقارن تقديرك السابق مع ما تحسبه باستعمال الدالَّة.

29 **تفكير ناقد** أي المقدارين x^3 أو 3^x يتزايد أسرع بتزايد قيم x؟ أوضح ذلك.

30 **اكتب** صِف حالة يُمكن تمثيلها باستعمال دالَّة أسّية. اكتب الدالَّة موضحًا ما تمثِّله كل قيمة فيها.

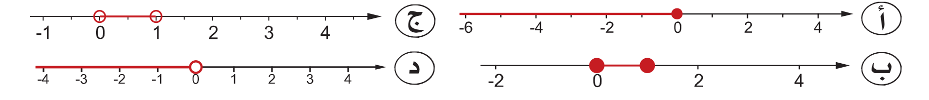


31 أي من الدوال التالية دالَّة تراجع أسّي؟

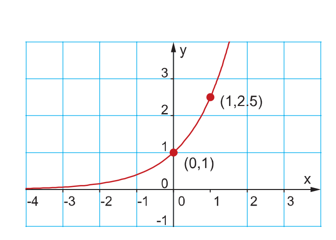
(أ) $f(x)=0.9(1.001)^x$ (ج) $f(x)=0.5(2)^x$

(ب) $f(x)=1.5\left(\frac{10}{11}\right)^x$ (د) $f(x)=\left(\frac{1}{0.5}\right)^x$

32 أي مما يلي يمثِّل قيم b عندما تكون الدالَّة $f(x)=ab^x$ دالَّة تراجع أسّي؟



33 **جواب مختصر** ما قيم a و b في الدالَّة $f(x)=ab^x$ ذات البيان المقابل؟



34 كان عدد سكان إحدى المدن 443 89 سنة 1990، وكان المعدَّل السنوي للزيادة 0.6% منذ تلك السنة. أي من الدوال التالية يمثِّل عدد سكان هذه المدينة بعد x سنة من 1990؟

(أ) $f(x)=89\ 443(1.6)^x$ (ج) $f(x)=89\ 443(1.06)^x$

(ب) $f(x)=89\ 443(1.006)^x$ (د) $f(x)=89\ 443(1.0006)^x$

تحدٍّ وتوسّع

35 **تفكير ناقد** تذكر أنك صنّفت الدوال الحدودية وفق درجاتها. لماذا لا تتحدث عن درجة دالَّة أسّية؟

حُلّ المتباينة بيانيًّا، مقرِّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة.

36 $1.15^x \geq 3$ **37** $0.97^x < 0.5$ **38** $5 < 1.5^x < 6$

39 قارن بين بيانَي الدالَّتين $y=2^x$ وَ $y=x^2$ عندما $-10 < x < 10$. ما عدد نقاط التقاطع؟ جِد إحداثيات هذه النقاط.

40 **أحياء** وجد الباحثون أن عدد حشرات البعوض في الأكر الواحد من منطقة باردة يبلغ، بعد انصهار الجليد، $10^{\frac{1}{2}d+2}$، حيث يمثِّل d عدد الأيام بعد انصهار الجليد. كم كان عدد حشرات البعوض في الأكر الواحد عند بدء انصهار الجليد؟ كم سيمضي من الوقت بعد انصهار الجليد، حتى يتضاعف عدد البعوض في الأكر الواحد؟ (الأكر وحدة مساحة تساوي $4\,047\text{m}^2$).

41 لماذا يقتصر مجال القيم الممكنة للأساس في الدالَّة $f(x)=b^x$ على $\{b / b>0;\ b\neq 1\}$؟

مراجعة لولبية

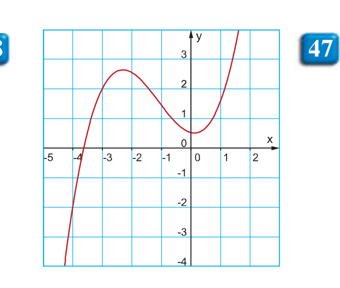
ارسم بيان الدالَّة باستعمال الحاسبة البيانية. حدِّد مجال الدالَّة ومداها والتحويل الذي يسمح برسم بيانها، انطلاقًا من بيان الدالَّة الأم. (الصفوف السابقة)

42 $f(x)=\sqrt{x-3}$ **43** $f(x)=-x^2+1$ **44** $f(x)=2x^3$ **45** $f(x)=x-4$

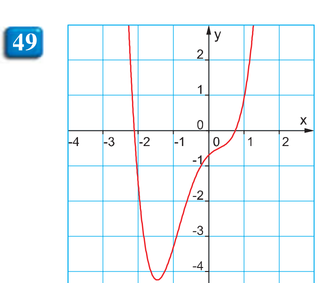
46 **تسلية** اشترى هقال وأخته شيرين ألعاب فيديو. اشترى هقال 3 ألعاب جديدة ولعبتين قديمتين ودفع 235 000 دينار، بينما اشترت شيرين لعبة جديدة واحدة وَ 4 ألعاب قديمة ودفعت 195 000 دينار. جِد ثمن كل لعبة جديدة وكل لعبة قديمة. (الصفوف السابقة)

في التمارين 47 – 49، يمثّل كل بيان دالّة حدودية. حدّد إن كانت درجة هذه الدالَّة فردية أو زوجية، وإن كان معاملها الرئيس موجبًا أو سالبًا. (الصفوف السابقة)

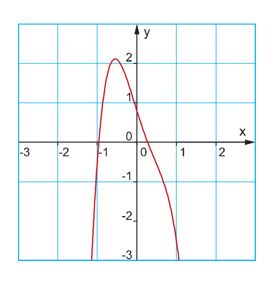
47



48



49





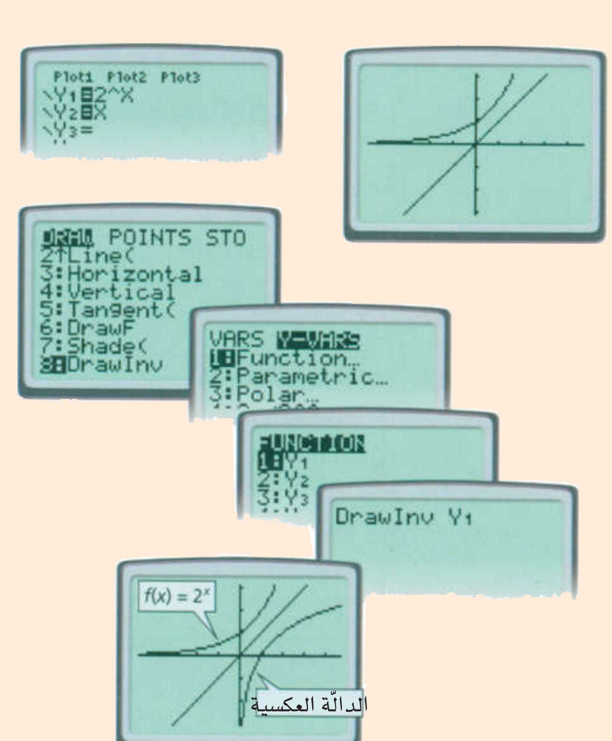
استكشاف الدوال العكسية

Explore Inverses of Functions

يُمكنك استعمال الحاسبة البيانية لاستكشاف الدالَّة العكسية وعلاقتها بالدالَّة الخطّية $f(x)=x$.

نشاط

سوف ترسم بيان الدالَّة $f(x)=2^x$ وبيان دالَّتها العكسية.



1. ارسم بيان الدالَّة $f(x)=2^x$ والمستقيم $y=x$ باستعمال الحاسبة البيانية واختيار النافذة العُشرية. لكي تُنجز ذلك، أدخل الدالَّتين ثم اضغط المفتاح ZOOM واختر **4: ZDecimal** .
2. استعمل وظيفة **DrawInv** للحصول على بيان العلاقة العكسية. تُنجز ذلك بالضغط على المفتاحين 2nd وَ PRGM . ثم اختر **8:DrawInv** . لكي تختار **Y1**، اضغط المفتاح VARS وتحرّك أفقيًّا حتى **Y-VARS** اختر **1: Function** ثم **1:Y1** واضغط، في النهاية، المفتاح ENTER .
تُبيّن الشاشة بيان الدالَّة الأصلية $f(x)=2^x$ وبيان العلاقة العكسية والمستقيم $y=x$. لاحظ أن العلاقة العكسية تبدو دالَّة مجالها $\{x/x>0\}$ ومداها $\mathbb{R}$.

حاول

ارسم بيان الدالَّة $f(x)=x^2$ وبيان الدالَّة $f(x)=x$.

1. قارن بين مجال الدالَّة $f(x)=x^2$ ومداها من ناحية، ومجال العلاقة العكسية ومداها من ناحية ثانية. هل العلاقة العكسية للدالّة $f(x)=x^2$ دالّة؟ برر جوابك.

ارسم بيان الدالّة $f(x)=x^3$ وبيان الدالّة $f(x)=x$.

2. قارن بين مجال الدالَّة $f(x)=x^3$ ومداها من ناحية، ومجال العلاقة العكسية ومداها من ناحية ثانية. هل العلاقة العكسية للدالَّة $f(x)=x^3$ دالَّة؟ برِّر جوابك.
3. **اكتب مقولة** اكتب مقولة حول العلاقة بين مجال الدالَّة ومداها من ناحية، ومجال العلاقة العكسية ومداها من ناحية ثانية.
4. **اكتب مقولة** اكتب مقولة حول العلاقة بين بيان الدالَّة وبيان الدالَّة العكسية.

2–4

الدالَّة العكسيّة
Inverse function



الأهداف

يُمثِّل بيانيًّا العلاقة العكسية لعلاقة ويميِّزها.
يجد الدالَّة العكسية لدالَّة.

لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

يُمكن استعمال الدالَّة العكسية لإيجاد ثمن سلعة قبل الحسم. (مثال 5).

المفردات
Vocabulary

العلاقة العكسية
Inverse relation

الدالَّة العكسية
Inverse function

تعلّمت في الصفوف الابتدائية أن الطرح عملية عكسية للجمع، أي إن تطبيق الطرح يُلغي نتائج تطبيق الجمع. مثال على ذلك: إذا جمعت 3 مع عدد a فإنّك تُلغي نتيجة هذا الجمع بطرح 3 من ناتج الجمع. والقسمة أيضًا عملية عكسية للضرب. فإذا ضربت عددًا a في 4 ثم قسمت ناتج الضرب على 4، تحصل على العدد a من جديد.

يُمكنك تطبيق عملية العكس على العلاقات والدوال. للحصول على التمثيل البياني **للعلاقة العكسية Inverse relation** لعلاقة ما، ارسم صورة بيان العلاقة بانعكاس حول المستقيم $y=x$ ، ذلك يعادل تبادل الأدوار بين الإحداثيين x وَ y في الزوج المرتَّب لكل نقطة من بيان العلاقة.

مثال 1 رسم بيان العلاقة العكسية.

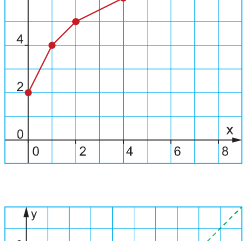
مثّل الدالّة وصلْ بين النقاط. ثم مثِّل العلاقة العكسية. حدّد مجال كل من العلاقتين ومداها.

x	0	1	2	4	8
y	2	4	5	6	7

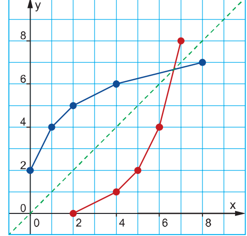
مثّل الجدول بنقاط، واربط بينها بخط مناسب.بادل بين الإحداثيين x وَ y في الزوج المرتّب لكل نقطة من بيان العلاقة.



x	2	4	5	6	7
y	0	1	2	4	8



ارسم صورة كل نقطة بالانعكاس حول المستقيم $y=x$ ، واربط بين النقاط التي حصلت عليها بخط مناسب.



مجال الدالّة: $\{x/0\le x\le 8\}$

مدى الدالّة: $\{y/2\le y\le 7\}$

مجال الدالّة العكسية: $\{x/2\le x\le 7\}$

مدى الدالّة العكسية: $\{y/0\le y\le 8\}$

تذكّر

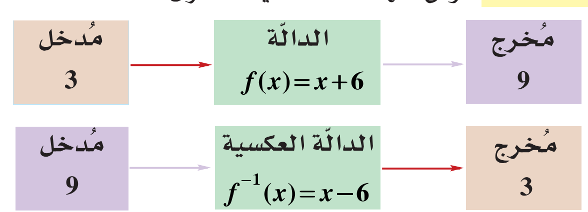
العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتَّبة.
الدالَّة هي علاقة ترتبط فيها كل قيمة لـ x بقيمة وحدة لـ y .



1. مثِّل الدالّة وصل بين النقاط، ثم مثِّل العلاقة العكسية. حدّد مجال كل من العلاقتين ومداها.

x	1	3	4	5	6
y	0	1	2	3	5

عندما تكون العلاقة دالّة، ارمز إلى علاقتها العكسية بـ $f^{-1}(x)$. لا تدل هذه الكتابة على مقلوب العدد $f(x)$. تُسمّى الدالّتان اللتان تُلغي كل منهما أثر الأخرى **دالّتين متعاكستين** **Inverse functions**، وكل منهما دالّة عكسية للأخرى.



لإيجاد الدالّة العكسية، استعمل العمليات المتعاكسة. بما أن الدالّة $f(x)$ تُضيف 6 إلى x فإنّ الدالّة العكسية $f^{-1}(x)$ تطرح 6 من x .

مثـــال 2 كتابة الدالّة العكسية باستعمال العمليات المتعاكسة.

استعمل العمليات المتعاكسة لإيجاد الدالّة العكسية للدالّة $f(x)=2x$.

$f(x)=2x$ تضرب الدالة $f(x)$ العدد x في 2.

$f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$ تقسم الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ العدد x على 2.

تحقَّق استعمل 7 كعدد مُدخل.

$f(x)=2x$

$f(7)=2(7)$ عوّض عن x بـالعدد 7.

$=14$

استعمل العدد الناتج كمُدخل للدالّة العكسية.

$f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$

$f^{-1}(14)=\frac{14}{2}$ عوّض عن x بـالعدد 14.

$=7$

ألغت الدالّة العكسية $f^{-1}(x)$ أثر الدالة $f(x)$.

نقطة مراقبة **2. استعمل العمليات المتعاكسة لإيجاد الدالّة العكسية لكل دالّة.**

أ $f(x)=\frac{x}{3}$

ب $f(x)=x+\frac{2}{3}$

مثـــال 3 كتابة الدالّة العكسية لدالّة متعددة الخطوات

استعمل العمليات المتعاكسة لإيجاد الدالّة العكسية للدالّة $f(x)=\frac{x}{4}-5$.

$f(x)=\frac{x}{4}-5$ تقسم الدالّة $f(x)$ العدد x على 4 ثم تطرح من الناتج العدد 5.

$f^{-1}(x)=4(x+5)$ عليك أن تلغي أثر طرح العدد 5. عليك إذن أن تبدأ بإضافة 5 إلى x. قم بعد ذلك بإلغاء أثر القسمة على 4 بضرب الناتج $x+5$ في 4.

تحقَّق استعمل مُدخلاً.

$f(40)=\frac{40}{4}-5=10-5=5$? $f^{-1}(5)=4(5+5)=4(10)=40$ ✓





نقطة مراقبة 3. استعمل العمليات المتعاكسة لإيجاد الدالّة العكسية للدالّة $f(x)=5x-7$.

يُمكنك إيجاد الدالّة العكسية عن طريق المبادلة بين x وَ y ، في قاعدة الدالّة، ثم حساب y بدلالة x .

مثـــال 4 كتابة الدالّة العكسية ورسم بيانها

ارسم بيان الدالّة $f(x)=3x+6$ ، ثم اكتب الدالّة العكسية وارسم بيانها.

$y=3x+6$ اكتب $y=f(x)$ وارسم بيان الدالّة $f(x)$.

$x=3y+6$ بادل بين x و y.

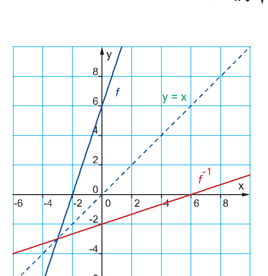
$x-6=3y$ احسب y بدلالة x.

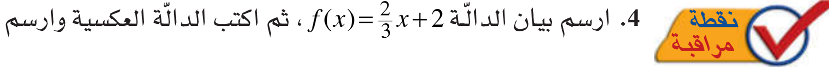
$\frac{x-6}{3}=y$

$y=\frac{x-6}{3}$ اكتب الدالّة العكسية على الصورة ... = y.

$f^{-1}(x)=\frac{x-6}{3}$ اكتب $y=f^{-1}(x)$.

$=\frac{1}{3}x-2$ بسّط ثم ارسم بيان الدالّة العكسية.




نقطة مراقبة

4. ارسم بيان الدالّة $f(x)=\frac{2}{3}x+2$ ، ثم اكتب الدالّة العكسية وارسم بيانها.

في كل مرة تريد فيها أن تُلغي عملية، تحرّك عائدًا أدراجك انطلاقًا من النتيجة وصولاً إلى المدخل الأصلي. يُمكنك في هذا المجال استعمال الدوال العكسية.

مثـــال 5 تطبيق تجاري

باع تاجر آلة تصوير بكلفة كليّة مقدارها 140 103 دينارًا. يشمل هذا المبلغ ثمن الآلة مضافًا إليه 3000 دينار ثمن ورقة هدية للتغليف قدّمها التاجر، وَ 8% قيمة الضريبة. لم تعجب الآلة الشاري، فعاد ليردّها. كيف يحسب البائع ما سيرد للشاري.

الخطوة 1 اكتب دالّة تمثِّل الكلفة بدلالة ثمن الآلة p .

$c(p)=1.08(p+3000)$ الكلفة كدالّة بدلالة ثمن الآلة.

الخطوة 2 اكتب الدالّة العكسية التي تمثِّل ثمن الآلة بدلالة الكلفة.

$c(p)=1.08(p+3000)$

$c(p)=1.08p+3240$ وزّع.

$c(p)-3240=1.08p$ اطرح 3240 من كل طرف.

$\frac{c(p)-3240}{1.08}=p$ اقسم لتعزل p .

الخطوة 3 احسب قيمة الدالّة العكسية عندما $c=103\,140$

$p=\frac{103\,140-3240}{1.08}=92\,500$

على التاجر أن يرد للشاري 500 92 دينار.

تحقَّق $c(p)=1.08(925\,00+3000)$ عوّض

$=1.08(95\,500)$

$=103\,140$

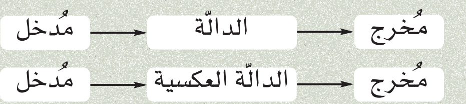
> **إضـاءة**
> عند حل مسائل واقعية، لا تبادل بين المتغيّر الحر والمتغيّر التابع، لأن لكل منهما دلالته الخاصة.


نقطة مراقبة

5. لتحضير الشاي، يُستعمل $\frac{1}{6}$ ملعقة من الشاي لكل كوب من الماء يُضاف إليها ملعقة واحدة للإبريق. استعمل الدالّة العكسية لتحديد عدد الأكواب في حال استعمال 7 ملاعق من الشاي.

فكِّرْ وناقش

1. فسِّر نتيجة المبادلة بين x وَ y لإيجاد الدالّة العكسية للدالّة $f(x)=x$.
كيف كنت لتتوقّع هذه النتيجة باستعمال بيان الدالّة $f(x)$؟
2. أعطِ مثالاً على دالّة علاقتها العكسية دالّة ومثالاً على دالّة علاقتها العكسية ليست دالّة.
3. علامَ تحصل عندما تجد الدالّة العكسية للدالّة العكسية لدالة $f(x)$؟
4. انسخ المخطَّط أدناه، ثم أكمله.
أعطِ مثالاً على دالّة $f(x)$، ومدخل ومخرج والدالّةالعكسية لِـ $f(x)$





2-4 التماريـن

تمـارين موجّهـة

1 **مـفـردات** عند المبادلة بين x وَ y، تكون النتيجة دومًا ____?____ عكسية (علاقة أو دالّة).

انظر المثال 1

ارسم بيان الدالّة الممثَّلة بالجدول، ثم ارسم بيان العلاقة العكسية. حدِّد مجال كل من العلاقتين ومداها.

2

x	1	2	3	4
y	1	2	4	8

3

x	3	4	1	−1
y	−1	−2	−4	−4

انظر المثال 2

استعمل العمليات المتعاكسة لكتابة الدالّة العكسية.

4 $f(x)=x+3$ **5** $f(x)=4x$ **6** $f(x)=\frac{x}{2}$ **7** $f(x)=x-2\frac{1}{2}$

انظر المثال 3

8 $f(x)=5x-1$ **9** $f(x)=\frac{x}{2}+3$ **10** $f(x)=3-\frac{1}{2}x$

11 $f(x)=\frac{1}{2}(3-3x)$ **12** $f(x)=4(x+1)$ **13** $f(x)=\frac{3x-5}{2}$

انظر المثال 4

ارسم بيان الدالّة، ثم جِد دالّتها العكسية، وارسم بيانها.

14 $f(x)=5-2x$ **15** $f(x)=\frac{x}{4}+2$ **16** $f(x)=10+0.6x$

انظر المثال 5

17 **أحوال جوية** تُستعمل الدالّة $C=\frac{5}{9}(F-32)$ لتحويل درجات الحرارة من مقياس فهرنهايت إلى المقياس المئوي. جد الدالّة العكسية التي تحوّل درجات الحرارة من المقياس المئوي إلى مقياس فهرنهايت. حوِّل $16°$ مئوية إلى درجات فهرنهايت.

تمـارين وحلُّ مسـائل

ارسم بيان الدالّة الممثَّلة بالجدول، ثم بيان العلاقة العكسية. حدِّد مجال كل من العلاقتين ومداها.

18

x	−1	2	3	5
y	1	3	5	5

19

x	−4	−2	0	2	4
y	−2	−1	0	1	2

لحل التمارين	انظر المثال
19–18	1
22–20	2
25–23	3
28–26	4
29	5

تمارين حرّة

استعمل العمليات المتعاكسة لكتابة الدالّة العكسية.

20 $f(x)=0.825x$ **21** $f(x)=x-1\frac{3}{4}$ **22** $f(x)=\frac{x}{0.25}$

23 $f(x)=21-32x$ **24** $f(x)=145+12.5x$ **25** $f(x)=\frac{1}{5}x+12$

ارسم بيان كل دالة، ثم جِد دالّتها العكسية وارسم بيانها.

26 $f(x)=\frac{4}{5}(x-15)$ **27** $f(x)=2-\frac{x}{3}$ **28** $f(x)=1.21x$

29 **تعليم** يقدّر نموذج خطّي أن عدد حملة البكالوريوس في إحدى الدول الكبرى يزداد 500 19 شخص سنويًّا. كان عدد حملة البكالوريوس 1.28 مليونًا سنة 2001. استعمل الدالة العكسية لتقدِّر كم سنة ستمرّ بعد عام 2001 ليصبح عددهم 1.7 مليونًا.

30 **تفكير ناقد** ارسم المستقيم المار في النقطتين (2,9) وَ (3,4) .



أ ما مَيل هذا المستقيم؟

ب ما مَيل المستقيم الذي يشكِّل بيان الدالّة العكسية؟

نافذة

فيزياء



بمقدور متسلّقي الجبال، عندما يكونون على ارتفاع شاهق عن سطح البحر، أنّ يشربوا الشاي وهو يغلي، لأنّ درجة حرارته ستكون منخفضة بما يسمح بذلك.

31 **فيزياء** تبلغ درجة غليان الماء على مستوى سطح البحر 100 درجة مئوية. تمثِّل الدالّة $f(x)=100-3.37x$ درجة غليان الماء على ارتفاع x km عن سطح البحر.



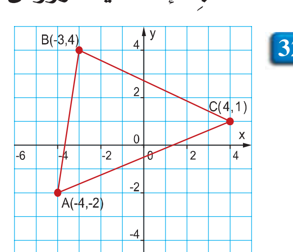
أ اكتب الدالّة العكسية.

ب على أي ارتفاع تصبح درجة غليان الماء أقل من 90 درجة مئوية؟ قرِّب الجواب إلى أقرب 10 m.

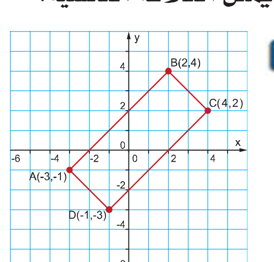
ج تبلغ درجة غليان الماء على قمة جبل لوتس في النيبال 71.3 درجة مئوية. ما ارتفاع هذه القمة بالأمتار عن سطح البحر؟

هندسة جِد إحداثيات رؤوس الشكل الهندسي الذي يمثِّل العلاقة العكسية.

32



33



34 **تفكير ناقد** ما العلاقة العكسية للدالّة $f(x)=3$؟ هل هذه العلاقة العكسية دالّة؟ أوضح ذلك.

35 **اكتب** في سباق اجتياز الأنابيب، قطع هلو 10 m خلال 12.59 ثانية. افترض أنّ هلو قطع المسافة بسرعة ثابتة. اكتب دالّة تمثِّل المسافة المقطوعة بدلالة الزمن. اكتب الدالّة العكسية واستعملها لحساب الزمن الذي يستغرقه قطع مسافة 25 m بالسرعة نفسها.

36 ثمن بطاقة الدخول إلى السيرك العالمي 000 22 دينار. إذا دفعت بواسطة بطاقة اعتماد يتقاضى السيرك مبلغًا إضافيًا قدره 3500 دينار، أيًّا يكن عدد البطاقات التي تشتريها.

أ اكتب دالّة تمثِّل ما تدفعه بواسطة بطاقة الاعتماد بدلالة عدد البطاقات المشتراة n.

ب اكتب الدالّة العكسية، واستعملها لكي تجد عدد البطاقات المشتراة بواسطة بطاقة الاعتماد علمًا بأن الكلفة كانت 500 157 دينار.

ج هل يمكن أن تكون كلفة شراء عدد من البطاقات بواسطة بطاقة الاعتماد 500 332 دينار؟

37 **خطأ في التحليل** وجد اثنان من الطلاّب الدالّة العكسية للدالّة $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ أيهما أخطأ؟ بيّن الخطأ.

أ	ب
$f(x)=\frac{1}{2}x+1$	$f(x)=\frac{1}{2}x+1$
$f^{-1}(x)=2(x-1)$	$f(x)=2x-1$



38 **اكتب** أوضح ما يحدث لدالّة وبيانها، عندما تتم المبادلة بين إحداثيَّي كل نقطة.

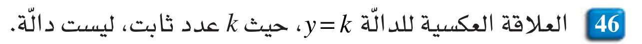
39 **تفكير ناقد** هل يمكن للعلاقة العكسية لعلاقة ليست بدالّة أن تكون دالّة؟ أوضح جوابك بمثال.

40 **قبّعات** قياس القبّعة دالّة خطّية بدلالة محيط الرأس. فقياس قبّعة لرأس محيطه 55 cm هو 17.5 وقياس قبّعة لرأس محيطه 57 cm هو 18 .

أ) اكتب قياس القبّعة s كدالّة خطّية بدلالة محيط الرأس c .

ب) جِد العلاقة العكسية . هل هي دالّة؟ ما تمثِّل؟

ج) وُجدت قبّعة قياسها 18.5. ما محيط رأس صاحبها؟



اذكر إن كانت المقولة صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا أو خطأ دائمًا.

41 عكس زوج مرتّب يمثِّل نقطة على بيان هو الزوج المرتّب الذي يمثِّل صورة النقطة بالانعكاس حول المستقيم $y=x$.

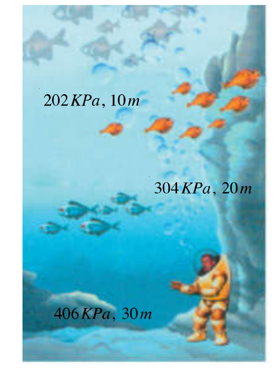
42 الدالّة العكسية لدالّة خطية هي دالّة خطّية.

43 الدالّة العكسية لدالّة خطّية مَيلها موجب، هي دالّة خطّية مَيلها سالب.

44 الدالّة العكسية لدالّة خطّية مَيلها أكبر من 1 هي دالّة خطّية مَيلها أصغر من 1.

45 عكس عكس نقطة هو النقطة نفسها.

46 العلاقة العكسية للدالّة $y=k$، حيث k عدد ثابت، ليست دالّة.



47 **غوص** من يمارس رياضة الغوص يعلم أن ضغط الماء (مقيسًا بالكيلو باسكال kpa) يزداد بازدياد العمق (مقيسًا بالأمتار) الذي يصل إليه الغواص. المعطيات في الشكل المقابل خاصة بالماء العذب.

أ) اكتب الضغط كدالّة بدلالة العمق .

ب) حدِّد مجال هذه الدالّة ومداها بشكل معقول.

ج) جدِ الدالّة العكسية للدالّة التي وجدتها في السؤال (أ).

د) هل يوجد عمق يتم التعبير عنده عن العمق والضغط بالعدد نفسه؟ أوضح جوابك.



تحضير للاختبار

48 أي مما يلي هو الدالّة العكسية للدالّة $f(x)=4x-\frac{3}{4}$ ؟

أ) $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}$

ب) $f^{-1}(x)=-\frac{1}{4}x+3$

ج) $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+3$

د) $f^{-1}(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}$

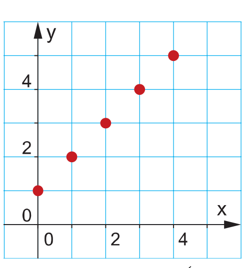
49 سيدفع هيمن لتصليح سيارته 000 175 دينار ثمنًا لقطع غيار، وَ 000 35 دينار عن كل ساعة استغرقها تصليح السيارة. تشكِّل الدالّة $f(x)=175\,000+35\,000x$ نموذجًا لحساب كلفة تصليح سيارة هيمن بدلالة عدد الساعات الذي يستغرقه إصلاحها. أي مما يلي يُعبر عما تعنيه الدالّة العكسية للدالّة السابقة؟

أ) عدد الساعات بدلالة الكلفة.
ج) أجر ساعة التصليح بدلالة الكلفة.
ب) الكلفة بدلالة عدد الساعات.
د) الكلفة بدلالة أجر ساعة التصليح.

50 أي نقطة عكسها النقطة $(5,-2)$؟

أ) $(-5,2)$
ب) $(5,2)$
ج) $(-2,5)$
د) $(2,-5)$

51 **جواب مختصر** أنشئ جدولا يُبيّن العلاقة العكسية للعلاقة التي يُمثِّلها الرسم البياني المقابل.



تحدٍّ وتوسّع

جِد الدالّة العكسية لكل دالّة، حيث $y=f(x)$.

52 $y=mx+b$
53 $ax+by=c$
54 $y-y_1=m(x-x_1)$

55 مثِّل بيانيًّا العلاقة المعرّفة بالجدول المقابل. ثم ارسم صورة كل نقطة بالانعكاس حول المستقيم $y=x$ لتحصل على التمثيل البياني للعلاقة العكسية. إذا كانت معادلة الدالّة الأصلية هي $y=x^2$ ، تحقَّق جبريًّا من أن معادلة العلاقة العكسية هي $x=y^2$.

x	y
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

56 **تفكير ناقد** ماذا تقول عن دالّة خطية تساوى مَيلها ومَيل دالّتها العكسية؟

ارسم بيان كل دالّة وبيان العلاقة العكسية.

57 $y=3$
58 $y=x^3$
59 $y=2^x$

مراجعة لولبية

60 **تجارة** تم شراء أسهم بمبلغ 180 45 دينارًا للسهم الواحد. يُبيّن الجدول المقابل التغيّرات في قيمة هذا السهم بعد الشراء. (الصفوف السابقة)

أ) رتِّب قيم هذا السهم من الأصغر إلى الأكبر، بما فيها قيمته في اليوم 0 ، وهو يوم شرائه.

ب) اكتب مدى القيم مستعملاً لغة المجموعات.

قيمة السهم	
اليوم	التغيّر في القيمة
1	−230
2	+2580
3	−640
4	+1270
5	−2120

اكتب الدالّة الحدودية من أدنى درجة ممكنة، والتي معاملها الرئيس 2 وأصفارها الأعداد المعطاة. (الصفوف السابقة)

61 $1 ، 2 ، -3$
62 $-\sqrt{5} ، \sqrt{5}$
63 $2 ، 1 ، -1$
64 $9 ، 8 ، -3$

اذكر إن كانت الدالّة دالّة نمو أو دالّة تراجع، ثم ارسم بيانها. (الدرس 4-1)

65 $f(x)=15\left(\frac{89}{100}\right)^x$
66 $f(x)=\frac{1}{25}(0.5^x)$
67 $f(x)=2(1.1^x)$
68 $f(x)=0.01(1.9^x)$

3-4 الدوال اللوغاريتمِيّة
Logarithmic functions



الأهداف

يكتب الصور المتكافئة للدوال الأسّية واللوغاريتمية.

يكتب الدوال اللوغاريتمية ويرسم بياناتها ويحسب قيمها.

المفردات
Vocabulary

اللوغاريتم
Logarithm

اللوغاريتم العادي
Common Logarithm

الدالّة اللوغاريتمية
Logarithmic Function

لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

تُستعمل اللوغاريتمات لقياس حموضة الماء (PH). (المثال 5).

كم مرة تُضاعف دينارًا واحدًا ليُصبح 8 دنانير؟ يُمكنك استعمال معادلة لتمثيل هذا الأمر. $1(2^x)=8$. قد تستطيع حل هذه المعادلة ذهنيًّا إذا تذكرت أن $2^3=8$. إذن، عليك مضاعفة الدينار الواحد 3 مرات للحصول على 8 دنانير.

كم مرة تُضاعف دينارًا واحدا ليُصبح 512 دينارًا؟ يُمكنك حل هذه المسألة إذا كنت قادرًا على حل المعادلة $2^x=512$ ، باستعمال العملية العكسية لعملية رفع عدد معيّن إلى قوة بأس معيّن. هذه العملية العكسية هي حساب اللوغاريتم. **اللوغاريتم** هو أس القوة التي ترفع إليها عددًا (أساسًا) معيّنًا لتحصل على قيمة مُعطاة.

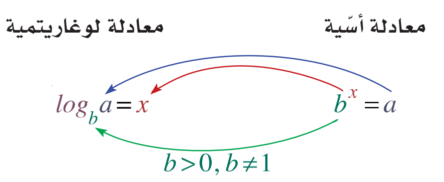


قــراءة

اقرأ $\log_b a=x$ كما يلي: x يساوي لوغاريتم a بأساس b.

لا حظ أن اللوغاريتم هو الأس.

يُمكنك كتابة معادلة أسية على صورة معادلة لوغاريتمية وبالعكس.



مثـــال 1 التحويل من الصورة الأسّية إلى الصورة اللوغاريتمية

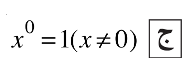
اكتب كل معادلة أسّية على الصورة اللوغاريتمية.

	المعادلة الأسّية	الصورة اللوغاريتمية	
أ	$2^6=64$	$\log_2 64=6$	أساس القوة يُصبح أساس اللوغاريتم.
ب	$4^1=4$	$\log_4 4=1$	أس القوة هو اللوغاريتم.
ج	$5^0=1$	$\log_5 1=0$	قوة أي عدد مختلف عن الصفر بأس صفر هي 1.
د	$5^{-2}=0.04$	$\log_5 0.04=-2$	قد يكون الأس (أو اللوغاريتم) سالبًا.
هـ	$3^x=81$	$\log_3 81=x$	قد يكون اللوغاريتم (أو الأس) متغيرًا.


نقطة مراقبة

1. اكتب المعادلة الأسّية على الصورة اللوغاريتمية.

أ $9^2=81$ ب $3^3=27$ ج $x^0=1 (x\neq0)$



مثـــال 2 التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسّية.

اكتب المعادلة اللوغاريتمية على الصورة الأسّية.

	المعادلة اللوغاريتمية	الصورة الأسّية
أ	$\log_{10} 100=2$	$10^2=100$
ب	$\log_7 49=2$	$7^2=49$
ج	$\log_8 0.125=-1$	$8^{-1}=0.125$
د	$\log_5 5=1$	$5^1=5$
هـ	$\log_{12} 1=0$	$12^0=1$

أساس اللوغاريتم يُصبح أساس القوة.

اللوغاريتم هو أس القوة.

قد يكون اللوغاريتم سالباً.



2. اكتب المعادلة اللوغاريتمية على الصورة الأسّية.

أ $\log_{10} 10=1$ ب $\log_{12} 144=2$ ج $\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$

اللوغاريتم أس. يسمح هذا الأمر بتطبيق قوانين القوى على اللوغاريتمات. ربما لاحظت الخصائص التالية في المثال الأخير.



بعض خصائص اللوغاريتمات

أيًّا يكن الأساس b حيث $b>0$ وَ $b\neq 1$.

الصورة اللوغاريتمية	الصورة الأسّية	مثال
لوغاريتم b بأساس b. $\log_b b=1$	$b^1=b$	$\log_{10} 10=1$ $10^1=10$
لوغاريتم 1 $\log_b 1=0$	$b^0=1$	$\log_{10} 1=0$ $10^0=1$

اللوغاريتم العادي لوغاريتم بأساس 10. إذا لم يُذكر أساس اللوغاريتم فهو 10. مثال: $\log 5=\log_{10} 5$

مثـــال 3 حساب قيمة لوغاريتم ذهنيًّا

احسب القيمة ذهنيًّا.

أ $\log 1000$

$10^? = 1000$

$10^3=1000$

$\log 1000=3$

ب $\log_4 \frac{1}{4}$

$4^? = \frac{1}{4}$

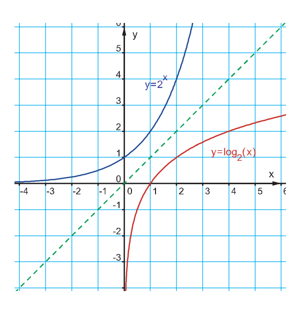
$4^{-1}=\frac{1}{4}$

$\log_4 \frac{1}{4}=-1$



3. احسب ذهنيًّا قيمة المقدار.

أ $\log 0.00001$ ب $\log_{25} 0.04$

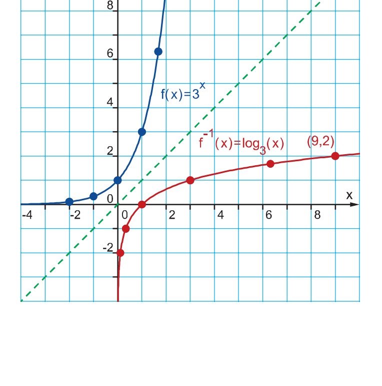


بما أن اللوغاريتم هو عكس الأسّ، فإن الدالّة العكسية لدالّة أسّية مثل $y=2^x$ ، هي دالّة لوغاريتمية مثل $y=\log_2 x$.
عليك أن تتذكَّر أن مجال كل من الدالّتين هو مدى الدالّة الأخرى، وأن مدى كل منهما هو مجال الأخرى.
مجال الدالّة $y=2^x$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية كاملة $\mathbb{R}$، ومداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\{y|y>0\}$. ينتج من ذلك أن مجال الدالّة اللوغاريتمية $y=\log_2 x$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\{x|x>0\}$ وأن مداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية كاملة $\mathbb{R}$.

مثـــال 4 رسم بيانات الدوال اللوغاريتمية

استعمل القيم المُعطاة للمتغيّر x لرسم بيان الدالّة، ثم ارسم بيان الدالّة العكسية. حدِّد مجال الدالّة العكسية ومداها.

أ $f(x)=3^x$ ؛ $x=-2,-1,0,1,2$



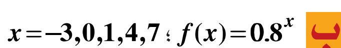
ارسم بيان الدالّة $f(x)=3^x$ باستعمال جدول القيم.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)=3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

لكي ترسم بيان الدالّة العكسية $f^{-1}(x)=\log_3 x$ ، بادل بين x وَ $f(x)$ في الجدول أعلاه.

$f(x)=3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
x	-2	-1	0	1	2

مجال الدالّة العكسية $f^{-1}(x)$ هو $\{x|x>0\}$ ومداها $\mathbb{R}$.



ب $f(x)=0.8^x$ ؛ $x=-3,0,1,4,7$

ارسم بيان الدالّة $f(x)=0.8^x$ باستعمال جدول القيم.

x	-3	0	1	4	7
$f(x)=0.8^x$	2	1	0.8	0.4	0.2

لكي ترسم بيان الدالّة العكسية $f(x)^{-1}=\log_{0.8} x$ ، بادل بين x وَ $f(x)$ في الجدول أعلاه.

$f^{-1}(x)=\log_{0.8} x$	2	1	0.8	0.4	0.2
x	-3	0	1	4	7

مجال الدالّة العكسية $f^{-1}(x)$ هو $\{x|x>0\}$ ومداها $\mathbb{R}$.

نقطة مراقبة



4. استعمل القيم $x=-2,-1,1,2,3$ لرسم بيان الدالّة $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$، ثم ارسم بيان الدالّة العكسية. حدِّد مجال الدالّة العكسية ومداها.

مثـــال 5 تطبيق على البيئة



يختبر الكيميائيون بشكل دوري عينّات من المطر لتحديد حموضته، أي تركيز أيونات الهيدروجين (H^+) فيه. تُقاس حموضة مياه الأمطار باستعمال الـ pH وفق الدالّة التالية: $pH = -\log[H^+]$ حيث يمثّل $[H^+]$ تركيز أيونات الهيدروجين مقيسًا بالمول في اللتر الواحد من ماء المطر.

جِد pH ماء المطر في كل موقع.

أ **الموقع A** حيث يبلغ تركيز أيونات الهيدروجين 0.0000316 مول في اللتر.

$$pH = -\log[H^+]$$

$$pH = -\log(0.0000316) \quad \text{عوّض.}$$

-log(.0000316)
4.500312917

استعمل حاسبة لإيجاد قيمة اللوغاريثم بأساس 10. استعمل المفتاح log . pH مياه الأمطار في الموقع A هو حوالي 4.5.

ب **الموقع B** حيث يبلغ تركيز أيونات الهيدروجين 0.0000009 مول في اللتر.

$$pH = -\log[H^+]$$

$$pH = -\log(0.0000009)$$

-log(.0000009)
6.045757491

استعمل حاسبة لإيجاد قيمة اللوغاريثم بأساس 10. استعمل المفتاح log . pH مياه الأمطار في الموقع B هو حوالي 6.



5. كم يبلغ pH شاي مثلج تركيز أيونات الهيدروجين فيه 0.000158 مول في اللتر؟

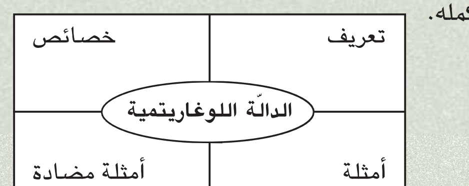
فكِّرْ وناقش

1. ما السبب الذي يجعل $\log_b b$ يساوي 1 أيًّا يكن العدد الموجب b المختلف عن 1؟

2. أوضح إن كان $\log_a b$ وَ $\log_b a$ متساويين. ادعم جوابك.



3. **كن منظّمًا** انسخ المخطّط المقابل ثم أكمله. اشرح الدوال اللوغاريتمية بأسلوبك.



3-4 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** اللوغاريتم في المعادلة الأسّية $a^x = b$ هو ___?___ . (a أو b أو x)

انظر المثال 1

اكتب المعادلة الأسّية على الصورة اللوغاريتمية.

2 $2.4^0 = 1$ **3** $4^{1.5} = 8$ **4** $10^{-2} = 0.01$ **5** $3^x = 243$

انظر المثال 2

اكتب المعادلة اللوغاريتمية على الصورة الأسّية.

6 $\log_4 0.0625 = -2$ **7** $\log_x(-16) = 3$ **8** $\log_{0.9} 0.81 = 2$ **9** $\log_6 x = 3$

انظر المثال 3

احسب كل قيمة ذهنيًا.

10 $\log_7 343$ **11** $\log_3 \frac{1}{9}$ **12** $\log_{0.5} 0.25$ **13** $\log_{1.2} 1.44$

انظر المثال 4

ارسم بيان الدالّة باستعمال القيم المُعطاة، ثم ارسم بيان الدالّة العكسية. حدِّد مجال الدالّة العكسية ومداها.

14 $f(x) = 5^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 1.5$ **15** $f(x) = 0.5^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 2$

انظر المثال 5

16 **كيمياء** لدراسة قوة الحمض في محلول، يستعمل الكيميائيّون الدالّة $pOH = -\log[OH^-]$ ، حيث يرمز $[OH^-]$ إلى تركيز أيونات الهيدروكسيد مقيسة بالمول في اللتر. ما قيمة pOH لماء بلغ تركيز أيونات الهيدروكسيد فيه 0.000000004؟

تمارين وحل مسائل

لحل التمارين	أنظر المثال
20–17	1
24–21	2
28–25	3
30–29	4
31	5

تمارين حرّة

اكتب المعادلة الأسّية على الصورة اللوغاريتمية.

17 $x^{2.5} = 32$ **18** $6^x = 216$ **19** $1.2^0 = 1$ **20** $4^{-1} = 0.25$

اكتب المعادلة اللوغاريتمية على الصورة الأسّية.

21 $\log_5 625 = 4$ **22** $\log_2 x = 6$ **23** $\log_{4.5} 1 = 0$ **24** $\log_\pi \pi = 1$

احسب كل قيمة ذهنيًا.

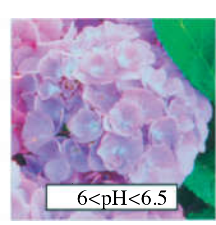
25 $\log_2 1$ **26** $\log 0.001$ **27** $\log_4 64$ **28** $\log_{0.1} 100$

استعمل القيم المُعطاة للمتغيّر x ، لرسم بيان الدالّة، ثم ارسم بيان الدالّة العكسية. حدِّد مجال الدالّة العكسية ومداها.

29 $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ **30** $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$

31 **حدائق** يتحدَّد لون أزهار الأورتانسيا وفقًا لقيمة pH التربة.


5<pH<5.5


6<pH<6.5


5.5<pH<6

قاس منسِّق الحديقة تركيز أيونات الهيدروجين في تربة الحديقة، ووجد أنه يساوي 0.0000006 مول في اللتر. هل تصلح هذه التربة للحصول على أزهار أورتانسيا زرقاء اللون؟

32 **بطاقات اعتماد** تستعمل في بعض بطاقات الاعتماد الدالّة $n=\frac{\log A-\log P}{\log(1.0175)}$ لحساب عدد الأشهر n التي مضت منذ إيداع المبلغ الأصلي P ، حتى بلوغ الحساب قيمته الحالية A ، بفرضية أنه لم يدخل الحساب أي مبلغ إضافي، ولم تُستعمل البطاقة خلال هذه الفترة.

أ) أودع آوات مبلغ 000 000 1 دينار، وأصبحت قيمة حساب البطاقة الآن 260 210 1 دينارًا. كم شهرًا مضى على إيداع المبلغ الأصلي؟

ب) كم شهرًا إضافيًّا يلزم هذا الحساب لتتجاوز قيمته 000 420 1 دينار؟

ج) ماذا تلاحظ على جوابَي السؤالين السابقين؟

33 **تفكير ناقد** ما قيمة b علمًا بأن $\log_a b=0$ ؟ أوضح ذلك.

34 **أصوات** يُقاس مستوى شدة الصوت L على مقياس لوغاريتمي باستعمال الدالّة $L=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ ، حيث يرمز L إلى مستوى شدَّة الصوت مقيسًا بالديسيبل Decibel ، ويرمز I إلى شدة الصوت، كما يرمز I_0 إلى شدة عتبة السمع.

الصوت	الشدّة
إقلاع طائرة	$10^{15}\,I_0$
ثاقب آلي	$10^{12}\,I_0$
مجفِّف شعر	$10^{7}\,I_0$
همس	$10^{3}\,I_0$
حفيف أوراق الشجر	$10^{2}\,I_0$
عتبة السمع	I_0

أ) حدِّد مستوى شدَّة كل صوت في الجدول المقابل.

ب) يبلغ مستوى شدَّة الصوت في أحد أنواع الموسيقى الصاخبة 110 ديسيبل. أين تضع هذا الصوت في الجدول ليبقى مرتَّبًا؟

ج) **ماذا لو...؟** الديسيبل عُشر وحدة قياس أخرى هي البل Bel. هل مستوى شدَّة صوت الطائرة أعلى من مستوى مستوى شدَّته 20 بل؟ أوضح ذلك.

35 **تفكير ناقد** إذا كان n عددًا صحيحًا وإذا كان 10^n مكتوبًا على الصورة الرقمية، فهل $\log 10^n$ يساوي عدد الأصفار في 10^n . أكِّد جوابك بمثال.

36 **تقدير** استند إلى أن $\log 100=2$ وَ $\log 1000=3$ لتقدير $\log 200$ وَ $\log 500$.

37 **غذاء** استعمل الجدول المقابل لتحديد نوع كل عصير بمعرفة تركيز أيونات الهيدروجين في لتر من هذا العصير.

العصير	مدى الـpH
الليمون	$2.0-2.6$
العنب	$2.9-3.2$
البرتقال	$3.3-4.1$
الرمان	$4.1-4.6$

أ) 0.00014 مول في اللتر.

ب) 0.0081 مول في اللتر.

ج) 0.00074 مول في اللتر.

38 **اكتب** ماالسبب الذي يجعل $\log_0 3$ وَ $\log_1 3$ غير مُعرَّفين؟



39 إلى أي دالّة يعود البيان المقابل؟

أ) $f(x)=\log x$

ب) $f(x)=\log_4 x$

ج) $f(x)=\log_2 x$

د) $f(x)=2^x$

40 أي من المعادلات اللوغاريتمية تكافئ $2^7 = 128$؟

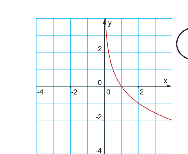
أ) $\log_7 2 = 128$ ج) $\log_2 7 = 128$

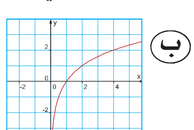
ب) $\log_2 128 = 7$ د) $\log_7 128 = 2$

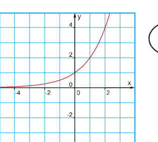
41 أي مما يلي أفضل تقدير لقيمة $\log 50$ ؟

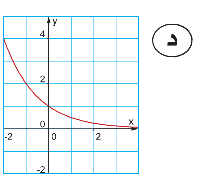
أ) 1.7   ب) 2.5   ج) 5   د) 10

42 أي من البيانات التالية أفضل تمثيل بياني للدالّة $f(x) = \log_{0.5} x$ ؟

أ) 

ب) 

ج)  

د) 

43 **جواب مختصر** ما قيمة $\log_2 64$ ؟

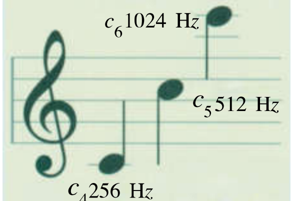
تحدٍّ وتوسّع

44 ارسم بيانَي الدالّتين $\log_7 x$ وَ $\log_{0.7} x$. صف الفروق بين الدالّتين، بالاستناد إلى بيانَيْهما.

45 احسب قيم $\log_3 9$ وَ $\log_3 27$ وَ $\log_3 243$. اكتب مقولة عن العلاقة بين هذه المقادير اللوغاريتمية الثلاثة. عمِّم باستعمال متغيّرات.

46 أثبت أن $\log_7 7^{2x+1} = 2x+1$ مبرِّرًا كل خطوة.

47 **موسيقى** مقياس الموسيقى مقياس لوغاريتمي. يُمكن التعبير في هذا المقياس عن تردد كل نوطة بعدد الترددات في الثانية، أو عدد الهيرتزات، بقوة من قوى العدد 2.



أ احسب تردُّد النوطة C_7 على الصورة الأسّية وعلى الصورة اللوغاريتمية.

ب ما النوطة التي يبلغ تردُّدها 32 هيرتزًا؟

مراجعة لولبية

اكتب المقدار على أبسط صورة مفترضًا أن قيم جميع المتغيّرات مختلفة عن الصفر.

(الصفوف السابقة)

48 $\left[\left(2a^4\right)\left(5b^2\right)\right]^2$ **49** $\dfrac{8s^2t^6}{4st^8}$

50 $-2t^2\left(5st^{-1}\right)$ **51** $7a^{-2}b^3\left(3ab + 4a^{-1}b^2\right)$

52 **إنشاءات** وقع حجر عن ارتفاع $7\ m$ نحو الأرض. استعمل الدالّة $h(t) = h_0 - 4.9t^2$ ، حيث يرمز h إلى ارتفاع الحجر بالأمتار، بعد t ثانية من سقوطه، ويرمز h_0 إلى ارتفاعه الأصلي بالأمتار قبل السقوط، لتحسب الزمن الذي استغرقه وصول الحجر إلى الأرض. (الصفوف السابقة)

أكمل جدول القيم لكل دالّة، مُقرِّبًا القيم إلى أقرب جزء من مئة.

	x	-2	-1	0	1	2
53	$f(x) = 1.7^x$					
54	$f(x) = 0.6^x$					
55	$f(x) = 0.3^x$					

الفصل 4



اختبار جزئي

1-4 الدوال الأسّية والنمو والتراجع

اذكر إن كانت الدالّة دالّة نمو أو دالّة تراجع. ارسم بيانها.

1. $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$
2. $f(x)=\frac{1}{5}(0.2)^x$
3. $f(x)=14(1.4)^x$
4. $f(x)=6.4\left(1\frac{3}{8}\right)^x$

5. افترض أن عدد البكتيريا في زرع بيولوجي بلغ 1000 يوم الإثنين، وأن عددها يتكاثر بنسبة 50% يوميًّا منذ ذلك الوقت.
   - أ) اكتب دالّة تمثِّل نمو عدد هذه البكتيريا بدلالة الزمن محسوبًا بالأيام.
   - ب) ارسم بيان الدالّة التي كتبتها، واستعمله لتقدير عدد البكتيريا يوم الإثنين التالي.

2-4 العلاقة العكسية والدالّة العكسية

مثِّل بيانيًا العلاقة الممثَّلة بالجدول، ثم مثِّل بيانيًا العلاقة العكسية.

6.

x	−1	0	1	2	3
y	0	4	8	12	16

7.

x	0	1	2	3	4
y	−1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$1\frac{2}{3}$

ارسم بيان كل دالّة. اكتب الدالّة العكسية، وارسم بيانها.

8. $f(x)=x+2.1$
9. $f(x)=\frac{3}{4}-x$
10. $f(x)=5x+4$
11. $f(x)=0.4\left(\frac{x}{2}+1.5\right)$

12. تتضمن كلفة إصلاح حاسوب ميران 210 000 دينار ثمن قطع غيار، وَ 55 000 دينار، أجرًا لكل ساعة عمل. تُشكِّل الدالّة $f(x)=55\,000x+210\,000$ نموذجًا لحساب كلفة إصلاح الحاسوب بدلالة عدد الساعات التي استغرقها إصلاحه. جِد الدالّة العكسية، واستعملها لكي تجد عدد الساعات التي استغرقها إصلاح حاسوب ميران، علمًا بأن الكلفة بلغت 402 500 دينار.

3-4 الدوال اللوغاريتمية

اكتب كلّ معادلة أسّية على الصورة اللوغاريتمية.

13. $3^2=9$
14. $17.6^0=1$
15. $2^{-2}=0.25$
16. $0.5^x=0.0625$

اكتب كلّ معادلة لوغاريتمية على الصورة الأسّية.

17. $\log_4 64=3$
18. $\log_{\frac{1}{5}} 25=-2$
19. $\log_{0.99} 1=0$
20. $\log_a x=5$

21. ارسم بيان الدالّة $f(x)=\left(\frac{5}{6}\right)^x$ باستعمال القيم التالية لـ $x=-1, 0, 2, 3$. ارسم بيان الدالة العكسية.



4-4 خصائص اللوغاريتم
Properties of Logarithm

الأهداف
يستعمل خصائص اللوغاريتم لكتابة المقادير اللوغاريتمية على أبسط صورة.
يُحوّل من لوغاريتم بأساس معيّن إلى لوغاريتم بأساس آخر.

من يستعمل هذا الأمر؟
يستعمل علماء الزلازل اللوغاريتم لحساب الطاقة التي تُطلقها الزلازل. (المثال 6).

يُمكن التعبير عن الدالّة اللوغاريتمية $pH=-\log\left[H^+\right]$ لحساب الـ pH التي تعرفت عليها في الدرس السابق، على الصورة الأسّية التالية: $10^{-pH}=\left[H^+\right]$. بما أن اللوغاريتم هو الأسّ، فإن خصائص القوى تولّد خصائص اللوغاريتم.

تذكَّر: لكي تضرب قوتين لهما الأساس نفسه، تجمع الأسّين: $b^m\,b^n=b^{m+n}$



اعلم و احفظ — **خاصّية لوغاريتم ناتج الضرب**

أيًّا يكن العددان الموجبان m وَ n ، وأيًّا يكن العدد الحقيقي $b\,(b>0$ وَ $b\neq1)$.

بالكلمات	بالأعداد	في الجبر
لوغاريتم ناتج الضرب يساوي مجموع لوغاريتمات العوامل.	$\log_3 1000=\log_3(10\times100)$ $=\log_3 10+\log_3 100$	$\log_b(mn)=\log_b(m)+\log_b(n)$

يُمكن استعمال الخاصية أعلاه في الاتجاه المعاكس لكتابة مجموع لوغاريتمات لها الأساس نفسه كلوغاريتم واحد على أبسط صورة.

مثال 1 جمع اللوغاريتمات

اكتب المقدار كلوغاريتم وحيد. بسّط إن كان ذلك ممكنًا.

$\mathbf{\log_4 2+\log_4 32}$

$\log_4(2\times32)$ لجمع اللوغاريتمين، اضرب العددين.

$\log_4 64$ بسّط

3 فكّر $4^?=64$



نقطة مراقبة

1. اكتب المقدار كلوغاريتم واحد. بسّط إن كان ذلك ممكنًا.

أ $\log_5 625+\log_5 25$

ب $\log_{\frac{1}{3}} 27+\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$

تذكَّر: لكي تقسم قوتين لهما الأساس نفسه، تطرح الأسّين $\frac{b^m}{b^n}=b^{m-n}$.
بما أن اللوغاريتم أس، فإن طرح لوغاريتمين لهما الأساس نفسه ما هو إلا إيجاد لوغاريتم ناتج قسمة قوتين لهما الأساس نفسه.



خاصية لوغاريتم ناتج القسمة

أيًّا يكن العددان الموجبان m وَ n وأيًّا يكن b $(b>0$ وَ $b\neq 1)$.

بالكلمات	بالأعداد	في الجبر
لوغاريتم ناتج القسمة هو ناتج طرح لوغاريتم المقسوم عليه من لوغاريتم المقسوم.	$\log_5\left(\frac{16}{2}\right)=\log_5(16)-\log_5(2)$	$\log_b\left(\frac{m}{n}\right)=\log_b(m)-\log_b(n)$

انتبه!

كما أنك لا تستطيع تبسيط $a^5 b^3$ كذلك لا تستطيع تبسيط مقدار لوغاريتمي إذا كانت الأسس مختلفة.

مثال 2 طرح اللوغاريتمات

اكتب $\log_2 32-\log_2 4$ كلوغاريتم وحيد، وبسّط إن أمكن.

أ $\log_2 32-\log_2 4$

$\log_2\left(\frac{32}{4}\right)$ لطرح اللوغاريتمين، اقسم العددين.

$\log_2(8)$ بسّط.

3 فكّر $2^? = 8$



2. اكتب $\log_7 49-\log_7 7$ كلوغاريتم وحيد إن أمكن. وبسّط إن كان ذلك ممكنًا.

بما أن من الممكن حساب لوغاريتمات ناتج الضرب، فيمكن حساب لوغاريتمات القوى.



خاصية لوغاريتم القوة

أيًّا يكن العددان الموجبان a وَ b حيث $b\neq 1$ وأيًّا يكن العدد الحقيقي p.

بالكلمات	بالأعداد	في الجبر
لوغاريتم قوة هو ناتج ضرب أسّ القوة في لوغاريتم أساسها.	$\log 10^3$ $\log(10\times10\times10)$ $\log 10+\log 10+\log 10$ $3\log 10$	$\log_b a^p = p\log_b a$

مثال 3 تبسيط لوغاريتمات القوى

اكتب المقدار على صورة ناتج ضرب. بسّط إن كان ذلك ممكنًا.

أ $\log_3 81^2$

$2\log_3 81$

$2(4)$ لأن $\log_3 81=4$

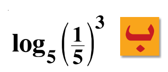
8 $\quad 3^4=81$

ب $\log_5\left(\frac{1}{5}\right)^3$

$3\log_5\frac{1}{5}$

$3(-1)$ لأن $5^{-1}=\frac{1}{5}$

-3





3. اكتب كل مقدار على صورة ناتج ضرب. بسّط إن كان ذلك ممكنًا.



أ $\log 10^4$ ب $\log_5 25^2$ ج $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^5$

بما أن عمليتي القوة واللوغاريتم عمليتان متعاكستان، فإن كلا منهما تُلغي نتيجة الأخرى.

اعلم و احفظ

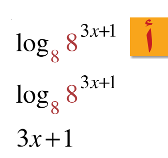
الخصائص المتعاكسة للقوة واللوغاريتم

أيًّا يكن الأساس b حيث $b>0$ وَ $b\neq 1$.

في الجبر	مثال
$\log_b b^x = x$	$\log_{10} 10^7 = 7$
$b^{\log_b x} = x$	$10^{\log_{10} 2} = 2$

مثـــال 4 تعرّف المتعاكسات

اكتب المقدار على أبسط صورة.



أ $\log_8 8^{3x+1}$

$\log_8 8^{3x+1}$

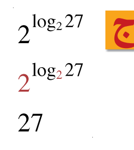
$3x+1$



ب $\log_5 125$

$\log_5 5^3$

3



ج $2^{\log_2 27}$

$2^{\log_2 27}$

27

نقطة مراقبة





4. أ اكتب $\log 10^{0.9}$ على أبسط صورة. ب اكتب $2^{\log_2(8x)}$ على أبسط صورة.

تحسب أكثرية الحاسبات اللوغاريتم العادي (أساس 10) أو اللوغاريتم الطبيعي (أساس e). انظر الدرس 4 – 5). يُمكنك تحويل اللوغاريتم من أساس إلى آخر باستعمال القانون التالي:

اعلم و احفظ

قانون تغيير أساس اللوغاريتم

أيًّا يكن الأساس الموجب a حيث $a\neq 1$ ، وأيًّا يكن الأساس الموجب b حيث $b\neq 1$.

في الجبر	مثال
$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$	$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4}$

مثـــال 5 تغيير أساس اللوغاريتم

احسب قيمة $\log_4 8$.

طريقة أولى تغيير الأساس إلى 10.

$\log_4 8 = \frac{\log 8}{\log 4}$

$\approx \frac{0.0903}{0.602}$ استعمل الحاسبة

$= 1.5$

طريقة ثانية تحويل الأساس إلى 2

لأن 4 وَ 8 هما من قوى العدد 2.

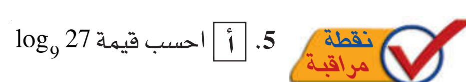
$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$

$= 1.5$

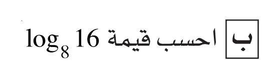
إضـــاءة

تذكّر $\log j + \log a + \log m$
$= 1ogjam$

نقطة مراقبة



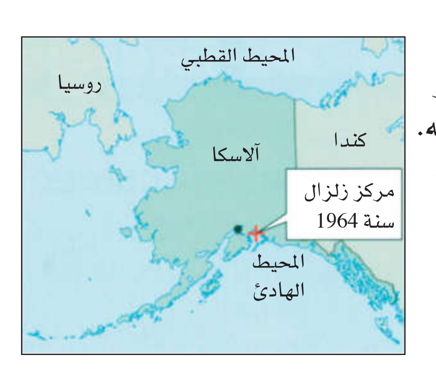
5. أ احسب قيمة $\log_9 27$



ب احسب قيمة $\log_8 16$

يُستعمل السلّم اللوغاريتمي لقياس كميات تنتمي قيمها إلى مجال واسع جدًّا، مثل شدّة الصوت ومستوى شدّته، أو الطاقة التي تطلقها الزلازل.

مثـــــال 6 تطبيق في الجيولوجيا



يستعمل المختصون بدراسة الزلازل مقياس ريختر للتعبير عن الطاقة التي يطلقها زلزال، أو عن قوته. تربط بين قوة زلزال M والطاقة E التي يُطلقها، علاقة هي $M=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$. سنة 1964 ضرب زلزال بقوة 9.2 درجات على مقياس ريختر، آلاسكا بأميركا الشمالية. جِد كمية الطاقة التي أطلقها هذا الزلزال.

إضـــاءة

مقياس ريختر مقياس لوغاريتمي. لذا فإن كل زيادة 1 على هذا المقياس تقابل إطلاق طاقة مضاعفة 10 مرات.

$9.2=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$	عوّض.
$\left(\frac{3}{2}\right)9.2=\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$	اضرب كل طرف في $\frac{3}{2}$
$13.8=\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$	بسّط.
$13.8=\log E-\log 10^{11.8}$	استعمل خاصية لوغاريتم ناتج القسمة.
$13.8=\log E-11.8$	استعمل تعاكسية القوة واللوغاريتم.
$25.6=\log E$	
$10^{25.6}=E$	استعمل تعريف اللوغاريتم.
$3.98\times10^{25}=E$	استعمل حاسبة.

بلغت الطاقة التي أطلقها هذا الزلزال 3.98×10^{25} إرغز (ergs) .



6. زلزالان بلغت قوتهما 9.2 درجات و8 درجات على مقياس ريختر. كم ضعفًا من طاقة الزلزال الثاني أطلق الزلزال الأوّل؟

فكر وناقش

1. كيف ترسم بيان الدالّة $y=\log_5 x$ باستعمال الحاسبة البيانية؟
2. كيف وجدت $10^{25.6}$ في المثال 6 باستعمال خصائص القوى؟
3. ما الذي يحدث عندما تطبِّق قانون تغيير الأساس $\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$ عندما $x=a$ ؟
4. **كن منظّمًا** انسخ الجدول المقابل ثم أكمله. بيّن بأسلوبك الخصائص المترابطة للقوى واللوغاريتم.



خاصّية القوى	خاصّية اللوغاريتم

4-4 التمارين

تمارين موجّهة

انظر المثال 1

اكتب المقدار كلوغاريتم وحيد. بسّط إن كان ذلك ممكنًا.

1 $\log_5 50 + \log_5 62.5$ 2 $\log 100 + \log 1000$ 3 $\log_3 3 + \log_3 27$

انظر المثال 2

اكتب المقدار كلوغاريتم وحيد. بسّط إن كان ذلك ممكنًا.

4 $\log_4 320 - \log_4 5$ 5 $\log 5.4 - \log 0.054$ 6 $\log_6 496.8 - \log_6 2.3$

انظر المثال 3

بسّط إن كان ذلك ممكنًا.

7 $\log_8 8^2$ 8 $\log_3 3^5$ 9 $\log_7 49^3$ 10 $\log_{\frac{1}{2}} (0.25)^4$

انظر المثال 4

11 $\log_2 2^{2^{x+5}}$ 12 $2.5^{\log_{2.5} 19}$ 13 $\log_4 1024$ 14 $\log_2 (0.5)^4$

انظر المثال 5

احسب قيمة المقدار.

15 $\log_9 \left(\frac{1}{27}\right)$ 16 $\log_8 32$ 17 $\log_5 10$ 18 $\log_2 27$

انظر المثال 6

19 **جيولوجيا** تربط بين قوة زلزال M والطاقة E التي يُطلقها علاقة هي $M = \frac{2}{3} \log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$. كم ضعفًا من طاقة زلزال تيجون أطلق زلزال نيو مدريد 1811؟

أهم الزلازل في أمريكا الشمالية

الموقع	السنة	M
نيو مدريد	1811	8.1
نيو مدريد	1812	8.0
فورت تيجون	1957	7.9
سان فرانسيسكو	1906	7.8
وادي الأباطرة	1892	7.8

تمارين وحل مسائل

لحل التمارين	أنظر المثال
تمارين حرّة	
22-20	1
25-23	2
28-26	3
31-29	4
34-32	5
35	6

اكتب المقدار كلوغاريتم وحيد. بسّط إن كان ذلك ممكنًا.

20 $\log_8 4 + \log_8 16$ 21 $\log 2 + \log 5$ 22 $\log_{2.5} 3.125 + \log_{2.5} 5$

23 $\log 1000 - \log 100$ 24 $\log_2 16 - \log_2 2$ 25 $\log_{1.5} 6.75 - \log_{1.5} 2$

بسّط إن كان ذلك ممكنًا.

26 $\log_2 16^3$ 27 $\log (100)^{0.1}$ 28 $\log_5 125^{\frac{1}{3}}$

29 $\log_3 3^{7+x}$ 30 $3^{\log_3 4.52}$ 31 $\log_9 6561$

احسب قيمة المقدار.

32 $\log_{\frac{1}{2}} 16$ 33 $\log_{25} 125$ 34 $\log_4 9$

35 **صوت** بعد عدة شكاوى، تبيّن أن صوت الموسيقى في المهرجانات التي تُقام في العراء يرتفع مستوى شدتها 5 ديسيبل عن الحد المسموح به وهو 100 ديسيبل. يُحسب مستوى شدة الصوت باستعمال العلاقة $L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$، حيث يرمز I إلى شدة الصوت ويرمز I_0 إلى شدة عتبة السمع. كم ضعفًا من شدة الحد المسموح به تساوي شدة صوت الموسيقى في المهرجانات التي تقام في العراء؟

Rho oph
$(m=5.0, M=-0.4)$
Sigma sco
$(m=2.9)$
Antares
$(m=1.0, M=-5.3)$

إضاءة

الفرسخ النجميّ هو وحدة قياس تعادل 3.3 سنوات ضوئية.

36 **فلك** يُقاس الفرق بين السّطوع الظاهر m لنجم وسطوعه الحقيقي M باستعمال العلاقة $m-M=5\log\frac{d}{10}$ حيث يرمز d إلى المسافة بين النجم والأرض مقيسة بالفرسخ النجميّ Parsec

أ) جِد بعد النجم أنتاريس Antares عن الأرض.

ب) يبعد النجم سيغماسكو Sigma Sco عن الأرض 225 فرسخًا نجميًّا. ما السطوع الحقيقي لهذا النجم؟

ج) كم ضِعفًا يبلغُ بعد النجم أنتاريس عن الأرض قياسًا على بُعد النجم رو أوف Rho Oph عنها؟

اكتب المساواة الأسّية على الصورة اللوغاريتمية.

37 $b^{m+n}=b^m b^n$ **38** $b^{m-n}=\frac{b^m}{b^n}$ **39** $(b^m)^n=b^{mn}$

بسّط إن كان ذلك ممكنًا.

40 $\log_2 32-\log_2 128$ **41** $\log 0.1+\log 1+\log 10$ **42** $2-\log_{11} 121$

43 $\log_{\frac{1}{2}} 2+\log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}}$ **44** $7^{\log_7 7}-\log_7 7^7$ **45** $\frac{10^{\log 10}}{\log 10^{10}}$

46 **تفكير ناقد** استعمل خصائص اللوغاريتم، والقيمة $\log 2\approx 0.301$ ، لتحسب:

أ) $\log 20$ ب) $\log 200$ ج) $\log 2000$

47 **كيمياء** يوصي الخبراء بأن يكون pH الماء في أحواض السباحة بين 7.0 وَ 7.6. استعمل العلاقة $pH=-\log[H^+]$ لتكتب مقدارا يُعبّر عن الفرق في تركيز أيونات الهيدروجين العائد إلى قيمتَي pH المذكورتين.

48 **خطوات متعددة** في موقع معيّن، يعيش 143 حيوانًا من نوع معرَّض للانقراض، ويتناقص عددها بنسبة 4% سنويًّا.

أ) اكتب دالّة أسّية تمثّل عدد الحيوانات في الموقع، بدلالة عدد السنوات.

ب) اكتب دالّة لوغاريتمية تمثّل عدد السنوات بدلالة عدد الحيوانات.

ج) اكتب سلسلة المفاتيح التي تستعملها لإدخال الدالّة اللوغاريتمية في الحاسبة البيانية.

د) بعد كم سنة يقلّ عدد الحيوانات في هذا الموقع عن 30؟ قرّب إلى أقرب سنة.

49 **تمويل** يرتفع سعر مُنتَج ثمنه 40 000 دينار بمعدل 8% سنويًّا. اكتب مقدارًا لوغاريتميًّا، واستعمله لتحدِّد عدد السنوات الضرورية لكي يصل سعر المنتج إلى 50 000 دينار. (مساعدة: ابدأ بكتابة المقدار على الصورة الأسّية).

50 يدفع أحد المصارف لمودعيه فائدة نسبتها السنوية 19.2% تُحتسب شهريًّا. تُمثّل الدالّة $A=P(1.016)^n$ نموذجًا لحساب القيمة الآنية A لمبلغ أصلي P بعد n شهرًا من إيداعه.

أ) أودعت هذا المصرف 500 000 دينار. اكتب مقدارًا لوغاريتميًّا، واستعمله لتجد عدد الشهور الضرورية لكي يتضاعف المبلغ.

ب) كم شهرًا سينقضي حتى يتضاعف المبلغ الجديد؟

ج) هل تتأثر المدة التي يتطلبها مبلغ لكي تتضاعف قيمته؟

GRADE11-CHAPTER 4 -13-final 5/13/13 3:16 PM Page 37

الحاسبة البيانية استعمل قانون تغيير الأساس وحاسبة بيانية لرسم بيان الدالة.

51 $y = \log_3 x$ **52** $y = 2\log_5 x$ **53** $y = \frac{\log_{12} x}{3}$

54 **اكتب** كيف ترسم بيان الدالّة $y = \log_{16} x$ باستعمال حاسبة بيانية؟

55 **تفكير ناقد** جد قيمة تقريبية لكل مقدار علمًا بأن $\log_{12} 20 \approx 1.2$ وَ $\log_{12} 33 \approx 1.4$.

أ) $\log_{12} 1.65$ ب) $\log_{12} 660$ ج) $\log_{12} 400$

56 **تفكير ناقد** هناك علاقة مهمة بين اللوغاريتم والصورة العلمية لكتابة الأعداد.

أ) جِد لوغاريتم 2.5 .

ب) جِد لوغاريتم كتلة باخرة التايتانيك. قارن الجواب مع جواب السؤال (أ).

ج) **اكتب مقولة** كتلة أسد 2.5×10^2 kg. جِد لوغاريتم هذا العدد. استعمل الجواب وجوابَيِ السؤالين (أ) وَ (ب) لتوضِّح كيف تجد لوغاريتم عدد مكتوب على الصورة العلمية.

د) استعمل مقولتك لإيجاد لوغاريتم كتلة قطعة نقود تبلغ 2.5×10^{-3}kg. هل تصح مقولتك بخصوص الأعداد المكتوبة على الصورة العلمية بأس سالب؟


الكتلة: 2.5×10^6 kg تقريبًا

افترض أن $b > 0$ وَ $b \neq 1$. اذكر إن كانت كل مقولة صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو خطأ دائمًا.

57 يُمكن تحويل لوغاريتم أساسه b إلى لوغاريتم أساسه عدد نسبي معيّن.

58 اللوغاريتم بأساس 6 لقوة من قوى العدد 6 يساوي أس هذه القوة.

59 طرح لوغاريتم العدد 1 بأساس b من عدد، لا يُغيِّر في هذا العدد.

60 يُمكن لأساس لوغاريتم أن يكون عددًا سالبًا.

61 لوغاريتم تربيع عدد يساوي ضعف لوغاريتم هذا العدد.

62 يُمكن جمع لوغاريتمات مختلفة الأساسات من دون الحاجة إلى تغييرات في الأساسات.

63 يُمكن تبسيط $\frac{\log_b 16}{\log_b 8}$.

64 لوغاريتم لوغاريتم عدد هو العدد نفسه.

65 **خطأ في التحليل** فيما يلي طريقتان لتبسيط $\log 80 + \log 20$. أيهما خطأ؟ بيِّنه.

أ)
$$\log 80 + \log 20 = \log(80 \times 20)$$
$$= \log 1600$$
$$= \log(16 \times 10^2)$$
$$= \log 16 + \log 10^2$$
$$= \log 16 + 2$$

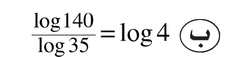
ب)
$$\log 80 + \log 20 = \log(80 + 20)$$
$$= \log 100$$
$$= \log(10^2)$$
$$= 2\log 10$$
$$= 2$$

تحضير للاختبار

66 أي مساواة خطأ؟



أ) $\log 140 - \log 35 = \log 4$ ب) $\frac{\log 140}{\log 35} = \log 4$



ج) $\log 35 + \log 4 = \log 140$ د) $\log \frac{140}{35} = \log 4$

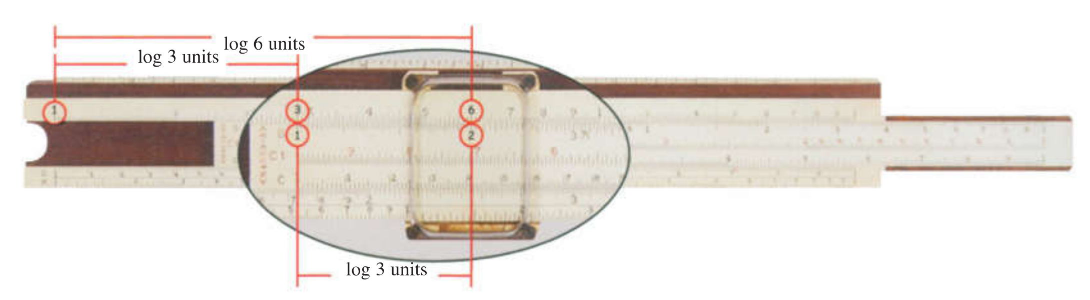
67 اكتب $\log_9 x^2 + \log_9 x$ على أبسط صورة.

(أ) $\log_9(x^2+x)$ (ب) $\log_9(3x)$ (ج) $3\log_9 x$ (د) $3(x^2+x)$

68 أي مقدار لوغاريتمي يساوي $\log 6$ ؟

(أ) $\log 3 + \log 2$ (ب) $\log 3 + \log 3$ (ج) $\log 3 \times \log 2$ (د) $\log 3 \times \log 3$

تحدٍّ وتوسّع



69 **تاريخ الرياضيات** قبل ظهور الحاسبات استعمل المهندسون والطلاب نوعًا من المساطر يسمح بإجراء حسابات معقّدة في هذه المسطرة. خطّا أعداد ينزلق كل منهما على الآخر، وسلّم كل منهما سلّم لوغاريتمي، مما يسمح باستعمال خصائص اللوغاريتم في الضرب والقسمة.

أ) كيف تُبيّن الصورة ناتج ضرب 2 في 3؟

ب) كيف يُمثِّل ذلك خاصّية لوغاريتم ناتج الضرب؟

جِد مجال الدالّة.

70 $f(x)=\log(x^2-4)$ **71** $f(x)=\log x-\log(x-1)$ **72** $f(x)=\log\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$

73 $f(x)=\log\left(\frac{1}{x}\right)^2$ **74** $f(x)=-\sqrt{\log(x+1)}$ **75** $f(x)=\sqrt{-2\log(-x)}$

76 أثبت أن $\log_b a^p = p\log_b a$ **77** بسّط $\log_9 3^{2x}$

حُلّ كل معادلة.

78 $\log_x 25=2$ **79** $\log_x(-8)=3$ **80** $0=\log_x 1$

مراجعة لولبية

حُل كل معادلة . (الصفوف السابقة)

81 $4(x+1)=3(2x-6)$ **82** $-20+8n=n+29$ **83** $8\left(n+\frac{3}{4}\right)=10n-4$

اكتب العدد بدلالة i. (الدرس 2 – 6)

84 $3\sqrt{-16}$ **85** $-\frac{1}{2}\sqrt{-40}$ **86** $4\sqrt{-8}$ **87** $\sqrt{-125}$

اكتب المساواة الأسّية على الصورة اللوغاريتمية. (الدرس 4 – 3)

88 $5^3=125$ **89** $10^{-1}=1$ **90** $36^{0.5}=6$ **91** $4^x=256$

احسب قيمة المقدار. (الدرس 4 – 3)

92 $\log_{12} 1$ **93** $\log_5 25$ **94** $\log_{16} 4$ **95** $\log_{625} 0.04$

5-4 اللوغاريتم الطبيعي النيبري
Natural Logarithm

الأهداف
يستعمل العدد e لكتابة دوال أسّية تمثِّل حالات من الواقع، ويرسم بيانات هذه الدوال.
يحل معادلات ومسائل تتضمّن العدد e واللوغاريتم الطبيعي.

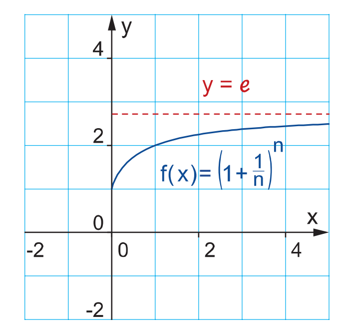
المفردات
Vocabulary
اللوغاريتم الطبيعي
Natural logarithm

دالّة اللوغاريتم الطبيعي
Natural logarithm fuction

من يستعمل هذا الأمر؟
يستعمل العلماء اللوغاريتم الطبيعي والتأريخ بالكربون لتحديد عمر بقايا الحيوانات القديمة.
(المثال 4)

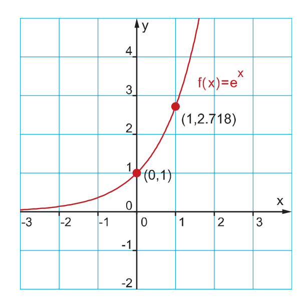
تذكر أن قانون الفائدة النسبية هو $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ حيث يرمز P إلى المبلغ الأصلي المودع، وَ A إلى القيمة الحالية لهذا المبلغ، وَ r إلى المعدّل السنوي للفائدة، وَ t إلى عدد السنوات، وَ n إلى عدد المرات التي يتم فيها تذخير هذا الحساب في السنة.

افترض أنك أودعت دينارًا في حساب يدفع فائدة معدَّلها السنوي 100% $(r=1)$، وأنه يتم تذخير الحساب n مرة في السنة. ستكون قيمة هذا المبلغ بعد سنة $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.



افترض أن عدد المرات n يتزايد بحيث يصبح كبيرًا. يُمكنك عندها الحديث عن تذخير متواصل للحساب. تفحَّص بيان الدالّة $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$. لهذه الدالّة مقارب أفقي بحيث تقترب قيمة الدالّة من عدد قيمته التقريبية ...2.7182818 عندما يسعى n إلى $+\infty$. يرمز أهل الرياضيات بالحرف e إلى هذا العدد، وهو عدد غير نسبي مثل العدد π.

مساعدة
يساعدك بيان الدالّة $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ لترى أن قيم $N_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ تقترب أكثر فأكثر من العدد e.



تتمتَّع الدوال الأسّية التي أساسها e بالخصائص نفسها التي تتمتع بها سائر الدوال الأسّية. وبيان الدالّة $f(x)=e^{x}$ يُشبه بيانات الدوال الأسّية الأخرى، مثل $f(x)=3^{x}$.

مجال الدالّة $f(x)=e^{x}$ هو $\mathbb{R}$ ، ومداها هو $\{y/y>0\}$.

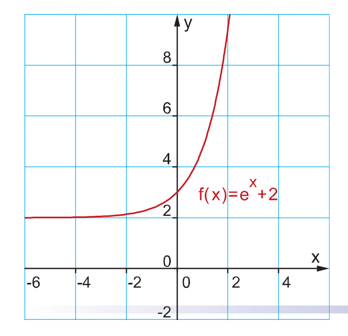
تسمّى الدالة $f(x)=e^{x}$ **الدالّة الأسّية الطبيعية** **Natural exponential funcion** وهي تؤدي دورًا مهمًّا في تاريخ الرياضيات.

مثـــال 1 رسم بيانات الدوال الأسّية الطبيعية

ارسم بيان الدالّة $f(x)=e^{x}+2$.

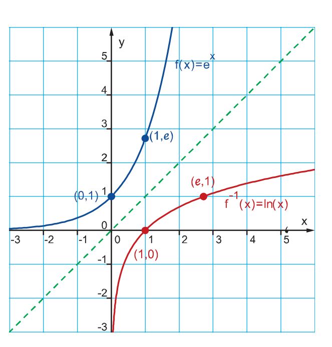
أنشئ جدول قيم لهذه الدالّة. بما أن العدد e غير نسبي، فعليك بتقريب قيم الدالّة إلى العُشر مثلاً.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)=e^x+2$	2.0	2.1	2.4	3	4.7	9.4	22.1





1. ارسم بيان الدالّة $f(x)=e^{x}-3$.



اللوغاريتم الطبيعي Natural logarithm هو اللوغاريتم بأساس e. سوف تستعمل الرمز ln للدلالة على اللوغاريتم الطبيعي. لهذااللوغاريتم الخصائص نفسها التي يتمتع بهااللوغاريتم العادي (العشري)واللوغاريتمات الأخرى.

دالة اللوغاريتم الطبيعي Natural logarithm function

$f(x)=\ln x$ هي الدالّة العكسية للدالّة الأسّية الطبيعية.
إنها دالّة اللوغاريتم بأساس e. مجالها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ومداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية كاملة. أما بيانها فهو البيان المقابل.

مثـــال 2 تبسيط المقادير الأسّية واللوغاريتمية الطبيعية

اكتب المقدار على أبسط صورة.

أ $\ln e^{-2t}$

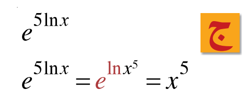
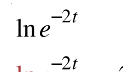
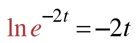
$\ln e^{-2t}=-2t$

ب $e^{\ln(x-1)}$

$e^{\ln(x-1)}=x-1$

ج $e^{5\ln x}$

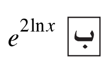
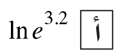
$e^{5\ln x}=e^{\ln x^5}=x^5$

نقطة مراقبة

2. اكتب المقدار على أبسط صورة.

أ $\ln e^{3.2}$ ب $e^{2\ln x}$ ج $\ln e^{x+4y}$


بالعودة إلى قانون الفائدة المركّبة، يصبح $A=pe^{rt}$ عندما يكون التذخير متواصلاً.

مثـــال 3 تطبيق على الاقتصاد

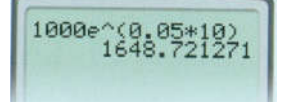
تم إيداع مليون دينار لمدة 10 سنوات بفائدة معدَّلها السنوي 5%، على أن يتم تذخير الحساب بشكل متواصل. كم ستكون قيمة الحساب بعد السنة العاشرة؟

$A=pe^{rt}$ القانون.

$A=1000\ 000\ e^{0.05\times10}$ عوّض.

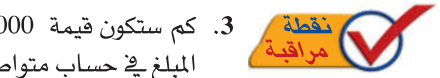
$A\approx1\ 648\ 720$ استعمل الحاسبة.

ستكون قيمة الحساب بعد 10 سنوات 720 648 1 دينارًا تقريبًا.

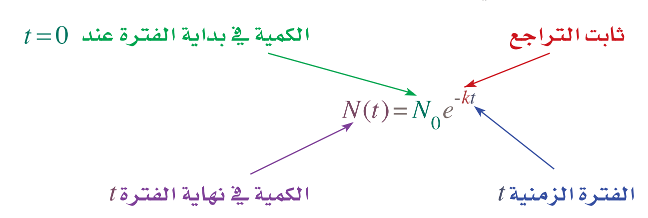


نقطة مراقبة

3. كم ستكون قيمة 000 100 دينار بعد 8 سنوات، علمًا بأنه قد تم إيداع هذا المبلغ في حساب متواصل التذخير، وبفائدة معدَّلها السنوي 3.5% ؟



يستعمل العلماء مفهوم عمر النصف لدراسة بعض المواد وخصوصًا المشعة منها.
عمر النصف half-life لمادة هو الفترة الزمنية التي يتطلبها انحلال نصف هذه المادة أو تحوّله إلى شيء آخر. تستعمل الدالّة أدناه لدراسة عملية التراجع هذه.



مثـــال 4 تطبيق على دراسة الحيوانات المنقرضة

اكتشف عالمٌ إحاثة في كاليفورنيا متحجِّرةً لِمُسَيَّف النابَيْن، وهو حيوانٌ منقرضٌ من فصيلة الهررة. بعد تحليل المتحجِّرة وجد أنها تحتوي على 15% من كمية الكاربون 14 التي كان يحتوي عليها جسمه. حدِّد عمر هذه البقايا، علمًا بأن عمر النصف للكاربون 14 هو 5730 سنة.

الخطوة 1 جد ثابت التراجع للكاربون 14 .

$N(t) = N_0 e^{-kt}$ دالّة التراجع الطبيعي.

$\frac{1}{2} = 1 \times e^{-k \times 5730}$ عوِّض.

$\ln 2^{-1} = -5730k$ بسِّط وخذ اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف.

$-\ln 2 = -5730k$ $\quad ln\, 2^{-1} = (-1) ln\, 2 = -ln\, 2$

$k = \frac{\ln 2}{5730} \approx 0.00012$ بسِّط.

الخطوة 2 استعمل قانون التراجع وحُلّ المعادلة الناتجة.

$N(t) = N_0 e^{-0.00012t}$ دالة التراجع.

$15 = 100 \times e^{-0.00012t}$ عوِّض.

$0.15 = e^{-0.00012t}$ اقسم كل طرف على 100.

$\ln 0.15 = \ln e^{-0.00012t}$ بسِّط وخذ اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف.

$\ln 0.15 = -0.00012t$ بسِّط.

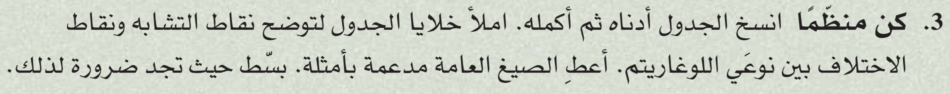
$t = -\frac{\ln 0.15}{0.00012} \approx 1580$ حلّ.

تعود هذه البقايا إلى حوالي 800 15 سنة.

> **انتبه!**
> ln يشير إلى اللوغاريتم الطبيعي، بينما يشير log إلى اللوغاريتم العادي (أي بأساس 10)



4. كم سنة يستغرق انحلال 650 mg من الكروميوم 51 لتصبح 200 mg ، علمًا بأن عمر النصف للكروميوم 51 هو 28 يومًا تقريبًا.



فكِّرْ وناقـش

1. بِمَ يتشابه العددان e وَ π؟ وبِمَ يختلفان؟

2. أوضح ما يربط بين e وَ ln .



3. **كن منظّمًا** انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. املأ خلايا الجدول لتوضح نقاط التشابه ونقاط الاختلاف بين نوعَي اللوغاريتم. أعطِ الصيغ العامة مدعمة بأمثلة. بسِّط حيث تجد ضرورة لذلك.

	اللوغاريتم العادي	اللوغاريتم الطبيعي
الأساس		
الصورة اللوغاريتمية		
الصورة الأسّية		
$\log_b 1$		
$\log_b b$		
$\log_b b^x$		
$b^{\log_b x}$		

5-4 التمــاريــن

تمــارين موجّهــة

1 **مفردات** اكتب اللوغاريتم الطبيعي لعدد x على صورة دالّة بدلالة x. تسمّى هذه الدالة __?__ .

انظر المثال 1

ارسم بيان الدالّة.

2 $f(x)=e^x-4$ **3** $f(x)=-e^x$ **4** $f(x)=4-e^x$ **5** $f(x)=e^{1-x}$

انظر المثال 2

اكتب المقدار على أبسط صورة.

6 $\ln e^1$ **7** $\ln e^{x-y}$ **8** $\ln e^{\left(-\frac{x}{3}\right)}$ **9** $e^{ln 2x}$ **10** $e^{3\ln x}$

انظر المثال 3

11 **اقتصاد** أودعت ڤيان 000 750 7 دينار في حساب متواصل التذخير، بفائدة معدّلها السنوي 4% . ما قيمة هذا الحساب بعد 5 سنوات ؟

انظر المثال 4

12 **فيزياء** التكنتيوم Technetuim-99m مادة مشعّة تُستعمل في تصوير عضلات القلب والهيكل العظمي. عمر النصف لهذه المادة 6 ساعات تقريبًا. جِد ثابت التراجع لهذه المادة. استعمل دالّة التراجع $N(t)=N_0e^{-kt}$ لحساب ما يتبقى من 250 mg من هذه المادّة بعد 24 ساعة.

تمــارين وحل مسائل

تمارين حرّة	
لحل التمارين	أنظر المثال
16–13	1
20–17	2
21	3
22	4

ارسم بيان الدالة.

13 $f(x)=e^x+1$ **14** $f(x)=e^x-1$ **15** $f(x)=1-e^x$ **16** $f(x)=10-e^x$

اكتب المقدار على أبسط صورة.

17 $\ln e^0$ **18** $\ln e^{2x}$ **19** $e^{\ln(x+2)}$ **20** $e^{4\ln x}$

21 **اقتصاد** يحتوي حساب دلشاد في المصرف على 000 565 7 دينار. وظّف دلشاد 000 000 5 دينار منها في حساب معدّل فائدته السنوية 3.5% ويتم تذخيره بشكل متواصل. كم ستكون القيمة الكلّية لحساب دلشاد بعد ثلاث سنوات؟

22 **بيئة** سنة 1986 ، تعرّض مفاعل تشرنوبيل النووي في أوكرانيا لحادث أدى إلى تسرُّب كمية كبيرة من البلوتونيوم. يبلغ عمر النصف لهذه المادة 110 24 سنوات. جِد ثابت التراجع لهذه المادة. استعمل دالّة التراجع $N(t)=N_0e^{-kt}$ لحساب ما يتبقى من 20 g من هذه المادة بعد 5000 سنة. بعد كم سنة تُصبح الكمية المتبقية من هذه الجرامات العشرين جرامًا واحدًا؟

23 **حاسبة** جِد القيمة التقريبية لكل من $\ln 10$ وَ $\log e$.

أ كيف يرتبط العددان اللذان حصلت عليهما؟

ب استعمل قاعدة تغيير الأساس لدعم جوابك.

24 بيّن أن $\ln x=\ln 10\times\log x$.

25 **خطوات متعدِّدة** ينصّ قانون نيوتن للتبريد على أن درجة حرارة سائل تتراجع وفق الدالّة الأسّية التالية $T = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$، حيث يرمز T_0 إلى درجة الحرارة الأصلية، ويرمز T_s إلى درجة الحرارة المحيطة بالشيء و k إلى عدد ثابت و t إلى الزمن. عندما يقاس الزمن بالدقائق يكون $k = 0.283$. مقهى تبلغ درجة حرارة الجو فيه 21 درجة مئوية، يقدم إلى زبائنه قهوة درجة حرارتها 96 درجة مئوية. ينصح الذوّاقة بشرب القهوة عندما تكون درجة حرارتها 60 درجة مئوية تقريبًا.

أ كم دقيقة على الزبون أن ينتظر قبل تناول قهوته؟

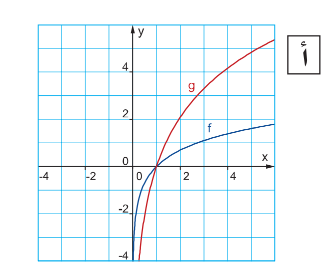
ب كم يصبح الجواب السابق إذا كانت درجة الحرارة في المقهى 30 درجة مئوية؟

ج ارسم بيان دالّة التبريد في الحالتين السابقتين، وجِد بيانيًّا عدد الدقائق لكي تُصبح درجة حرارة القهوة مساوية لدرجة حرارة جو المقهى.

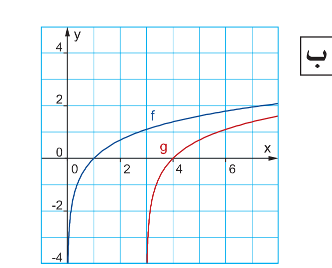
26 ارسم بيان كل من الدالّتين $y = \frac{\ln x}{\ln 6}$ وَ $y = \frac{\log x}{\log 6}$. قارن بين البيانيَّن، وبين كل منهما وبيان الدالّة $y = \log_6 x$.

في التمارين من 27 إلى 29، اربط كل دالّة ناتجة عن تحويل الدالّة $f(x) = \ln x$ بأحد البيانات التالية:

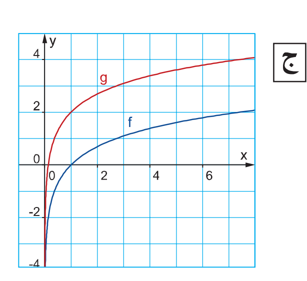
أ



ب



ج



27 $g(x) = \ln(x-3)$

28 $g(x) = 3\ln x$

29 $g(x) = \ln x + 2$

30 **بيئة** قدّرت إحدى جمعيات العناية بالبيئة في كندا أن عدد قطيع حيوانات الرِّنَّة التي تعيش في وادي نهر جورج بلغ 4700 رأس سنة 1954، وأن هذا العدد تزايد أسّيًّا حتى وصل إلى 000 472 رأس سنة 1984.

أ استعمل الدالّة الأسّية $N(t) = N_0 e^{kt}$ حيث يرمز N_0 إلى العدد الأصلي للقطيع، ويرمز t إلى الزمن و $N(t)$ إلى عدد القطيع بعد t سنة و k إلى نسبة التزايد السنوية. جِد قيمة k.

ب ماذا لو...؟ لو استمر هذا القطيع بالتزايد على الوتيرة نفسها، كم سيبلغ عدده سنة 2012؟

نافذة على عالم الحيوان



قطيع الرنة في وادي نهر جورج، هو أكبر قطيع من نوعه في العالم. كان عدده سنة 1993 حوالي 000 776 رأس.

31 **عدوى** يستعمل العاملون في الصحة العامة الدالّة $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ لقياس مدى انتشار وباء في مجتمع.

أ ارسم بيان هذه الدالّة.

ب كم مقاربًا لهذه الدالّة؟

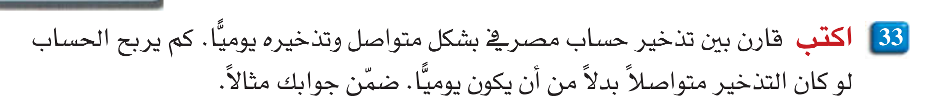
ج صِف ما تعنيه هذه الدالّة في حالة واقعية من حالات انتشار وباء.

32 **تفكير ناقد** يُبيّن الشكل المقابل بيانات الدوال $f(x)=2^x$ و $g(x)=10^x$ و $h(x)=e^x$.

أ ميِّز بيان كل من هذه الدوال.

ب ما إحداثيّا النقطة المشتركة بين البيانات الثلاثة؟

ج ما السبب الذي يجعل هذه النقطة مشتركة بين البيانات الثلاثة؟



33 **اكتب** قارن بين تذخير حساب مصرفي بشكل متواصل وتذخيره يوميًّا. كم يربح الحساب لو كان التذخير متواصلاً بدلاً من أن يكون يوميًّا. ضمّن جوابك مثالاً.

34 بلغ عدد المزارع في أحد البلدان 500 33 مزرعة سنة 1990 وأصبح 800 30 سنة 2000 .

أ جِد قيمة k في الدالّة الأسّية $N(t)=N_0e^{kt}$ للحصول على نموذج لتناقص عدد المزارع.

ب استعمل النموذج لتقدير عدد المزارع سنة 2010 .

ج تزايد متوسِّط مساحات المزارع في فترة 1990 – 2000 من 1209 فدادين إلى 1279 فدّانًا. جد نموذجًا أسّيًّا يسمح بتقدير متوسِّط مساحة المزارع سنة 2010.



تحضير للاختبار

35 أي مجموعة من المقادير مرتَّبة من الأصغر إلى الأكبر؟

أ $\ln 1$، $\log 10$، $\ln 10$، $\log e$

ب $\ln 10$، $\log 10$، $\log e$، $\ln 1$

ج $\log 10$، $\ln 10$، $\log e$، $\ln 1$

د $\log e$، $\ln 10$، $\log 10$، $\ln 1$

36 أي مقدار لا يساوي x، حيث $x\neq 0$؟

أ $e^{\ln x}$ ب $\ln e^x$ ج $x\ln e$ د $x+\ln e$

37 أي مقدار يساوي $\log 50$ ؟

أ $\ln 50 \div \ln 10$ ب $\ln(50\div 10)$ ج $\ln 50+\ln 10$ د $(\ln 50)\times(\ln 10)$

38 **جواب مختصر** اكتب مقدارًا يساوي $-\ln x$ من دون استعمال إشارة السالب.

تحدٍّ وتوسّع

39 كم مرة في السنة يجب تذخير حساب مصرفي بمعدل فائدة سنوية 8% لكي تكون قيمته 99.9% من قيمته لو كان التذخير متواصلاً؟ هل تغيُّر معدَّل الفائدة يغيِّر في الجواب ؟ أوضح ذلك.

40 ارسم بيان الدلّة $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)}$. صِف هذا البيان، وحدِّد مجال الدالّة ومداها.

41 أجب عن الأسئلة التالية المتعلقة ببيان الدالّة $f(x)=\ln x$:

أ أي دالّة تتمثَّل بيانيًّا بانعكاس بيان الدالّة $f(x)$ حول المحور الثاني؟

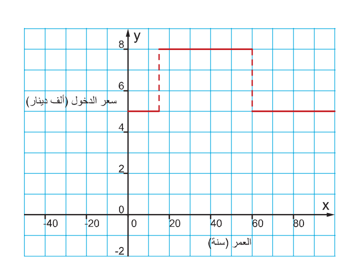
ب أي دالّة تتمثَّل بيانيًّا بانعكاس بيان الدالّة $f(x)$ حول المحور الأول؟

ج أي دالّة تتمثَّل بيانيًّا بانعكاس بيان الدالّة $f(x)$ حول المحورَيْن على التوالي؟

د ارسم بيان الدالّة $f(x)$ والانعكاسات الثلاثة في المستوى الإحداثي نفسه. حدِّد المقاربات التي تتشارك فيها البيانات الأربعة.

مراجعة تراكمية

42 **تسلية** **يُظهر البيان المقابل أسعار الدخول إلى حديقة الحيوانات بدلالة عمر الزائر. ارسم بيانًا يُمثّل كلاًّ من الحالات التالية، وحدّد التحويل الذي يسمح بالحصول عليه انطلاقًا من البيان المقابل.** (الصفوف السابقة)



أ قبل الساعة 5:00 ب.ظ. تنخفض الأسعار إلى النصف.

ب تم إنقاص الحد الأعلى لكل فئة عمرية 3 سنوات.

ج تمت مضاعفة جميع الأسعار.

اكتب الدالّة الناتجة من تحويل الدالّة $f(x)=-2x^2+3x-4$ بكل من التحويلات التالية: (الصفوف السابقة)

43 سحب إلى أعلى 5 وحدات

44 سحب إلى اليسار وحدتين

45 انعكاس حول المحور الأول

46 مط أفقي بعامل 2

اكتب المقدار باستعمال لوغاريتم واحد. قدّم الجواب على أبسط صورة. (الدرس 4 – 4)

47 $\log_2 8+\log_2 \frac{1}{2}$

48 $\log_4 64-\log_4 1$

49 $\log_3 243-\log_3 2187$

50 $\log_5 25+\log_5 125$

51 $\log_8 8+\log_8 \frac{1}{8}$

52 $\log x^2+\log x$

6-4 المعادلات والمتباينات الأسّية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Equations and Inequalities



الأهداف

يحل معادلات ومتباينات أسّية ولوغاريتمية.

يحل مسائل تتضمن معادلات ومتباينات أسّية ولوغاريتمية.

المفردات

Vocabulary

المعادلة الأسّية
Exponential Equation

المعادلة اللوغاريتمية
Logarithmic Equation

من يستعمل هذا الأمر؟

يُستعمل السلّم الأسي لقياس الضوء في عمليات التصوير. (التمرين 40).

المعادلة الأسّية Exponential Equation معادلة تتضمَّن مقدارًا أو أكثر يكون فيه المجهول أسًّا.

لكي تحل معادلة أسّية:

- حاول أن تكتبها بأساس واحد: إذا كان $b^x = b^y$ فإن $x = y$ $(b \neq 1،b \neq 0)$
- استعمل اللوغاريتم: إذا كان $a = b$ فإن $\log a = \log b$ $(a > 0،b > 0)$

مثال 1 حل المعادلات الأسّية

حُلّ وتحقَّقْ.

أ $8^x = 2^{x+6}$

$(2^3)^x = 2^{x+6}$ اكتب 8 كقوة لـ 2 لتحصل على الأساس نفسه.

$2^{3x} = 2^{x+6}$ لحساب قوة القوة، اضرب الأسّين.

$3x = x + 6$ بما أن الأساس هو نفسه فالأسّان متساويان

$x = 3$ حُلّ.

تحقَّق

8^x	2^{x+6}
8^3	2^{3+6}
8^3	2^9
512 ✓	512

الحل هو $x = 3$

ب $5^{x-2} = 200$

$\log 5^{x-2} = \log 200$ بما أن 200 ليس قوة من قوى 5، خذ لوغاريتم الطرفين.

$(x-2)\log 5 = \log 200$ استعمل خاصية لوغاريتم القوة.

$x - 2 = \frac{\log 200}{\log 5}$ اقسم كل طرف على log 5.

$x = 2 + \frac{\log 200}{\log 5} \approx 5.292$

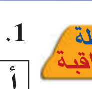
تحقَّقْ استعمل الحاسبة.

5^(5.292-2)
199.9904485

الحل هو $x \approx 5.292$

إضاءة

عندما تستعمل جوابًا مقرَّبًا في عملية التحقُّق، لن تجد نتيجة مضبوطة تمامًا، بل نتيجة معقولة.



1. حُلّ وتحقَّق.

أ $3^{2x} = 27$ ب $7^{-x} = 21$ ج $2^{3x} = 15$

مثـــال 2 تطبيق نقدي

تستطيع الاختيار بين الحصول على سيارة ثمنها 20 مليون دينار أو الحصول على دينار واحد في اليوم الأول وضعف ما حصلت عليه في اليوم التالي، وهكذا... لو اخترت الحل الثاني، في أي يوم تحصل على مبلغ أكبر من ثمن السيارة؟

سوف تحصل في اليوم الأول على دينار واحد 2^0 وعلى دينارين 2^1 في اليوم التالي وهكذا. فسوف تحصل على 2^{n-1} دينارًا في اليوم n. للحصول على الجواب، حُلّ المتباينة.

$2^{n-1} > 20\ 000\ 000$	
$2^{n-1} > 2\times10^7$	اكتب 20 مليونًا على الصورة العلمية.
$\log(2^{n-1}) > \log(2\times10^7)$	خُذ لوغاريتم كل طرف.
$(n-1)\log 2 > \log 2 + \log 10^7$	استعمل خاصية القوة وخاصيّة ناتج الضرب.
$(n-1)\log 2 > \log 2 + 7$	$\log 10^7 = 7$
$n-1 > \frac{\log 2+7}{\log 2}$	أقسم كل طرف على $\log 2$
$n > \frac{\log 2+7}{\log 2}+1$	استعمل الحاسبة
$n > 25.26$	قرّب الجواب إلى أقرب عدد صحيح من أعلى.

ابتداء من اليوم السادس والعشرين، يُصبح ما تتقاضاه أكبر من ثمن السيارة.

تحقَّق بما أن $2^{26-1} = 2^{25} = 33\ 554\ 432$ فإنك تتقاضى في اليوم السادس والعشرين 432 554 33 دينارًا وهو مبلغ يزيد على ثمن السيارة.

> **مـلاحـظة**
> من المنطقي أن يقارن التلميذ بين مجموع ما يتقاضاه حتى يتخطى ثمن السيارة، أي أن يحل: $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n+1} > 20\times10^6$
> $\Rightarrow n = 24$



2. افترض في المثال 2 أن المبلغ الذي تتقاضاه كل يوم سيكون 3 أضعاف ما تقاضيته في اليوم السابق، بدل الضعفَيْن. في أي يوم سوف يزيد ما تتقاضاه على مليار دينار؟

المعادلة اللوغاريتمية Logarithmic Equation معادلة تتضمن مقدارًا لوغاريتميًّا أو أكثر يتضمَّن المجهول. يُمكنك حل المعادلات اللوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتم.

مثـــال 3 حل معادلات لوغاريتمية

حُل.

أ

$\log_3(x-5) = 2$	
$3^{\log_3(x-5)} = 3^2$	استعمل 3 أساسًا مشتركًا للطرفين.
$x-5 = 9$	استعمل التعاكس بين القوة واللوغاريتم.
$x = 14$	بسِّط

ب

$\log 45x - \log 3 = 1$	
$\log\left(\frac{45x}{3}\right) = 1$	استعمل خاصية لوغاريتم ناتج القسمة.
$\log(15x) = 1$	اقسم.
$10^{\log(15x)} = 10^1$	استعمل 10 أساسًا مشتركًا للطرفين
$15x = 10$	استعمل التعاكس بين القوة واللوغاريتم
$x = \frac{2}{3}$	بسِّط

> **تـذكَّـرْ**
> راجع خصائص اللوغاريتم في الدرس 4-4.

ج $\log_4 x^2 = 7$

$2\log_4 x = 7$ خاصية لوغاريتم القوة.

$\log_4 x = \frac{7}{2}$ اقسم كل طرف على 2.

$x = 4^{\frac{7}{2}}$ تعريف اللوغاريتم.

$x = (2^2)^{\frac{7}{2}}$ $4 = 2^2$

$x = 2^7 = 128$ بسّط.

د $\log x + \log(x+9) = 1$

$\log x(x+9) = 1$ استعمل خاصية لوغاريتم ناتج الضرب

$10^{\log x(x+9)} = 10^1$ استعمل 10 أساسًا مشتركًا للطرفين

$x(x+9) = 10$ استعمل التعاكس بين القوة واللوغاريتم

$x^2 + 9x - 10 = 0$ اضرب الحدود وجمِّعها

$(x-1)(x+10) = 0$ حلِّل

$x + 10 = 0$ أو $x - 1 = 0$ استعمل خاصية الضرب الصفري

$x = -10$ أو $x = 1$ حُلّ

تحقَّق

$\log x + \log(x+9)$	1
$\log 1 + \log(1+9)$	1
$\log 1 + \log 10$	1
$0 + 1$	1
$0 + 1$	1 ✓

$\log x + \log(x+9)$	1
$\log(-10) + \log(-10+9)$	1 ✗

$\log(-10)$ غير معرّف

إذن، الحلّ هو $x = 1$

انتبه!
تحقَّق دائمًا من الحلول لأن طريقة الحل قد تُدخل حلولاً دخيلة.

نقطة مراقبة

3. حُلّ.

أ $3 = \log 8 + 3\log x$

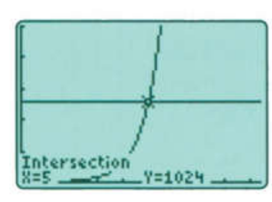
ب $2\log x - \log 4 = 0$

مثال 4 استعمال الجداول والرسوم البيانية لحل المعادلات والمتباينات الأسّية واللوغاريتمية

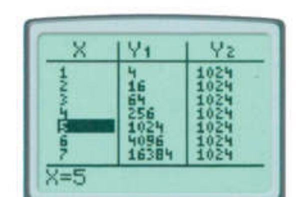
استعمل جدولاً ورسمًا بيانيًا لتحلّ.

أ $2^{2x} = 1024$

استعمل حاسبة بيانية. أدخل $2^\wedge(2X)$ أمام Y1 وَ 1024 أمام Y2.



ابحث في الرسم البياني عن الإحداثي الأول لنقطة تقاطع البيانيَّن.



X	Y1	Y2
1	4	1024
2	16	1024
3	64	1024
4	256	1024
5	1024	1024
6	4096	1024
7	16384	1024

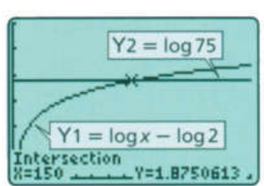
X=5

ابحث في الجدول عن قيمة x التي تجعل $Y1 = Y2$

الحل هو $x = 5$

ب $\log x - \log 2 \le \log 75$

استعمل حاسبة بيانية. أدخل $\log x - \log 2$ أمام Y1 وَ log75 أمام Y2.



ابحث في الرسم البياني عن الإحداثي الأول لنقطة تقاطع البيانيَّين.

X	Y1	Y2
120	1.7782	1.8751
130	1.8129	1.8751
140	1.8451	1.8751
150	1.8751	1.8751
160	1.9031	1.8751
170	1.9294	1.8751
180	1.9542	1.8751

X=150

ابحث في الجدول عن قيم x التي تجعل $Y1 \le Y2$

مجموعة الحل هي $\{x / x \le 150\}$

تحقَّقْ استعمل الجبر.

$\log x - \log 2 \le \log 75$

$\log \frac{x}{2} \le \log 75$ استعمل خاصية لوغاريتم ناتج القسمة.

$10^{\log \frac{x}{2}} \le 10^{\log 75}$ استعمل 10 أساسًا مشتركًا للطرفين.

$\frac{x}{2} \le 75$ استعمل التعاكس بين القوة واللوغاريتم.

$x \le 150$ ✓ بسّط.



4. استعمل جدولاً ورسمًا بيانيًا للحل.

أ $2^x = 4^{x-1}$ ب $2^x > 4^{x-1}$ ج $\log x^2 = 6$

فكِّرْ وناقِشْ

1. لماذا تستنتج أن $a = b$ إذا كان $\log a = \log b$ حيث $a > 0$ وَ $b > 0$ ؟

2. اذكر فقط الخطوة الأولى في حل كل مما يلي:

أ $\log x^5 = 10$ ب $\log 2x + \log 2 = 1$

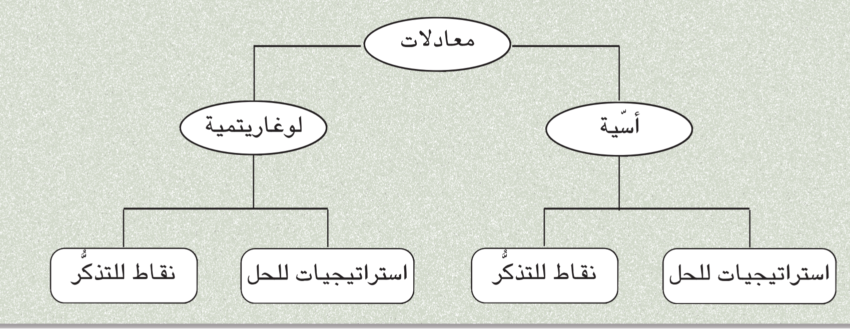
ج $x^4 = 100$ د $\log(x + 1000) = 2$

هـ $\log(x + 4) + \log x = 2$ و $\log_6 (x + 6) = 3$

3. أوضح كيف يُمكن أن يكون لمعادلة لوغاريتمية حل سالب. برِّر جوابك وأعطِ مثالاً إذا كان ذلك ممكنًا.



4. **كن منظّمًا** انسخ المخطط أدناه ثم أكمله. اكتب بأسلوبك الاستراتيجيات والنقاط الواجب عليك تذكّرها بخصوص المعادلات الأسّية واللوغاريتمية.



6-4 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** يُمكنك حل معادلة ___?___ بأخذ لوغاريتم كل طرف من طرفَيْها (أسّية أو لوغاريتمية).

انظر المثال 1

حُلّ وتحقّق.

2 $4^{2x} = 32^{\frac{1}{2}}$ **3** $9^x = 3^{x-2}$ **4** $2^x = 4^{x+1}$

5 $4^x = 10$ **6** $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **7** $2.4^{3x+1} = 9$

انظر المثال 2

8 **السكان** عدد السكان في إحدى القرى 3400 نسمة، وهو يتزايد 3% سنويًّا. يُمكن اعتماد الدالّة $P = 3400(1+0.03)^t$ لتمثيل عدد السكان بدلالة الزمن t. حيث يرمز P إلى عدد السكّان بعد t سنة. بعد كم سنة يتخطى عدد السكّان 10 000 نسمة؟

انظر المثال 3

حُلّ.

9 $\log_2(7x+1) = \log_2(2-x)$ **10** $\log_6(2x+3) = 3$

11 $\log 72 - \log\left(\frac{2x}{3}\right) = 0$ **12** $\log_3 x^9 = 12$

13 $\log_7(3-4x) = \log_7\left(\frac{x}{3}\right)$ **14** $\log 50 + \log\left(\frac{x}{2}\right) = 2$

15 $\log x + \log(x+48) = 2$ **16** $\log\left(x+\frac{3}{10}\right) + \log x + 1 = 0$

انظر المثال 4

استعمل جدولاً ورسمًا بيانيًّا لتحل.

17 $2^{2x+1} = 256$ **18** $2^x 3^x \le 7776$ **19** $2\log x^4 = 16$ **20** $x > 10\log x$

تمارين وحل مسائل

لحل التمارين	أنظر المثال
26–21	1
27	2
33–28	3
36–34	4

حُلّ وتحقّق.

21 $2^{x-1} = \frac{1}{64}$ **22** $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 8^{x-1}$ **23** $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} = 125^{\frac{x}{2}}$

24 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 1.6$ **25** $(1.5)^{x-1} = 14.5$ **26** $3^{\frac{x}{2}+1} = 12.2$

27 **الأدوية** أعطى المرض ولدًا حبَّة مسكّن تحتوي على 325mg من الإسبرين. تُستعمل الدالّة $A = 325\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}}$ لتحديد كمّية الإسبرين A المتبقية في دم الولد بعد t دقيقة من تناوله حبّة من هذا المسكّن. اكتب متباينة لوغاريتمية وحُلّها لتحدّد عدد الدقائق الضرورية لتصبح كمية الأسبرين دون 50mg.

حُلّ.

28 $\log_3(7x) = \log_3(2x+0.5)$ **29** $\log_2\left(1+\frac{x}{2}\right) = 4$

30 $\log 5x - \log(15.5) = 2$ **31** $\log_5 x^4 = 2.5$

32 $\log x - \log\left(\frac{x}{100}\right) = x$ **33** $2 - \log 3x = \log\left(\frac{x}{12}\right)$

استعمل جدولاً ورسمًا بيانيًّا للحل.

34 $2 \times 3^{x-1} = 162$ **35** $4x \le 2^{x+1}$ **36** $\log(2x-17) + \log x \ge 2$

37 حُلّ $\log x = \log(x^2 - 12)$. وضّح جوابك.

38 حُلّ $5^{2x} = 100$ مقرِّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة.

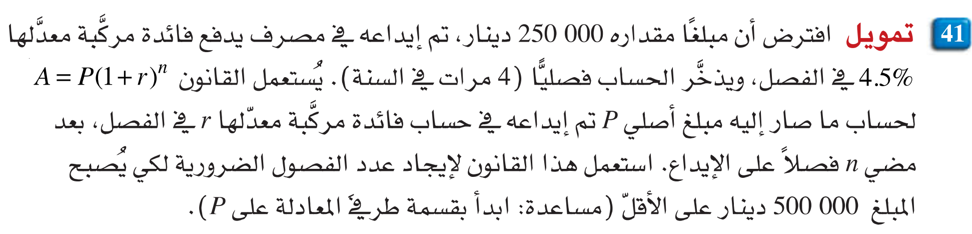
39 حُلّ $5^{x+2} = 64$ مستعملاً أكثر من طريقة.

40 **موسيقى** يرتبط تردُّد كل نغمة (بالهيرتز) من نغمات البيانو بعلاقة مع موقع مفتاحها على لوحة المفاتيح، وفقًا للدالّة $f(n) = 440 \times 2^{\frac{n}{12}}$ ، حيث يمثِّل n عدد المفاتيح التي تفصل هذا المفتاح عن مفتاح مركزي (يكون n سالبًا إذا كان المفتاح إلى يسار المفتاح المركزي، وموجبًا إذا كان إلى يمينه). جِد موقع المفتاح لنغمة تردُّدها 110 هيرتز.

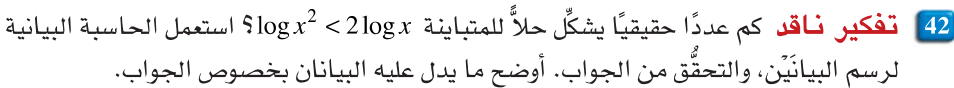
نافذة على الموسيقى



يُعتبر البيانو آلة موسيقية وترية وطبلية في آن معًا. فهو مزوّد بمطارق صغيرة تضرب على الأوتار.



41 **تمويل** افترض أن مبلغًا مقداره 000 250 دينار، تم إيداعه في مصرف يدفع فائدة مركَّبة معدَّلها 4.5% في الفصل، ويدخَّر الحساب فصليًّا (4 مرات في السنة). يُستعمل القانون $A = P(1+r)^n$ لحساب ما صار إليه مبلغ أصلي P تم إيداعه في حساب فائدة مركَّبة معدّلها r في الفصل، بعد مضي n فصلاً على الإيداع. استعمل هذا القانون لإيجاد عدد الفصول الضرورية لكي يُصبح المبلغ 000 500 دينار على الأقلّ (مساعدة: ابدأ بقسمة طرفي المعادلة على P).



42 **تفكير ناقد** كم عددًا حقيقيًا يشكِّل حلاًّ للمتباينة $\log x^2 < 2\log x$ ؟ استعمل الحاسبة البيانية لرسم البيانَيْن، والتحقُّق من الجواب. أوضح ما يدل عليه البيانان بخصوص الجواب.

43 **خطأ في التحليل** عند قيامه بحل المعادلة $\log x + 4 = 8$ ، حصل دانا على 996 999 99 كجواب. أين أخطأ دانا؟

44 **اكتب** صِف طريقتين يُمكنك استعمالهما لحل معادلة أسّية. أعطِ مثالاً يوضِّح متى تستعمل كل طريقة.

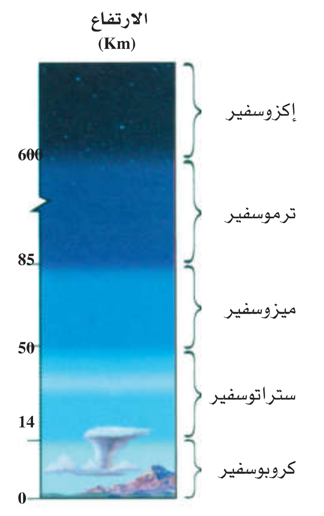
45 يُمكن اعتماد الدالّة $N(t) = 119(0.987)^t$ نموذجًا لتحديد عدد مزارع الدواجن بالآلاف في أحد البلدان بدلالة عدد السنوات t التي تلي سنة 1980.

أ هل تزايد عدد المزارع منذ 1980 أم تناقص؟ كيف تعرف ذلك؟

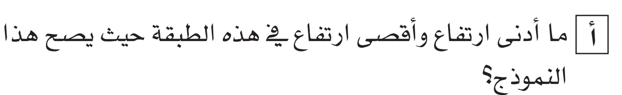
ب ما عدد المزارع في هذا البلد سنة 1980 وسنة 2000؟

ج بالاستناد إلى هذا النموذج، متى سيصبح عدد المزارع حوالي 000 80 مزرعة؟

46 **أحوال جوية** في طبقةٍ من الغلاف الجوّي حيث درجة الحرارة ثابتة وتساوي $-57°$ ، يُمكن اعتماد الدالّة $P(h) = 128(10)^{-0.0682h}$ نموذجًا لقياس الضغط الجوي P (بالكيلوباسكال kpa) بدلالة الارتفاع h (بالكيلومتر) عن سطح البحر. يتراوح الضغط الجوي في هذه الطبقة بين $2.55\ kpa$ وَ $22.9\ kpa$.



أ ما أدنى ارتفاع وأقصى ارتفاع في هذه الطبقة حيث يصح هذا النموذج؟



ب ماذا لو...؟ يبلغ الضغط الجوي عند سطح البحر $101\ kpa$ تقريبًا. لو استعملت النموذج أعلاه لتحديد الضغط الجوي عند سطح البحر، هل تحصل على قيمة أكبر من قيمته الحقيقية أم أصغر منها؟ أوضح ذلك.



47 ما حل المعادلة $b^x = c$ ؟

(أ) $x = \frac{\log b}{\log c}$ (ب) $x = \frac{\log c}{\log b}$ (ج) $x = \frac{\log b}{c}$ (د) $x = \frac{\log c}{b}$

48 ما حل المعادلة $\log(x-21) = 2 - \log x$ ؟

(أ) $x = 4$ (ب) $x = \frac{25}{4}$ (ج) $x = \frac{21}{2}$ (د) $x = 25$

49 أي مقدار يتّخذ القيمة الكبرى عندما $p = 5$ وَ $q = 2$ ؟

(أ) $\log 2p - \log 3q$ (ب) $2\log q - 3\log p$ (ج) $\log p^2 - \log q^3$ (د) $\log p - \log q$

تحدٍّ وتوسّع

50 هل يُمكن حل المعادلة $\log_x x = x$ ؟ أوضح ذلك.

51 حُلّ المعادلة $x = 0.125^{\log_2 5}$ جبريًّا.

52 ما مجموعة الحل للمتباينة $\log_3 36 - \log_3 x > 1$ ؟ استعمل الحاسبة البيانية لتجد الحلّ بيانيًّا.

مراجعة لولبية

53 **تصوير** كلفة تظهير صورة من قياس $24\text{cm} \times 20\text{cm}$ ، 750 دينارًا، وكلفة تظهير صورة من قياس $15\text{cm} \times 10\text{cm}$ ، 350 دينارًا. مع سيوى 5250 دينارًا. استعمل x لترمز إلى عدد الصور من القياس الأول، وَ y إلى عددها من القياس الثاني. (الدرس 2 − 1)

أ اكتب متباينة لعدد الصور الذي يُمكن لسيوى أن تُظهِّرَه من كل نوع.

ب حُلّ المتباينة بيانيًّا. كم صورة من النوع الثاني يُمكن لسيوى أن تُظهّر، علمًا بأنها ظهَّرت 4 صور من النوع الأول؟

جِد محدِّد المصفوفة. (الدرس 3 − 4)

54 $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ **55** $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ **56** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ **57** $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

استعمل العمليات المتعاكسة لإيجاد الدالّة العكسية. (الدرس 4 − 2)

58 $f(x) = 4x + 3$ **59** $f(x) = 6(x-2)$ **60** $f(x) = \frac{x}{3} + 9$ **61** $f(x) = \frac{7x-1}{5}$





7–4 النماذج الأسّية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Models

الأهداف

يستعمل الدوال الأسّية واللوغاريتمية ليجد نماذج لدراسة المعطيات.

يستعمل النماذج الأسّية واللوغاريتمية ليحلل ويصوغ توقّعات.

المفردات Vocabulary

الانحدار الأسّي Exponential Regression

الانحدار اللوغاريتمي Logarithm Regression

من يستعمل هذا الأمر؟

يعرف صاقلو الأحجار الكريمة أن قيمة الجواهر من النوعية نفسها ترتبط بكتلها عبر علاقة أسّية. (المثال 2)

يُمكن لتحليل المعطيات أن يُظهر نمطًا أو علاقة تتكرّر بين كمّيتين.

انظر إلى الجدول أدناه لقيم عائدة إلى الدالة $f(x)=2(3^x)$

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	2	6	18	54

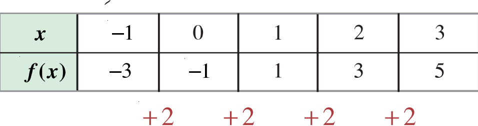
$\times 3 \quad \times 3 \quad \times 3 \quad \times 3$

لاحظ أن نسبة كل قيمة من قيم y إلى القيمة التي تسبقها، ثابتة. كل قيمة من هذه القيم، باستثناء الأولى، تساوي 3 أضعاف القيمة السابقة. وهكذا، فإن نسبة قيم الدالّة المقابلة لقيم x التي تفصل بينها المسافة نفسها، نسبة ثابتة.يمكن تمثيل مثل هذه المعطيات بدالّة أسّية $f(x)=ab^x$.

مثـــال 1 تمييز المعطيات الأسّية

حدّد إن كانت الدالّة f دالّة أسّية أم لا. إذا كانت أسّية، جِد النسبة الثابتة.

أ



x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−3	−1	1	3	5

الفروق الأولى $+2 \quad +2 \quad +2 \quad +2$

الدالّة دالّة خطّية لأن الفروق الأولى متساوية.

ب

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	1	2	4	8

الفروق الأولى $+\frac{1}{2} \quad +1 \quad +2 \quad +4$

النسب $\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = 2$

الدالّة دالّة أسّية والنسبة الثابتة هي 2.

تـذكَّـرْ

تُستعمل الدوال الخطّية كنماذج لمعطيات فروقها الأولى ثابتة. كما تُستعمل الدوال التربيعية كنماذج لمعطيات فروقها الثانية ثابتة.



نقطة مراقبة

1. حدِّد إن كانت الدالّة f دالّة أسّية أم لا. إذا كانت أسّية، جِد النسبة الثابتة.

أ

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$2.\overline{6}$	4	6	9	13.5

ب

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−3	2	7	12	17

استعملت في السابق الحاسبة البيانية لإيجاد نموذج خطّي يُمثِّل المعطيات الخطّية، أي قمت بعملية **انحدار خطّي**. سوف تستعمل الحاسبة البيانية لإيجاد **نموذج أسّي** يُمثِّل المعطيات الأسّية.

عندما تتأكّد من أن المعطيات أسّية، استعمل وظيفة **ExpReg** (Exponential Regression) في الحاسبة البيانية لتجد نموذجًا أسّيًا لهذه المعطيات. تُسمى عملية إيجاد نموذج أسّي لتمثيل مجموعة معطيات عملية **انحدار أُسّي** **Exponential Regression** . تقتصر النماذج الأسّية التي تولِّدها الحاسبة البيانية على الدوال من النوع $f(x) = ab^x$. وهكذا لا يُمكن تمثيل سحب هذه الدوال في الحاسبة.

مثـــال 2 تطبيق على صقل المجوهرات

يُبيّن الجدول المقابل كتل عدد من قطع الماس وقيمًا تقريبية لأثمانها. جِد نموذجًا أسّيًا لهذه المعطيات. استعمل النموذج الذي وجدته لتقدِّر كتلة ماسة ثمنها 000 325 2 دينار.

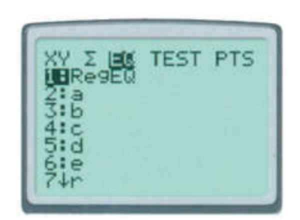
قيم الماس	
الكتلة (قيراط)	القيمة دينار
0.5	920 000
1.0	1 160 000
2.0	15 800 000
3.0	2 150 000
4.0	2 900 000

الخطوة 1 أدخل المعطيات في لائحتين في الحاسبة. استعمل وظيفة الانحدار الأسّي ExpReg .

تعطيك الحاسبة نموذجًا أسّيًا لهذه المعطيات، هو الدالّة الأسّية $V(w) = 805\,462.6(1.38)^w$ حيث يرمز V إلى قيمة الماسة، ويرمز w إلى كتلتها مقيسة بالقيراط.

الخطوة 2 مثِّل بيانيًّا معطيات الجدول، وارسم بيان الدالة لتتحقق من أنها تُشكل نموذجًا لهذه المعطيات. لإدخال قاعدة الدالّة أمام Y1 في شاشة Y = ، اضغط المفتاح VARS واختر **5 : Statistics** ثم اضغط ENTER .
تحرّك إلى EQ واختر 1:Reg EQ .





أدخل 000 325 2 أمام Y2 لرسم الدالّة $V = 2\,325\,000$. استعمل وظيفة التقاطع للحاسبة. قد تحتاج إلى تعديل بعدَي الشاشة لكي تظهر نقطة التقاطع.

كتلة الماسة التي ثمنها 000 325 2 دينار، تقارب 3.29 قراريط تقريبًا.

تـذكَّـرْ

إذا لم تشاهد r^2 و r على شاشة الحاسبة. عندما تحسب الانحدار، اضغط المفتاح CATALOG ثم المفتاح 2^{nd} 0 واختر DiagnosticOn .



2. استعمل الانحدار الأسّي لإيجاد نموذج لمعطيات الجدول أدناه. متى يصل عدد البكتيريا إلى 2000؟

الزمن (min)	0	1	2	3	4	5
عدد البكتيريا	200	248	312	390	489	610

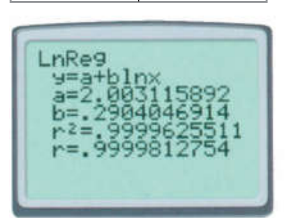
يُمكن تمثيل الكثير من معطيات الواقع بدوال لوغاريتمية. يُمكنك استعمال الحاسبة البيانية لإيجاد **انحدار لوغاريتمي Logarithmic Regression** .

مثـــال 3 تطبيق على الفيزياء

يُبيّن الجدول المقابل قوة التفجير على مقياس ريختر لكميات معينة من مادة TNT جِد دالّة لوغاريتم طبيعي تشكّل نموذجًا لهذه المعطيات. استعمل النموذج الذي وجدته لتقدير كمية متفجّرات من مادة TNT يُعادل انفجارها زلزالاً بقوة 6.5 على مقياس ريختر.

قوة التفجير	
TNT (طن)	القوّة
	2.0
	3.0
	4.0
	5.0

أدخل المعطيات في الحاسبة البيانية في لائحتين، ثم استعمل وظيفة الانحدار اللوغاريتمي. اضغط على المفتاح STAT واختر CALC ثم **9 : LnReg** . الدالّة $R(x) = 2 + 0.29 \ln x$ ، حيث R قوة الزلزال على مقياس ريختر و t كمّية المتفجرات من مادة TNT بالأطنان، هي نموذج لوغاريتمي لمعطيات الجدول.



تُبيّن قيمة r^2 أن النموذج مناسب لتمثيل معطيات الجدول.

استعمل وظيفة التقاطع للحاسبة البيانية لكي تجد x عندما $y = 6.5$. تبلغ كمية المتفجّرات من مادة TNT التي يُعادل انفجارها زلزالاً بقوة 6.5 على مقياس ريختر 5.3 ملايين طن تقريبًا.





3. استعمل الانحدار اللوغاريتمي لإيجاد دالّة تشكّل نموذجًا لمعطيات الجدول. متى تصل السرعة إلى 8.0 مترًا في الثانية؟

الدقيقة	1	2	3	4	5	6	7
السرعة (m / s)	0.5	2.5	3.5	4.3	4.9	5.3	5.6

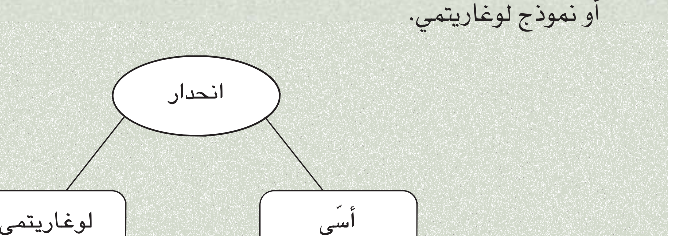
فكِّر وناقش

1. كيف تعلم إن كان ممكنًا تمثيل معطيات بنموذج أسّي على صورة $f(x) = ab^x$ ؟

2. لِمَ لا تكفي معطيات عن نقطتين لتحديد إن كان ممكنًا تمثيل المعطيات بنموذج أسّي أو لوغاريتمي.

3. **كن منظّمًا** انسخ المخطّط أدناه ثم أكمله. بيّن الإجراءات والأدوات لإيجاد نموذج أسّي أو نموذج لوغاريتمي.





7-4 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** ___?___ ممكن عندما يكون ممكنًا تمثيل المعطيات بدالّة من النوع $f(x)=ab^x$.
(الانحدار الأسّي أو الانحدار اللوغاريتمي).

انظر المثال 1

حدّد إن كانت f دالة أسّية من النوع $f(x) = ab^x$. إذا كانت كذلك، حدّد النسبة الثابتة.

2

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$-2\frac{5}{7}$	−1	11	95	683

3

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	27	18	12	8	$5\frac{2}{3}$

4

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	5	1	−3	−7	−11

5

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$2\frac{1}{4}$	3	4	$5\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{9}$

انظر المثال 2

6 **فيزياء** يُبيّن الجدول أدناه كم درجةً تزيد حرارة كوب شاي على حرارة الغرفة، عندما يبرد .
جِد نموذجًا أسيًّا يمثّل هذه المعطيات. استعمل النموذج لتقدِّر كم من الدقائق سيمضي قبل أن يتدنّى الفرق بين حرارة الكوب وحرارة الغرفة إلى أقل من 4 درجات.

كيف يبرد الشاي					
الزمن بالدقائق	0	1	2	3	4
درجات الحرارة فوق حرارة الغرفة	55	48	43	38	33

انظر المثال 3

7 **انتساب** يُبين الجدول أدناه تزايد عدد المنتسبين إلى أحد الأندية الاجتماعية بالأشهر.
جِد نموذجًا لوغاريتميًّا طبيعيًّا يمثِّل معطيات الجدول. استعمل النموذج لتجد كم شهرًا يلزم لهذا النادي حتى يصل عدد أعضائه إلى 8000.

الانتساب إلى النادي					
الزمن بالأشهر	6	18	42	90	150
عدد المنتسبين	3000	4000	5000	6000	7000

تمـــارين وحلُّ مســـائـل

حدِّد إن كانت f دالّة أسّية من النوع $f(x) = ab^x$. إذا كانت كذلك، حدِّد النسبة الثابتة.

تمارين حرّة	
لحل التمارين	أنظر المثال
11-8	1
12	2
13	4

8

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	1.25	1	0.75	0.5	0.25

9

x	−5	−3	1	3	5
$f(x)$	20	6	2	12	30

10

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	0.667	1	1.5	2.25	3.375

11

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−16	−8	−4	−2	−1

12 **علوم اجتماعية** يُبيّن الجدول المقابل تزايد عدد السائقين في إحدى الدول من سنة 1970 إلى سنة 2000. جِد نموذجًا أسّيًّا لتمثيل معطيات الجدول. استعمل النموذج لتحدد متى يتجاوز عدد السائقين 120 مليونًا.

تزايد عدد السائقين			
سنوات بعد 1970	10	20	30
العدد (بالملايين)	14.6	22.5	35.3

13 **اتصالات** يُبيّن الجدول أدناه تطوُّر عدد المشتركين في الإنترنت، في إحدى الدول، من سنة 1990 إلى سنة 2000. جِد نموذجًا أسّيًّا لتمثيل معطيات الجدول. استعمل النموذج لتحدِّد متى يتجاوز عدد المشتركين في هذه الدولة 100 مليون.

أعداد المشتركين بالأنترنت											
سنوات بعد 1990	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الأعداد (بالملايين)	4.4	5.5	6.6	7.3	9.1	8.5	8.7	11.1	15.7	19.6	23.6

14 **بيئة** تفيد المعلومات عن طائر الغرنوق المهدَّد بالانقراض، أنّ أعداده آخذة بالتزايد. يُبيّن الجدول أدناه تزايد هذا العدد على مدى 55 سنة. جِد نموذجًا لوغاريتميًّا يُمثِّل تزايد أعداد هذه الطيور. متى يصل عددها إلى 500؟

أعداد طائر الغرنوق					
العدد	18	40	85	120	185
سنوات بعد 1940	5	22	40	47	57

حدِّد إن كانت معطيات الجدول أسّية. إذا كانت كذلك، استعمل الانحدار الأسّي لإيجاد نموذج يُمثِّلها.

15

x	1	2	3	4
$f(x)$	11	95	683	4799

16

x	−1	0	1	2	3
y	4	2	1	0.5	0.24

17 **تفكير ناقد** تُفيد المعطيات عن أحد أنواع الطيور في أفريقيا أن عددها تناقص من أكثر من نصف مليون سنة 1930 إلى 15 000 اليوم، ما المعطيات الإضافية التي تلزمك لتقرُّر إن كان هذا التناقص أسّيًّا؟

18 **بيئة** تُفيد إحدى الدراسات بأن معدل بقاء نوع من البقر على قيد الحياة، في إحدى المناطق الباردة، يتأثر بسَمْك الثلج في الربيع. فإذا كان سَمْك الثلج 5000 mm يكون المعدل حوالي 0.9% . وإذا كان السَمْك 6700 mm يكون المعدل حوالي 0.3% بينما هو 0.17% عندما يكون سَمْك الثلج 8250 mm. جِد دالّة أسّية لتمثيل هذه المعطيات. استعمل النموذج لتقدير معدَّل بقاء نوع من البقر على قيد الحياة عندما يكون سَمْك الثلج 4000 mm .

19 **تكنولوجيا** يُبيّن الجدول المقابل تطور مبيعات الآلات المحمولة لسماع الموسيقى خلال العطلة الصيفية. افترض أن مبيع هذه الآلات يتزايد بالوتيرة نفسها. اكتب دالّة أسّية لتمثيل معطيات الجدول. استعمل النموذج لتقدير المبيعات في السنوات الثلاث التالية.

آلات الموسيقى المحمولة

المبيعات بالآلاف

0
200
400
600
800

62.5
300
850

2002
2003
2004

السنة

20 **اكتب مقولة** أنشئ جدول قيم لدالّة أسّية مستعملاً القيم 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 للمتغيّر الحر x . جِد الفروق الأولى والثانية والثالثة. اكتب مقولة حول الفروق من الرتبة n مفترضًا أن مجال الدالّة هو مجموعة الأعداد الطبيعية.

21 **اكتب** كيف تعرف أن مجموعة معطيات هي أسّية وليست خطّية أو تربيعية أو تكعيبية؟

22 استعمل معطيات الجدول أدناه.

x	0	2	3	4	5	6
y	18	32	43	57	76	101

أ) أيُّهما يمثِّل معطيات الجدول بشكل أفضل: نموذج أسّي أم نموذج لوغاريتمي؟ أوضح ذلك.

ب) لو أن الصف الثاني في الجدول السابق تضمّن $\log y$ عوضًا عن y ، أي نموذج يمثِّل معطيات الجدول الجديد بشكل أفضل: نموذج أسّي أم نموذج خطّي؟ أوضح ذلك.



23 أي من الحالات التالية يُمكن تمثيلها بدالّة أسّية؟

(أ) كلفة ترتفع قيمتها 100 000 دينار شهريًّا.

(ب) مساحة مربّع يتزايد طول ضلعه عشرة عشرة.

(ج) نصف قطر لولب يزداد عرضه بنسبة 10% بعد كل دورة.

(د) عدد سكان يتضاعف كلما تضاعف الزمن.

24 أي من مجموعات الأعداد التالية أسّية؟

(أ) (3,12.5)،(2,2.5)،(1,0.5)،(0,0.1)

(ب) (3,20)،(2,7)،(1,0)،(0,−1)

(ج) (3,3.5)،(2,2)،(1,0.5)،(0,−1)

(د) (3,26)،(2,11)،(1,2)،(0,−1)

25 **جواب مختصر** جِد العدد الناقص في الجدول علما بأن معطياته أسّية.

x	0	1	2	3
y	2	3.5	■	10.71875

تحدٍّ وتوسّع

26 جد دالّة أسّية يمر بيانها في النقطتين $(2,48)$ وَ$(4,300)$. وضّح خطواتك.

27 **بيئة** تعمل سناريا في أحد المختبرات الكيميائية. تنشقت بخارًا سامًّا نتيجة عطل في إحدى الآلات. أظهر تحليل دمها بعد 4 ساعات من الحادث وجود مادة التوكسين Toxine السامّة بمعدّل $0.01006 mg/cm^3$ ، وأظهر تحليل آخر بعد ساعتين من التحليل الأول أن نسبة التوكسين صارت $0.00881 mg/cm^3$. افترض أن كمية التوكسين في الدم تتغيّر أسّيًّا بدلالة الزمن.

أ) جِد دالة أسّية تمثل المعطيات.

ب) يهدِّد التوكسين صحّة الإنسان إذا زاد معدله على $0.015 mg/cm^3$ في الدم. هل كانت كمية التوكسين التي تنشّقتها سناريا تهدِّد صحتها؟

ج) تستطيع سناريا استئناف عملها عندما يقل معدَّل التوكسين في دمها عن $0.00010 mg/cm^3$. احسب عدد الساعات اللازمة مقرّبًا إلى أقرب ساعة، لتتمكن من استئناف عملها.

مراجعة لولبية

حُل. (الدروس السابقة)

28 $|-5x| = 45$ **29** $|x+4| = 0$ **30** $|2x-4| = 3$ **31** $2|2x|+1 = 10$

جِد أصفار كل دالّة باستعمال التحليل. (الدروس السابقة)

32 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ **33** $f(x) = 3x^2 + 24x$

34 $f(x) = 2x^2 + 10x + 12$ **35** $f(x) = x^2 + 9x - 36$

حُل وتحقَّق. (الدرس 4 − 6)

36 $\frac{1}{64} = 4^{x+5}$ **37** $81^x = 3^{x+4}$ **38** $8^{\frac{x}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ **39** $216^x = 6^{2x}$

الفصل 4

دليل الدراسة: مراجعة

1 تتناقص كمية نوع من الفيتامينات في الدم بنسبة 15% في الساعة.

أ هل الدالّة التي تمثِّل هذه الحالة دالّة نمو أم دالّة تراجع؟

ب كانت كمية هذا النوع من الفيتامينات $400\ mg$. اكتب دالّة تمثِّل الكمّية المتبقية منه بعد T ساعة.

ج ارسم بيان هذه الدالّة واستعمله لتقدير الكمية المتبقية من هذا الفيتامين بعد 7 ساعات.

اذكر إن كانت كل دالّة دالّة نمو أو دالّة تراجع.

2 $f(x) = 0.5(1.25)^x$

3 $f(x) = 0.5\left(\frac{3}{2}\right)^x$

4 $f(x) = 2.5(0.25)^x$

5 $f(x) = 2(1+0.25)^x$

استعمل المعطيات التالية لحل التمارين من 6 إلى 9.

ازداد عدد التلاميذ في إحدى المدارس بنسبة 2% سنويًّا في السنوات الخمس الأخيرة. بلغ عدد التلاميذ هذه السنة 765 تلميذًا.

6 هل الدالّة التي تمثِّل هذه الحالة دالّة نمو أم دالّة تراجع؟

7 ارسم بيان هذه الدالّة.

8 استعمل بيان الدالّة لكي تقدّر عدد تلاميذ المدرسة بعد 5 سنوات.

9 متى يتجاوز عدد تلاميذ المدرسة 1000 تلميذ؟

10 ارسم بيان الدالّة $f(x)=\frac{4}{5}-3x$. اكتب الدالّة العكسية وارسم بيانها.

11 مثِّل بيانيًّا الدالّة الممثَّلة بالجدول.

x	−1	0	1	2	3
y	1	0.2	0.04	0.008	0.001

ثم مثّل بيانيًّا الدالّة العكسية، واكتب الجدول الذي يمثلها.

استعمل المعطيات التالية لحل التمرينين 12 وَ 13.

تناقص عدد سكان إحدى المدن بنسبة 3% عن عددهم السنة الماضية.

12 اكتب مقدارًا يُبيّن عدد سكان المدينة هذه السنة P_T بدلالة عددهم السنة السابقة P_L.

13 اكتب مقدارًا يُبيّن عدد سكان المدينة السنة الماضية P_L بدلالة عددهم هذه السنة P_T.

14 تسمح الدالّة $M = \frac{5}{8}K$ بتحويل المسافات من الكيلومتر إلى الميل على نحو تقريبيّ. اكتب الدالّة العكسية واستعملها لتحويل 25 ميلاً إلى كيلومترات.

15 اكتب المساواة $19^{1.5} = 27$ على الصورة اللوغاريتمية.

16 ما قيمة المقدار $\log_4 64$؟

17 ارسم بيان الدالّة $f(x)=0.6^x$ وبيان دالّتها العكسية. حدِّد مجال الدالّة العكسية ومداها.

حوِّل من الصورة الأسّية إلى الصورة اللوغاريتمية.

18 $3^5 = 243$ 19 $1 = 9^0$ 20 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$

حوِّل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسّية.

21 $\log_2 16 = 4$ 22 $\log 10 = 1$

23 $2 = \log_{0.6} 0.36$

احسب قيمة المقدار ذهنيًّا.

24 $\log_7 49$ 25 $\log_{0.5} 0.25$

26 $\log_{12}\left(\frac{1}{12}\right)$ 27 $\log 0.01$ 28 $\log_2 1$

29 أنشئ جدول قيم للدالّة $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. ارسم بيان الدالّة وبيان دالّتها العكسية باستعمال جدول القيم. حدِّد مجال الدالّة العكسية ومداها.

اكتب المقدار اللوغاريتمي على أبسط صورة.

30 $\log 25 + \log 40$

31 $\log_5 25 - \log_5 25$

32 $\log_2 8 + \log_2 16$

33 $\log 100 + \log 1000$

34 $\log_2 128 - \log_2 2$

35 $\log 10 - \log 0.1$

36 $\log 10^5 + \log 10^4$

جد قيمة المقدار .

37 $\log_3 8^2$

38 $\log_5 25^2$

39 $\log_5 16$

40 اليوم، كان مستوى شدّة صوت الموسيقى في نادي الشبيبة أعلى بـ 10 ديسيبل Decibel مما كان عليه في الأمس. يُقاس مستوى شدة صوت الموسيقى L باستعمال الدالّة $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$، حيث يرمز I إلى شدة الصوت مقيسة بالـ W/m^2 ، ويرمز I_0 إلى شدة عتبة السمع. كم ضعفًا من شدّة صوت الموسيقى أمس كانت شدّته اليوم؟

حُلّ المعادلة.

41 $5^x = 50$

42 $\log_9 x^2 = 5$

43 $3^{x-1} = \frac{1}{9}$

حُلّ المتباينة.

44 $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 64$

45 $\log x^{\frac{5}{2}} > 2.5$

46 تُستعمل العلاقة $A = P(1+r)^n$ لتحديد قيمة حساب مصرفي أودع فيه مبلغ أصلي P بفائدة سنوية معدّلها r بعد n سنة من إيداع المبلغ. أودع هكار 250 000 دينار. متى ستصبح قيمة الحساب 500 000 دينار، علمًا بأن معدّل الفائدة السنوي هو 4%؟

47 اكتب المقدار $e^{\ln(2x+1)}$ على أبسط صورة.

48 أودعت سيران 5 ملايين دينار في حساب بمعدل فائدة سنوي 6%، على أن يتم تذخير الحساب بصورة متواصلة. كم ستكون قيمة الحساب بعد 5 سنوات؟

49 كان عدد طيور الكركي المطوّق 22 طائرًا سنة 1940. ووصل، بنمو أسّي، إلى حوالي 194 سنة 2003.

أ استعمل دالة النمو الأسّي $P(t) = P_0 e^{kt}$ حيث يرمز P_0 إلى العدد الأصلي وَ $P(t)$ إلى عددها في الزمن t، لكي تحدّد معدّل النمو k .

ب بكم تقدّر عدد هذه الطيور سنة 2020 إذا استمر تكاثرها بالوتيرة نفسها؟

50 يُبيّن الجدول أدناه تزايد عدد نوع من أشجار التوابل في حقل نموذجي على مدى 6 سنوات. استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد نموذج لوغاريتمي يُمثِّل معطيات الجدول. قدّر السنة التي سيصل فيها عدد هذه الأشجار إلى 70 شجرة.

السنة	1	2	3	4	5	6
العدد	14	30	40	46	53	55

يُبيّن الجدول أدناه تزايد عدد الطيور في سرب من نوع نادر يعيش في موطن معين، عبر السنوات الـ 55 الأخيرة.

السنوات منذ بدء تدوين الأعداد	عدد الطيور
5	18
22	22
40	85
57	185

51 استعمل **ExpReg** في الحاسبة البيانية لإيجاد نموذج أسّي لمعطيات الجدول.

52 استعمل **LnReg** في الحاسبة البيانية لإيجاد نموذج لوغاريتمي لمعطيات الجدول.

53 قارن بين قيمتَي r^2 العائدتين إلى النموذجَيْن، واستنتج أي النموذجَيْن أدق في تمثيل معطيات الجدول.

الفصل 4



اختبار الفصل

اذكر إن كانت الدالّة دالّة نمو أسّي او دالة تراجع أسّي، ثم ارسم بيانها.

1. $f(x)=0.4^x$
2. $f(x)=1.3\left(\frac{2}{5}\right)^x$
3. $f(x)=\frac{7}{8}(1.1)^x$
4. $f(x)=50(1+0.04)^x$
5. اشترت تارا سيارة بِـ 13 500 000 دينار. افترض أن قيمة هذه السيارة تنخفض بنسبة 15% سنويًا. اكتب دالّة أسّية تُشكِّل نموذجًا لتحديد قيمة السيارة بدلالة الزمن (بالسنوات). ارسم بيان هذه الدالّة. متى تصبح قيمة هذه السيارة أقلّ من 3 000 000 دينار؟

ارسم بيان الدالّة، ثم اكتب دالّتها العكسية، وارسم بيانها.

6. $f(x)=x-1.06$
7. $f(x)=\frac{5}{6}x-1.06$
8. $f(x)=1.06-\frac{5}{6}x$
9. $f(x)=\frac{1}{4}\left(1.06+\frac{5}{6}x\right)$

اكتب على الصورة الأخرى (أسّية أو لوغاريتمية).

10. $16^{\frac{1}{4}}=2$
11. $16^{-0.5}=\frac{1}{4}$
12. $\log_{\frac{1}{4}} 64=-3$
13. $\log_{81}\frac{1}{3}=-\frac{1}{4}$

استعمل قيم x المعطاة لرسم بيان الدالّة، ثم اكتب الدالّة العكسية وارسم بيانها. حدِّد مجال الدالة العكسية ومداها.

14. $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$; $x=-1,0,2,4$
15. $f(x)=2.5^x$; $x=-1,0,1,2,3$
16. $f(x)=5^{-x}$; $x=-1,0,1,2,3$

اكتب على أبسط صورة.

17. $\log_4 128-\log_4 8$
18. $\log_2 12.8+\log_2 5$
19. $\log_3 243^2$
20. $5^{\log_5 x}$

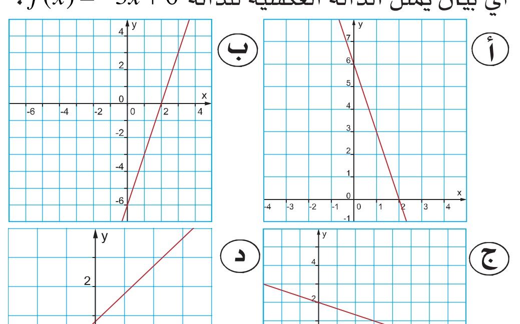
حُلّ.

21. $3^{x-1}=729^{\frac{x}{2}}$
22. $5^{1.5-x}\leq 25$
23. $\log_4(x+48)=3$
24. $\log(6x^2)-\log 2x=1$
25. يُمكن استعمال الدالّة $y=D(0.95)^x$ نموذجًا لحساب ما يتبقى في جسم إنسان عادي من فيتامين سائل بعد تناوله.
يرمز D إلى كمية الفيتامين بالمليلتر التي تم تناولها.
ويرمز y إلى الكمية المتبقية بالمليلتر بعد x دقيقة.
تناول أحدهم 15ml من الفيتامين السائل. كم من الزمن سينقضي لكي تصبح كمية الفيتامين في جسمه أقلّ من 5ml؟
26. عمر النصف للبلوتينيوم 239 هو 24 000 سنة. تربط العلاقة $e^{-kt}=\frac{1}{2}$ عمر النصف t لهذه المادة مع ثابت التراجع k. كم سيتبقى من 100 g من هذا البلوتينيوم بعد 5 سنوات؟
27. استعمل الانحدار اللوغاريتمي لإيجاد نموذج لدراسة عدد التماسيح في مجموعة، انطلاقًا من معطيات الجدول المقابل، حيث يرمز المتغيّر y إلى عدد التماسيح، ويرمز المتغيّر x إلى الزمن بالسنوات.

السنوات	1	2	3
العدد	50	62	78

اختبار تراكمي

1 أي بيان يمثّل الدالّة العكسية للدالّة $f(x)=-3x+6$ ؟



2 ما الصورة الأبسط للمقدار $\log_5 12-\log_5 4$ ؟

أ) $\log_5 48$ ب) $\log_5 8$ ج) $\log_5 16$ د) $\log_5 3$

3 ما قيمة x في المعادلة $\log_4 (x-1)^3=9$؟

أ) 27 ب) 64 ج) 65 د) 81

4 ما الدالّة الناتجة من سحب الدالّة $f(x)=\ln x$ 2 إلى اليمين، وَ 7 إلى الأسفل، ثم مط أفقي عامله 6؟

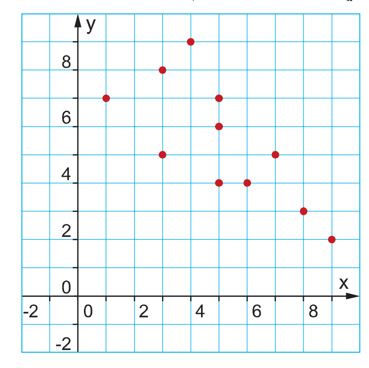
أ) $g(x)=6\ln x$

ب) $g(x)=\ln\left(\frac{x}{6}-2\right)-7$

ج) $g(x)=6\ln(x+2)+7$

د) $g(x)=6\ln\left(\frac{x}{6}+2\right)+7$

5 أي مما يلي معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً للنقاط؟



أ) $y=-\frac{10}{11}x+10$ ج) $y=-\frac{11}{10}x+1$

ب) $y=\frac{10}{11}x+10$ د) $y=\frac{11}{10}x+1$

6 أي مما يلي عامل في $P(x)=8x^3+16x^2+x+2$ ؟

أ) $4x-1$ ب) $2x+3$ ج) $x+2$ د) $3x-3$

7 أي دالّة مما يلي صفراها -1 وَ 0 ؟

أ) $f(x)=x^2+x-1$ ج) $f(x)=x^2+x$

ب) $f(x)=x^2-x$ د) $f(x)=-x^2+x$

8 معامل الارتباط لمجموعتي معطيات هو -0.24 ، بينما يقطع المستقيم الأفضل تمثيلاً المحور الثاني عند $y=10$. أي مما يلي ليس صحيحًا بالضرورة؟

أ) كلما تزايدت قيم مجموعة تناقصت قيم المجموعة الأخرى.

ب) في معادلة المستقيم الأكثر تمثيلاً، تقل قيم y المقابلة لقيم x الموجبة عن 10.

ج) يشكّل المستقيم الأفضل تمثيلاً نموذجًا جيّدًا للمعطيات.

د) مَيل المستقيم الأفضل تمثيلاً سالب.

9 أي من القطوع المكافئة التالية رأسه $(-2,-3)$؟

أ) $y=x^2+4x+1$ ج) $y=x^2-4x+1$

ب) $y=x^2+4x-1$ د) $y=x^2-4x-1$

10 أي مما يلي يساوي $3(x+y)^4$ ؟

أ) $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

ب) $3x^4+12x^3y+18x^2y^2+12xy^3+3y^4$

ج) $81x^4+y^4$

د) $3x^4+3y^4$

11 مَيل المستقيم $y=mx+b$ موجب وتقاطعه العمودي 5. بدأ مَيل المستقيم بالتناقص. أي مما يلي خطأ؟

أ) التقاطع الأفقي للمستقيم الجديد أقل من التقاطع الأفقي للمستقيم الأصلي.

ب) يقطع المستقيم الجديد المستقيم الأصلي عند $(0,5)$ فقط.

ج) مَيل المستقيم الجديد أكبر من 0.

د) المستقيم الجديد موازٍ للمستقيم الأصلي.

استعمل المصفوفة $N = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ لحل التمرينين 12 وَ 31.

12 ما هو العنصر n_{21}؟

(أ) 2 (ب) -3 (ج) 4 (د) -6

13 أي مما يلي هو مقلوب المصفوفة N؟

(أ) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$

جواب مختصر

14 ما العنصر الناقص في

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \square & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & 10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$؟

15 ما قيمة $\log_{6.25} 2.5$؟

16 استعمل قانون المعادلة التربيعية لكي تجِد الجذر الموجب للدالّة $f(x) = x^2 + 2.6x - 7.31$.

17 ما تكرار الجذر 2 في المعادلة $x^3 - 8x^2 + 20x - 16 = 0$ ؟

18 تم تحويل الدالّة الأم $f(x) = x^2$ إلى الدالّة $g(x) = \frac{1}{2}(5x)^2 - 4$. ما عامل الكبس؟

19 أي قوة من قوى العدد 2 تساوي 456 435 268؟

جواب مختصر

20 تعرض إحدى المدارس للبيع حواسيب وطابعات قديمة لتأمين مبلغ لا يقل عن 000 200 5 دينار. حدّدت المدرسة ثمن الحاسوب بـ 000 500 دينار وثمن الطابعة بـ 000 50 دينار. تأمل المدرسة أن تبيع 5 حواسيب على الأقل لكل طابعتين.

أ) اكتب نظام متباينات خطّية يمثّل المسألة حيث يمثّل x عدد الحواسيب وَ y عدد الطابعات.

ب) مثّل بيانيًّا نظام المتباينات الذي كتبته.

21 يُستعمل الراديوم - 226 (Radium - 226) ، في المعالجات الطبية، عمر النصف لهذه المادة 1620 سنة.

أ) جِد قيمة k العائدة إلى الراديوم – 226 .

ب) كم يتبقى من 100g من الراديوم – 226 بعد 3240 سنة؟ قرّب الجواب إلى أقرب غرام.

22 لدى زريان 26 شتلة صنوبر، يريد أن يزرعها، على أبعاد متساوية، حول حديقة مربَّعة ضلعها 21 مترًا. سيزرع شتلة عند كلّ زاوية.

أ) ما أكبر عدد ممكن من الشتلات يمكنه أن يزرع؟

ب) كم ستكون المسافة بين شتلتين متجاورتين؟

23 ما باقي قسمة $2x^5 + 6x^4 - 10x^3 - 2x^2 + 54x + 14$ على $x - 4$ ؟

جواب مفصّل

24 يُبيّن الجدول عدد الساعات التي يقضيها التلميذ في إنجاز الواجب المنزلي كل مساء، في عدد من الصفوف.

الصف (x)	4	6	8	10	12
عدد الساعات (y)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3

أ) حدّد إن كانت هذه المعطيات أسّية أو لوغاريتمية.

ب) مثّل معطيات الجدول بيانيًّا.

ج) جِد دالّة تشكّل نموذجًا لتمثيل هذه المعطيات. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

د) كم يقضي تلميذ الصف الثالث في الدراسة كل مساء؟ قرّب الجواب إلى أقرب نصف دقيقة.

GRADE11-CHAPTER 5 -13-final 5/13/13 3:22 PM Page 3

الفصل

5

خَصائِصُ الدّوال

Properties of Functions

الفصل الخامس

خصائص الدوال

نفايات الفضاء

تركت الرحلات الفضائية أكثر من 28 000 قطعة نفايات تسبح في الفضاء. يُمكنك أن تحلِّل الاتجاه الذي يسلكه تطوُّر أعداد هذه النفايات باستعمال الدوال وبياناتها.

هل أنت مستعد؟

المُفْرَدات

اربط المفردة بتعريفها الوارد إلى اليسار.

1 السحب
2 الميل
3 الانحدار
4 الارتباط

أ الدراسة الإحصائية للعلاقة بين متغيّرين.
ب المعدَّل الثابت لتغيُّر دالّة خطّية.
ج النسبة بين مجموعتين من القياسات.
د تحويل هندسي يُحرّك كل النقاط المسافة نفسها في الاتجاه نفسه.
هـ قياس قوة العلاقة الخطّية بين متغيّرَين واتّجاهها.

الربط بين النص والجبر

اكتب معادلة تمثّل كل حالة.

5 كلفة استئجار استديو للتسجيل 000 30 دينار للساعة الأولى، وَ 000 20 دينار لكل ساعة إضافية.

6 كمية الماء في الخزّان 30 غالونًا، يُضاف إليها 8 غالونات عن كل دقيقة تعمل فيها المضخة.

الخطوط البيانية

استعمل الرسم البياني المقابل لتحديد القيمة المطلوبة.

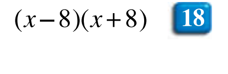
7 $f(6)$
8 $f(14)$
9 قيمة x حيث $f(x)=2$
10 قيمة x حيث $f(x)=9$
11 مَيل القطعة المستقيمة بين $x=6$ وَ $x=14$
12 مَيل القطعة المستقيمة بين $x=14$ وَ $x=18$



ضرب ثنائيات الحدود

اضرب، ثم اكتب على أبسط صورة.

13 $(x-6)(x+4)$
14 $(6-x)(4-x)$
15 $(5x+8)(2x-7)$
16 $(x^2-7)(4x+5)$
17 $(3x^2+8)(7x^2+8)$
18 $(x-8)(x+8)$





كتابة المقادير الحدودية على أبسط صورة

اكتب على أبسط صورة.

19 $8(3x^5)-(2x)^3(5x^2)$
20 $5(x+3)^2-6(x+3)$
21 $3x(4-x^3)-6x^2(x+4)$
22 $3x^3(x^2+4)^2-x(x^4-5)$

الفصل 5

دليل الدراسة : نظرة إلى الفصل

في الماضي

درست سابقًا

- الدوال المختلفة وبياناتها ومعادلاتها.
- تحويل الكثير من الدوال.
- إجراء العمليات المختلفة على مقادير من أنواع مختلفة.
- استعمال الدوال الخطّية والتربيعية والأسّية لإنشاء نماذج رياضية تمثِّل حالات من الواقع.

في هذا الفصل

سوف تتعلّم

- التمثيلات المختلفة للدوال.
- تحويل الدوال المتفرِّعة القاعدة.
- إجراء العمليات على الدوال.
- إنشاء نماذج رياضية باستعمال دوال مختلفة.

في المستقبل

يُمكنك استعمال مهارات هذا الفصل

- في الصفوف العليا حيث تدرس الحساب التفاضلي والتكاملي والإحصاء.
- في دراسة المواد الأخرى مثل الصحة والفيزياء والكيمياء والاقتصاد.
- خارج المدرسة لإنشاء نماذج لدراسة المعطيات وإجراء توقعات في ميادين مختلفة مثل الرياضة والسفر والتمويل.

المفردات Vocabulary

المفردات	Vocabulary
تركيب الدوال	Composition of functions
الدالَّة التباينية	One-to-one function
الدالَّة المتفرِّعة القاعدة	Piecewise function
الدالَّة المدرّجة	Step function

نافذة على المفردات

لكي تألف بعض المفردات الواردة في هذا الفصل، تابع الخطوات التالية:

1. من معاني كلمة **تركيب** أن تضع أشياء معًا. كيف تستعمل كلمة تركيب بهذا المعنى لكي تفهم **تركيب الدوال** في الرياضيات؟
2. إذا نظرت إلى درجات السلّم من الناحية الجانبية، فهل ما تراه يُمثِّل بيان دالّة؟ إلى أي مدى يُشبه ما تراه بيان **دالّة متفرِّعة القاعدة**؟
3. تذكر تعريف الدالّة. ما تصوُّرك **لدالَّة تباينية**؟ أعطِ أمثلة من الرياضيات ومن الحياة اليومية على دوال تباينية ودوال غير تباينية.
4. درجات السلَّم متوازية وغير متَّصلة ببعضِها. بماذا توحي إليك عبارة **الدالَّة المدرَّجة**؟





استراتيجية القراءة: اقرأ المسائل لكي تفهم

اقرأ المسألة مرة لكي تطّلع على المفهوم المتعلق بالمسألة. بعد ذلك، اقرأ المسألة بتأنّ ودقة لكي تحدِّد المطلوب. خلال قراءتك، ضع خطوطًا تحت المعلومات – المفاتيح الواردة في نص المسألة. عندما تكون المسألة متعددة الخطوات، قسِّمها إلى أجزاء، ثم ضع مخطّطًا للحل.

9. **استكشاف الفضاء** تشكِّل الدالّة $f(x)=\frac{7}{2}\sqrt{x}$ نموذجًا لتقدير بعد الأفق بالكيلومترات، عندما تكون عينا الناظر على ارتفاع x مترًا عن سطح الأرض. يُمكنك رسم بيان الدالّة التي تُقابلها على المرّيخ بمط أفقي عامله $\frac{9}{5}$. اكتب دالّة بعد الأفق على المريخ واستعملها لحساب بعد الأفق لرائد فضاء على المرّيخ، ترتفع عيناه 6 أمتار عن سطح الكوكب.

الخطوة	السؤال	الجواب
1	ما المفهوم المتعلق بالمسألة؟	تحويل دالّة جذر تربيعي بتغيير معاملاتها.
2	ما الذي تطلب المسألة الإجابة عنه؟	• إعادة كتابة الدالَّة لإدخال المعامل الجديد. • حساب قيمة الدالّة الجديدة عندما يتّخذ x قيمة معيّنة.
3	ما المعلومات – المفاتيح الضرورية لحل المسألة؟	• تمثِّل الدالّة $f(x)=\frac{7}{2}\sqrt{x}$ المسافة على الأرض. • الدالّة على المرّيخ هي مط دالّة الأرض بعامل $\frac{9}{5}$. • ترتفع عينا رائد الفضاء عن سطح المريخ 6 أمتار.
4	ما مخطَّطي لحل هذه المسألة المتعدِّدة الخطوات؟	• كتابة دالّة مسافة الأفق على المريخ. • حساب قيمتها عندما $x=6$.

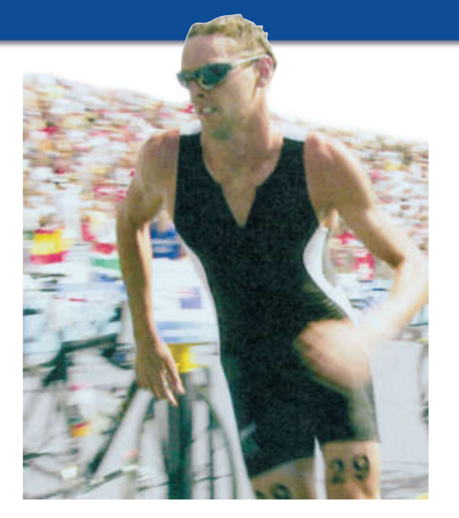
حاول

أنشئ، لكل مسألة، جدولاً بالخطوات كما هو مبيّن أعلاه.

1. طول مستطيل $x+5$ مترًا، وعرضه $x+4$ مترًا. اكتب دالّة نسبية لتمثيل نسبة مساحة المستطيل إلى محيطه. حدّد مجالاً ومدى معقولَين لهذه الدالّة.

2. تشكِّل الدالة $d=\frac{\sqrt{15w}}{2.54\pi}$ نموذجًا لحساب قطر الحبل (بالسنتيمتر) الضروري لرفع w طن. كم طنًّا تزيد الكتلة التي يُمكن رفعها بحبل قطره 3.5cm على الكتلة التي يُمكن رفعها بحبل قطره 1.5cm ؟

1–5 الدوال المتفرِّعة القاعدة
Piecewise Functions



الأهداف

يكتب دالة متفرِّعة القاعدة ويرسم بيانها.
يستعمل الدوال المتفرِّعة القاعدة ليصف حالة من الواقع.

المفردات
Vocabulary

الدالة المتفرِّعة القاعدة
Piecewise function

الدالة المدرَّجة
Step function

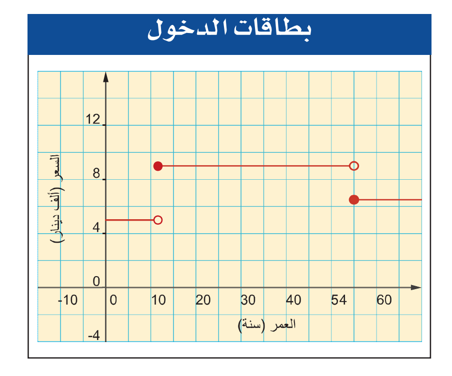
لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

يُمكنك استعمال دالَّة متفرِّعة القاعدة لتمثيل أداء متسابق في السباق الثلاثي. (مثال 4).

الدالَّة المتفرِّعة القاعدة Piecewise Function هي تجميع عدَّة دوال تشكِّل **فروعها**. تتغيّر قاعدة هذه الدالّة من قسم إلى قسم آخر في مجالها. مثلاً، يختلف ثمن بطاقة دخول المتحف الوطني باختلاف الأعمار، بحيث يتحدّد ثمن لكل فئة عمرية. وهكذا تكون قيمة الدالَّة التي تمثِّل ثمن بطاقة الدخول إلى المتحف الوطني بدلالة العمر، ثابتة على مدى كل قسم من مجالها يمثل فئة عمرية، وتختلف هذه القيم باختلاف تلك الأقسام.

مثـــال 1 تطبيق في مجال التسلية

أنشئ جدولاً لتمثيل الرسم البياني المقابل ثم اكتب وصفًا له بالكلمات.



الخطوة 1 أنشئ الجدول.

بما أن أطراف القطع المستقيمة التي تُشكِّل الرسم البياني تقسم المجال إلى 3 أقسام، استعمل نقاط الأطراف والنقاط القريبة منها لتحديد هذه الأقسام.

أسعار بطاقات الدخول	
العمر	السعر
من 5 إلى 12	5000
من 13 إلى 54	9000
أكبر من 54	6500

ينقسم مجال الدالة إلى 3 أقسام.

الأعمار التي تقل عن 13. ← $[0, 13)$

الأعمار لا تقل عن 13 و لا تقل عن 55. ← $[13, 55)$

الأعمار التي لا تقل عن 55 ← $[55, \infty)$

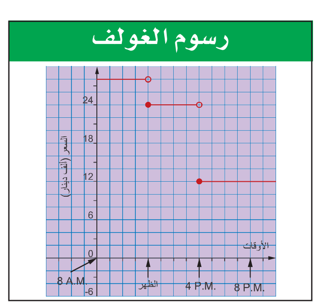
الخطوة 2 اكتب وصفًا بالكلمات.

استعمل أقسام المجال والأسعار وفق الجدول.

يدفع الولد الذي لا تزيد سنّه على 12 سنة 5000 دينار ثمنًا لبطاقته، بينما يدفع من لا تقلّ سنّه عن 12 سنة ولا تزيد على 54 سنة، 9000 دينار. ويدفع من لا تقلّ سنّه عن 55 سنة 6500 دينار.



1. أنشئ جدولاً لتمثيل الرسم البياني المقابل، ثم اكتب وصفًا له بالكلمات.



يُمكنك التعبير عن دالّة متفرِّعة القاعدة بالكتابة الداليّة. فدالّة المثال 1 تُكتب على الصورة التالية:

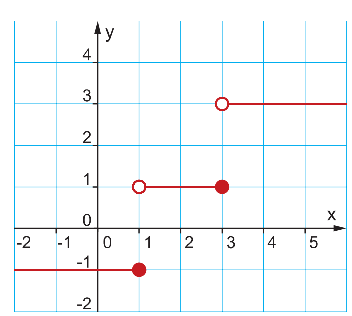
$$f(x)=\begin{cases}5000 & 0<x<13\\ 9000 & 13\le x<55\\ 6500 & x\ge 55\end{cases}$$

فرع

اقرأ ذلك كما يلي: $f(x)$ تساوي 5000 إذا كان x أكبر من 0 وأقل من 13،
9000 إذا كان x لا يقل عن 13 ويقل عن 55، 6500 إذا كان x لا يقل عن 55.

لتحديد قيمة دالّة متفرِّعة القاعدة تقابل قيمة مُدخلة، ابدأ بتحديد فرعها، ثم استعمل قاعدة دالّة هذا الفرع.

هناك نوع من الدوال المتفرِّعة القاعدة تتمتع بخاصّية مهمّة، وهي أن قيمتها ثابتة في كل قسم من أقسامها. تُسمى كل دالَّة من هذه الدوال **دالّة مدرَّجة** **Step Function**. مثال على دالّة مدرَّجة:



$$f(x)=\begin{cases}-1 & x\le 1\\ 1 & 1<x\le 3\\ 3 & x>3\end{cases}$$

أمعن النظر في بيان هذه الدالَّة لتفهم سبب تسميتها بالمدرَّجة.

مثـــال 2 حساب قيَم دالّة متفرِّعة القاعدة

جِد لكل دالّة متفرِّعة القاعدة قيمتها التي تقابل $x=-2$ وقيمتها التي تقابل $x=5$.

أ
$$f(x)=\begin{cases}-5 & x\le 0\\ 4 & 0<x\le 3\\ 12 & x>3\end{cases}$$

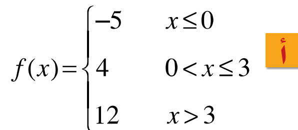
$f(-2)=-5$ بما أن $-2<0$، استعمل الفرع العائد إلى $x\le 0$

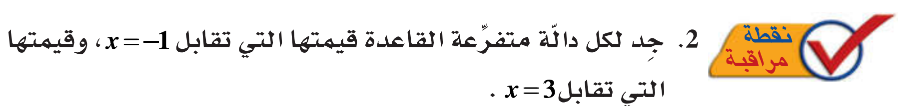
$f(5)=12$ بما أن $3<5$، استعمل الفرع العائد إلى $x>3$

ب
$$f(x)=\begin{cases}3x+4 & x<5\\ x^2-3 & x\ge 5\end{cases}$$

$f(-2)=3(-2)+4=-2$ بما أن $-2<5$، فلتستعمل الفرع العائد إلى $x<5$

$f(5)=5^2-3=22$ بما أن $5\le 5$، فلتستعمل الفرع العائد إلى $x\ge 5$





2. جِد لكل دالّة متفرِّعة القاعدة قيمتها التي تقابل $x=-1$، وقيمتها التي تقابل $x=3$.

أ
$$f(x)=\begin{cases}12 & x<-3\\ 15 & -3\le x<6\\ 20 & x\ge 6\end{cases}$$

ب
$$f(x)=\begin{cases}3x^2+1 & x<0\\ 5x-2 & x\ge 0\end{cases}$$

مثـــال 3 رسم بيان دالّة متفرِّعة القاعدة

ارسم بيان كل دالّة.

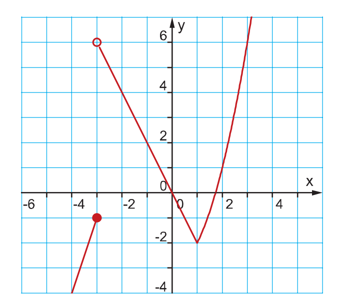
أ $f(x)=\begin{cases}-4 & x<2\\ 4 & x\geq 2\end{cases}$

يتألف بيان الدالّة من جزءين كل منهما نصف مستقيم. بما أن المستقيم $x=2$ يقسم مجال الدالّة إلى قسمين، فاحسب قيمة الدالّة عند هذه القيمة باستعمال فرعَي قاعدتها. بما أن $f(x)=-4$ إذا كان $x<2$ ، فلترسم النقطة $(2,-4)$ كدائرة صغيرة مفرغة، ثم ارسم انطلاقًا منها نصف مستقيم أفقيًّا نحو اليسار. وبما أن $f(x)=4$ إذا كان $x\geq 2$ ، فلترسم النقطة $(2,4)$ كدائرة صغيرة ممتلئة، وارسم انطلاقًا منها نصف مستقيم أفقيًّا إلى اليمين.

ب $g(x)=\begin{cases}3x+8 & x\leq -3\\ -2x & -3<x<1\\ x^2-3 & x\geq 1\end{cases}$

x	$3x+8$	$-2x$	x^2-3
-4	-4		
-3	-1	6	
-2		4	
-1		2	
0		0	
1		-2	-2
2			1
3			6

تتألف الدالَّة من فرعَين خطيّيَّن ومن فرع تربيعي. ينقسم مجال الدالّة عند $x=-3$ وَ $x=1$. استعمل جدول قيم لرسم بيان كل فرع.



أضف دائرة ممتلئة عند $(-3,-1)$ ودائرة مفرغة عند (6 ,3-)، بحيثُ يُحدّد البيان بوضوح قيمة الدالّة عند $x=-3$. لا حاجة لوضع دائرة عند $(1,-2)$ لأنّ بيانا الفرعين يلتقيان عند هذه النقطة.



3. ارسم بيان الدالة.

أ $f(x)=\begin{cases}4 & x\leq -1\\ -2 & x>-1\end{cases}$

ب $f(x)=\begin{cases}-3x & x<2\\ x+3 & x\geq 2\end{cases}$

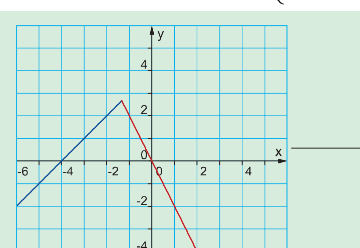
لاحظ أن الدالّة المتفرِّعة القاعدة ليست بالضرورة دالّة متّصلة، مما يعني أن بيانها قد يتضمّن نقاط انقطاع. لكي تكتب قاعدة لدالّة متفرِّعة القاعدة حدِّد أوّلاً أين ينقسم مجال الدالّة، ثم اكتب قاعدة لكل قسم. بعد ذلك جمِّع القواعد في كتابة داليّة.



من طالب إلى طالب — **رسم بيانات الدوال المتفرِّعة القاعدة**

عندما أرسم بيان دالّة متفرِّعة القاعدة، أرسم بيان كل فرع كما لو كان دالّة مستقلّة. بعد ذلك، أمحو جزء البيان العائد إلى قيم x التي تقع خارج القسم.

مثال
$$f(x)=\begin{cases} x+4 & x<-2 \\ -2x & x\geq -2 \end{cases}$$



مثال 4 تطبيق رياضي

اشترك آلان في سباق ثلاثي طوله 153 km . سبح 3 km في ساعة وقطع 120 km راكبًا دراجته في 4 ساعات، ثم ركض 30 km في 3 ساعات. أنشئ رسمًا بيانيًّا يُبيّن ما قطعه آلان بدلالة الزمن، ثم اكتب دالّة متفرِّعة القاعدة لهذا البيان.

الخطوة 1 أنشئ جدولاً يُلخِّص المعطيات.
استعمل العلاقة بين السرعة والزمن والمسافة لتحديد معدَّل سرعة آلان في كل مرحلة من السباق.

أداء آلان في السباق الثلاثي			
المرحلة	الزمن	المسافة	السرعة
سباحة	1	3	3
بالدراجة	4	120	30
ركض	3	30	10

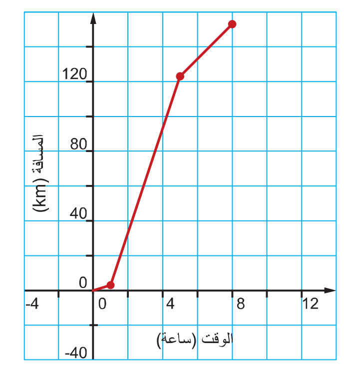
الخطوة 2 بما أنّ الزمن هو المتغيّر الحر، فلتحدِّد أين ينقسم مجال الدالّة باستعمال معطيات الزمن:

سباحة: $0\leq t\leq 1$ سبح ساعة واحدة.

بالدراجة: $1<t\leq 5$ ركب الدراجة 4 ساعات.

ركضًا: $5<t\leq 8$ ركض 3 ساعات.

الخطوة 3 أنشئ الرسم البياني.
بعد ساعة، كان آلان قد قطع $3\ km$. بلغ ما قطعه حتى نهاية المرحلة الثانية، (أي بعد 5 ساعات)، $123\ km$. أخيرًا أكمل الـ الكيلومترات الـ $153\ km$ في 8 ساعات.



انتبه!
يُمكن كتابة العلاقة $d=vt$ على صورة $v=\frac{d}{t}$، لإيجاد معدّل السرعة.

الخطوة 4 اكتب دالّة خطّية لكل فرع.

استعمل صورة الميل – النقطة.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

سباحة: $d=3t$. استعمل $m=3$ والنقطة $(0, 0)$

بالدراجة: $d=30t-27$. استعمل $m=30$ والنقطة $(5, 123)$

ركضًا: $d=10t+73$. استعمل $m=10$ والنقطة $(8, 153)$

الكتابة الداليّة لهذه الدالّة هي:

$$d(t)=\begin{cases}3t & 0\le t\le 1\\ 30t-27 & 1<t\le 5\\ 10t+73 & 5<t\le 8\end{cases}$$



4. يعمل ريباز في أحد مطاعم العاصمة. يتقاضى 8 000 دينار عن كل ساعة يعمل فيها ما دام عدد ساعاته الأسبوعية لا يتجاوز 40 ساعة. ويتقاضى 12 000 دينار عن كل ساعة يعمل فيها زيادة على الساعات الأربعين. أنشئ رسمًا بيانيًّا يمثّل ما يتقاضاه سرجون بدلالة عدد الساعات التي يعمل فيها خلال الأسبوع، علمًا بأنه لا يستطيع العمل أكثر من 60 ساعة في الأسبوع. اكتب دالّة متفرِّعة القاعدة لهذا البيان.

فكِّرْ وناقش

1. أوضح إن كان ممكنًا الحصول على دالّة متفرِّعة القاعدة قيمها ثابتة في كل فرع، ولا ينقطع بيانها.



2. **كن منظّمًا** انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. اكتب في كل إطار وصفًا لمجال كل دالّة ومداها، ثم أعطِ مثالاً عليها.

الدالّة	المجال	المدى	المثال
متفرِّعة القاعدة			
متدرِّجة			

1–5 التمــاريــن

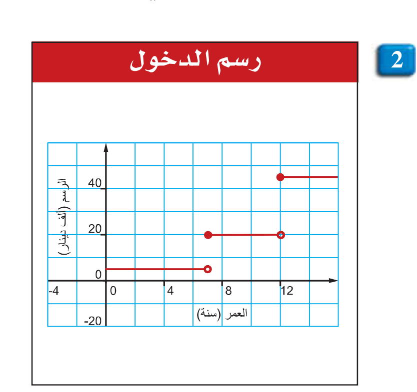
تمـــارين موجّهــة

1 أوضح العلاقة بين الدالّة المتدرِّجة والدالّة المتفرِّعة القاعدة.

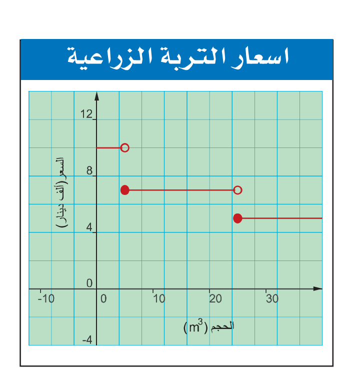
انـظر المثــال 1

أنشئ جدولاً لكل رسم بياني ثم اكتب وصفًا له بالكلمات.

2 رسم الدخول



3 اسعار التربة الزراعية



انـظر المثــال 2

احسب قيمة الدالّة عند $x=-6$ وَ $x=3$.

4 $f(x)=\begin{cases}-8 & x\le -5\\ 0 & -5<x<6\\ 5 & x\ge 5\end{cases}$

5 $g(x)=\begin{cases}5x-9 & x<2\\ 4-x^2 & x\ge 2\end{cases}$

انـظر المثــال 3

ارسم بيان الدالّة.

6 $f(x)=\begin{cases}7 & x<-2\\ -2 & x\ge -2\end{cases}$

7 $g(x)=\begin{cases}-2x+8 & x\le 4\\ \frac{1}{2}x & x>4\end{cases}$

انـظر المثــال 4

8 كلفة استئجار مركب صغير 20 000 دينار في الساعة للساعات الأربع الأولى، وَ 3 000 دينار لكل ساعة إضافيّة. أنشئ رسمًا بيانيًّا يُمثّل كلفة استئجار القارب لعدد ساعات لا يزيد على 8 ساعات.

تمــارين وحلُّ مســائـل

لحل التمارين	أنظر المثال
10-9	1
12-11	2
14-13	3
15	4

(تمارين حرّة)

أنشئ جدولاً لكل رسم بياني، ثم اكتب وصفًا له بالكلمات.

9 اسعار العشاء المفتوح

10 متوسط الدخل بحسب سنوات الخدمة

احسب قيمة الدالّة عند $x=-2$ و $x=2$ و $x=6$.

11 $f(x)=\begin{cases} 9x-2 & x<-3 \\ x^2-3 & -3\le x<1 \\ 5 & x\ge 1 \end{cases}$

12 $f(x)=\begin{cases} 12-9x & x\le 0 \\ x^2+3x & 0<x<3 \\ 4^x & x\ge 3 \end{cases}$

ارسم بيان الدالّة.

13 $f(x)=\begin{cases} \frac{3}{4}x+1 & x<4 \\ \frac{3}{4}x-2 & x\ge 4 \end{cases}$

14 $g(x)=\begin{cases} -2x-5 & x<-2 \\ x^2-3 & x\ge -2 \end{cases}$

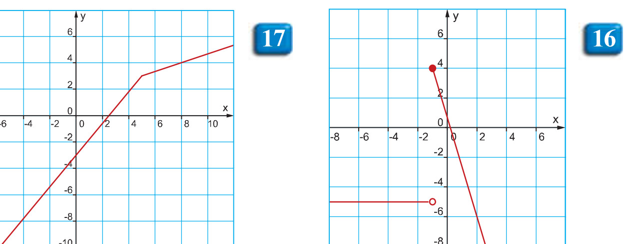
15 تتغير كلفة جز صوف الكبش بتغيّر كتلته. يُبيّن الجدول المقابل أسعار جز الكباش التي يتقاضاها هشيار. أنشئ رسمًا بيانيًا يُمثّل كلفة جز الكباش التي لا تزيد كتلتها على 60 kg. اكتب دالّة متفرِّعة القاعدة تُعبّر عن ذلك.

أسعار جز الكباش

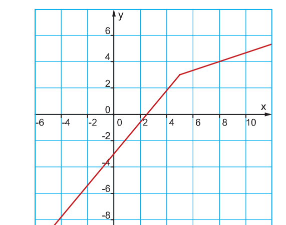
الكتلة (kg)	السعر (دينار)
15 أو أقل	30 000
بين 15 و 50	50 000
50 أو أكثر	75 000

اكتب دالّة متفرِّعة القاعدة لكل رسم بياني.

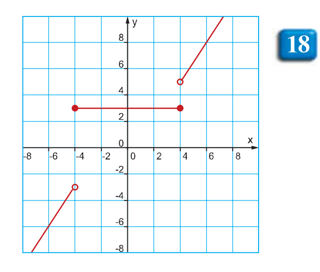
16



17



18



19 **مواقف السيارات** يتقاضى موقف سيارات في العاصمة 6 000 دينار عن كل ساعة مقابل ركن السيارة خلال الساعات الأربع الأولى، ويتقاضى عن كل ساعة إضافية 3 000 دينار. اكتب دالّة متفرِّعة القاعدة لحساب كلفة ركن سيارة بدلالة عدد ساعات ركنها في الموقف.

20 **سفر** سافر هلو وتوانا بالسيارة. تُبيّن الصورة المقابلة السرعة المتوسِّطة لسيارتهما في كل مرحلة. سارا مدة 30 دقيقة في المدينة بسرعة متوسِّطها 45 km / h، ثم مدة 3 ساعات على الطريق السريع بسرعة متوسِّطها 90 km / h، ثم 30 دقيقة بسرعة متوسِّطها 60 km / h.



أ) اكتب دالّة متفرِّعة القاعدة تُمثِّل ما قطعه هلو وتوانا بدلالة الزمن (بالساعة).

ب) ارسم بيان هذه الدالّة.

ج) **ماذا لو ...؟** كم ستكون مدة الرحلة لو أن السرعة المتوسطة للسيارة كانت في المرحلة الثانية 75 km / h، عوضًا عن 90 km / h.

اكتب كل دالّة على صورة دالّة متفرِّعة القاعدة.

21 $f(x)=|x|$ **22** $g(x)=|x-4|$ **23** $h(x)=2|x|-4$

24 **خدمات** تتقاضى مؤسسة هيوا لتوصيل الطرود 11 000 دينار عن كل طرد لا تزيد كتلته على 2kg، وتضيف 3 000 دينار إلى هذا السعر عن كل كيلوغرام إضافي. أنشئ الرسم البياني لكلفة توصيل طرد لا تزيد كتلته على 8kg. اكتب دالّة متفرِّعة القاعدة تُعبّر عن هذا الواقع.

ارسم بيان الدالّة.

25 $$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & x\leq 0\\ 2^x-4 & 0<x\leq 3\\ 2x-2 & x>3\end{cases}$$

26 $$g(x)=\begin{cases}-3 & x\leq 0\\ 3^x-4 & x>0\end{cases}$$

جِد مجال الدالّة ومداها.

27 $$g(x)=\begin{cases}-\frac{5}{2}x-2 & x\leq -2\\ -x-5 & x>-2\end{cases}$$

28 $$h(x)=\begin{cases}x^2-2x-3 & x<4\\ 3x-7 & x\geq 4\end{cases}$$

29 **تفكير ناقد** لماذا تمثِّل دالّة متفرِّعة القاعدة أفضل تمثيل ارتفاع مصعد كهربائي عن الأرض بعد t ثانية من إقلاعه؟ هل يُمكن لها أن تكون دالّة متدرِّجة؟

30 **اكتب** ما السبب الذي يجعل استعمال الدوال المتفرِّعة القاعدة أفضل لتمثيل حالات من الحياة اليومية؟ ضمِّن جوابك مثالَين على الأقل.



31 تتقاضى إحدى وكالات تأجير السيارات 000 15 دينار في اليوم إذا لم يتجاوز عدد الكيلومترات التي تقطعها السيارة 200 km. وإذا قطعت السيارة أكثر من 200 km يترتَّب على المستأجر دفع 50 دينارًا عن كل كيلومتر إضافي. أي من الدوال أدناه تمثِّل كلفة استئجار السيارة بدلالة عدد الكيلومترات التي تقطعها في اليوم؟

(أ) $f(x)=\begin{cases}15\ 000 & 0\le x\le 200\\ 50x & x>200\end{cases}$

(ب) $f(x)=\begin{cases}15\ 000x & 0\le x\le 200\\ 15\ 000x & x>200\end{cases}$

(ج) $f(x)=\begin{cases}15\ 000 & 0\le x\le 200\\ 15\ 000+50(x-200) & x>200\end{cases}$

(د) $f(x)=\begin{cases}15\ 000 & 0\le x\le 200\\ 15\ 000+50x & x>200\end{cases}$

32 أي من الدوال التالية دالّة متَّصلة؟

(أ) $f(x)=\begin{cases}3x-4 & x<0\\ -1 & x\ge 0\end{cases}$

(ب) $g(x)=\begin{cases}5x-4 & x<3\\ 2x+5 & x\ge 3\end{cases}$

(ج) $h(x)=\begin{cases}x^2 & x<-2\\ 2x & x\ge -2\end{cases}$

(د) $\ell(x)=\begin{cases}3x+4 & x\le -1\\ 3^x+4 & x>-1\end{cases}$

33 جِد $f(-2)$ حيث $f(x)=\begin{cases}1-5x & x<-5\\ 3-x^3 & -5\le x<-2\\ 5-x^2 & x\ge -2\end{cases}$

(أ) -5 (ب) 1 (ج) 9 (د) 11

تحدٍّ وتوسّع

دالّة الصحيح الأعلى هي الدالّة $f(x)=[x]$ حيث يرمز $[x]$ إلى أكبر عدد صحيح لا يزيد على x. تستعمل الحاسبات البيانية الرمز $\text{Int}(x)$ للدلالة على هذه الدالّة. إذا كان ثمن علبة العصير 750 دينارًا، فإنّ الدالة $f(x)=\text{Int}\left(\frac{x}{750}\right)$ تُعطيك عدد علب العصير التي يُمكنك شراؤها بـ x دينار.

35 اكتب دالّة لحساب عدد علب البطاطا المقلية التي يُمكنك شراؤها بـ x دينارًا علمًا بأنّ ثمن العلبة 650 دينارًا. استعمل هذه الدالّة لتحديد عدد علب البطاطا المقلية التي يُمكنك شراؤها بعشرة آلاف دينار.

دالّة الصحيح الأدنى هي الدالة $f(x)=[x]$ حيث يرمز $[x]$ إلى أصغر عدد صحيح لا يقلّ عن x. مثلاً: $f(2.9)=[2.9]=3$.

35 يتقاضى موقف سيارات 4 000 دينار مقابل ركن السيارة مدة لا تتجاوز الساعة الواحدة. إذا تخطّت مدة الركن الساعة، يتقاضى الموقف 1500 دينار عن كل ساعة إضافيّة، أو كسر ساعة إضافية. اكتب دالّة لتمثيل كلفة ركن السيارة بدلالة الزمن t (بالساعة)، واستعمل هذه الدالّة لحساب كلفة ركن السيارة 5 ساعات وَ 23 دقيقة.

مراجعة لولبية

36 **هندسة** هناك علاقة خطّية تربط بين عدد أضلاع مضلّع منتظم ومجموع قياسات زواياه الداخلية، كما يُبيّن ذلك الجدول أدناه. اكتب دالّة تُعبّر عن هذه العلاقة. (الدرس 1 – 2)

عدد الأضلاع	3	4	5	6	8
مجموع قياسات الزوايا الداخلية بالدرجة	180	360	540	720	1080

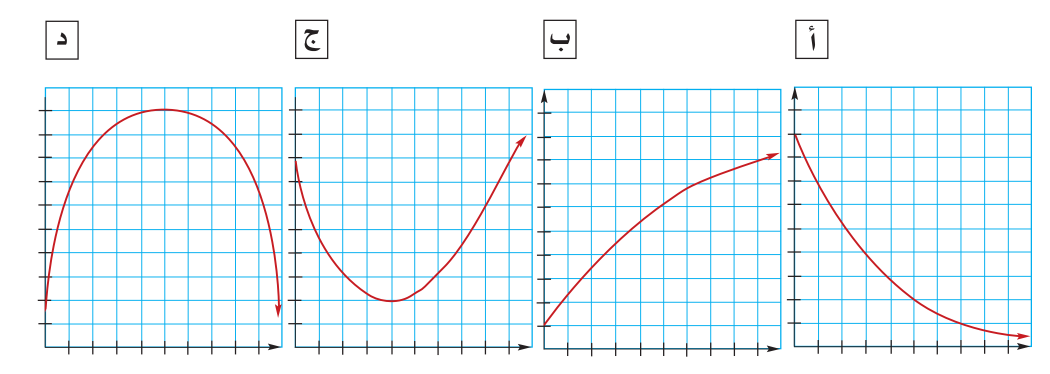
حدّد مقاربات كل دالّة ومجالها ومداها. (الصفوف السابقة)

37 $f(x)=\frac{4}{x-1}-3$

38 $f(x)=\frac{3}{x+2}+1$

39 $f(x)=\frac{5}{x-3}+1$

حدّد لكل حالة، الرسم البياني المناسب للتعبير عنها. (الدرس 5 – 1)



40 طرحت شركة أحد منتجاتها في السوق من دون أن تُنظّم دعاية له، فانخفضت أرباحها! ثم عادت وأطلقت حملة دعائية للمنتج فارتفعت أرباحها.

41 تنخفض قيمة الحاسوب مع الزمن.

42 تنخفض أرباح المثلجات في الشتاء، وترتفع في الربيع والخريف، وترتفع كثيرًا في الصيف.

43 ترتفع درجات الحرارة باطراد من الساعة 12:00 ب. ظ. حتى 5:00 ب. ظ.



استكشاف الفروق والنسب

تذكَّر أنّ ثبات الفروق أو النسب يساعدك على تحديد نوع الدالّة التي ستستعملها لتمثيل مجموعة معطيات. يُمكنك استعمال برنامج EXCEL الحاسوبي لحساب الفروق والنسب بسرعة.

استعمل معطيات الجدول المقابل. استعمل برنامج EXCEL لحساب الفروق الأولى والفروق الثانية والنسب. حدّد الثابت منها إن وجد.

x	5	6	7	8	9	10	11
y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4

ادخل أولاً عناوين الصفوف كما هو مُبيّن. لا تنس أن الفروق بين قيم x يجب أن تكون متساوية.

1 احسب الفروق. أدخل القاعدة $=C2-B2$ في الخلية C3 لحساب الفرق بين القيمتين الأوليين من قيم y. انسخ محتوى C3 إلى الخلايا من D3 إلى H3.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	الفروق الأولى		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	الفروق الثانية							
5	النسب							

2 احسب الفروق الثانية. أدخل القاعدة $=D3-C3$ في الخلية D4 لحساب أول الفروق الثانية. انسخ محتوى D4 إلى الخلايا من E4 إلى H4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	الفروق الأولى		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	الفروق الثانية			0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
5	النسب							

3 احسب النسب. أدخل القاعدة $=C2/B2$ في الخلية C5 لحساب نسبة القيمتين الأوليين من قيم y. انسخ محتوى C5 إلى الخلايا من D5 إلى H5.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	الفروق الأولى		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	الفروق الثانية			0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
5	النسب		3.40	1.94	1.61	1.45	1.36	1.30

يُبيّن ما سبق أن الفروق الثانية ثابتة.

حاول

استعمل، لكل مجموعة معطيات، برنامج EXCEL لحساب الفروق الأولى والفروق الثانية والنسب. حدّد الثابت منها إن وجد.

1

x	2	4	6	8	10
y	−20	124	364	700	1132

2

x	4	7	10	13	16	19
y	1.31	2.48	3.65	4.82	5.99	7.16

3

x	3	4	5	6	7
y	8.96	35.84	143.36	573.44	2293.8

4

x	1.5	3	4.5	6	7.5
y	−9	15	57	117	195

5 **تفكير ناقد** أي نوع من الدوال يبدو الأنسب لتمثيل معطيات التمرين 4؟ برّر جوابك.

2-5 تحْويلاتُ الدوالّ
Transforming Functions



«أعتذر عن تأخري في دفع القسط، ولكني أنتظر تحويلاً»

الأهداف

يُحوّل الدوال.

يتعرّف تحويل دالّة.

لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

يُمكنك استعمال تحويلات الدوال لوصف التغيُّرات التي تطرأ على رسوم التسجيل في الجامعة. (المثال 4).

تعلَّمت في السابق كيف تحوّل دوالّ من أنواع مختلفة. يُمكنك تحويل دالّة متفرِّعة القاعدة بتحويل كل فرع من فروعها. يُلخِّص الجدول أدناه القواعد التي تحكم تحويل الدوال.



تحويلات الدالّة $f(x)$	
سحب أفقي	**سحب عمودي**
$f(x) \to f(x-h)$ إلى اليمين إذا $h>0$ إلى اليسار إذا $h<0$	$f(x) \to f(x)+k$ إلى أعلى إذا $k>0$ إلى أسفل إذا $k<0$
انعكاس حول المحور الأول	**انعكاس حول المحور الثاني**
$f(x) = -f(x)$	$f(x) \to f(-x)$
مط أو كبس أفقي	**مط أو كبس عمودي**
$f(x) \to f\left(\frac{1}{b}x\right)$ مط إذا $b>1$ كبس إذا $0<b<1$	$f(x) \to af(x)$ مط إذا $a>1$ كبس إذا $0<a<1$

مثـــال 1 تحويل الدوال المتفرِّعة القاعدة

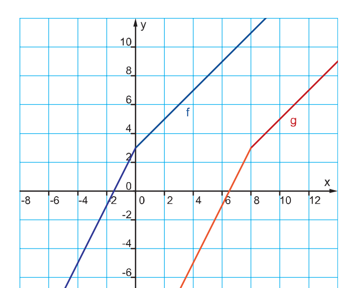
اكتب الدالّة $g(x)$ الناتجة عن تحويل الدالة $f(x)=\begin{cases} x+3 & x>0 \\ 2x+3 & x\le 0 \end{cases}$ بسحب إلى اليمين 4 وحدات.

يجب سحب كل فرع من فرعَي الدالّة إلى اليمين 4 وحدات.

عوّض عن x بالمقدار $x-4$ في قاعدة الدالّة $f(x)$، ثم اكتب القاعدة على أبسط صورة.

$$g(x)=f(x-4)=\begin{cases} (x-4)+3 & x-4>0 \\ 2(x-4)+3 & x-4\le 0 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x-1 & x>4 \\ 2x-5 & x\le 4 \end{cases}$$



تحقّق ارسم بيان الدالّتين في المستوى الإحداثي نفسه لتدعم جوابك.

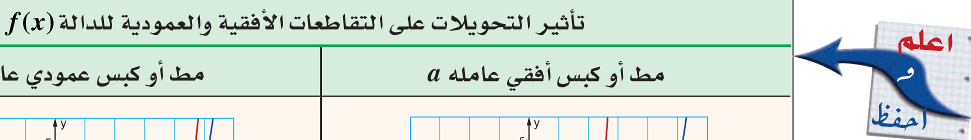
> **انتبه!**
> يُغيّر السحب الأفقي قواعد الدالّة المتفرِّعة القاعدة وفترات مجالها، بينما لا يغيّر السحب العمودي إلا قواعدها.



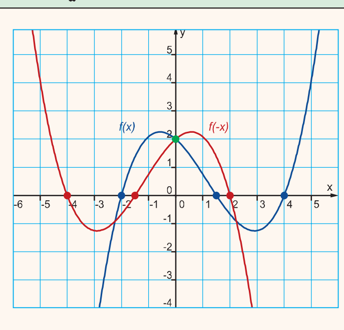
1. اكتب الدالّة $g(x)$ الناتجة عن تحويل الدالّة $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leq 0 \\ x-3 & x>0 \end{cases}$ بمط أفقي عامله 2.

عند تحويل دالّة قد تتغيّر تقاطعاتها مع محورَي الإحداثيات وقد لا تتغيّر. عندما تتعرَّف التحويل، تستطيع أن تُحدِّد تقاطعات الدالّة – الصورة مما يساعدك على رسم بيانها.





تأثير التحويلات على التقاطعات الأفقية والعمودية للدالة $f(x)$

مط أو كبس أفقي عامله a	مط أو كبس عمودي عامله b
تُضرب التقاطعات الأفقية في b. لا تتغيّر التقاطعات العمودية	لا تتغيّر التقاطعات الأفقية. تُضرب التقاطعات العمودية في a
انعكاس حول المحور الأول	**انعكاس حول المحور الثاني**
لا تتغيّر التقاطعات الأفقية. تستبدل بالتقاطعات العمودية معكوساتها.	 تستبدل بالتقاطعات الأفقية معكوساتها. لا تتغيّر التقاطعات العمودية.

مثـــال 2 تحديد التقاطعات

حدّد تقاطعات الدالّة $f(x)$ ، ثم حدّد تقاطعات الدالّة $g(x)$ من دون رسم بيانها.

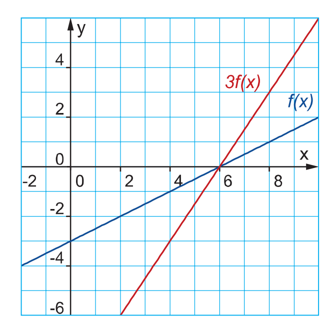
أ $f(x)=\frac{1}{2}x-3$ ؛ $g(x)=3f(x)$.

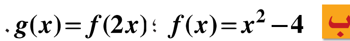
حدِّد تقاطعات الدالّة الأصلية.

$0=\frac{1}{2}x-3$ $\quad$ $f(0)=\frac{1}{2}(0)-3=-3$

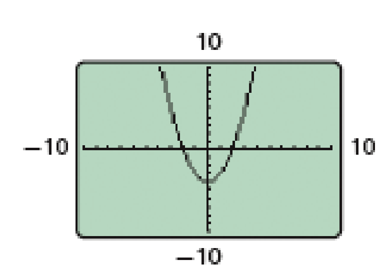
$x=6$ $\quad$ $f(0)=-3$

التقاطع العمودي -3 والتقاطع الأفقي 6. بما أن $g(x)$ مط عمودي للدالّة $f(x)$ بعامل 3 فإنّ التقاطع الأفقي لا يتبدل، بينما يُضرب التقاطع العمودي في عامل المط 3. التقاطع العمودي للدالّة $g(x)$ هو -9 .

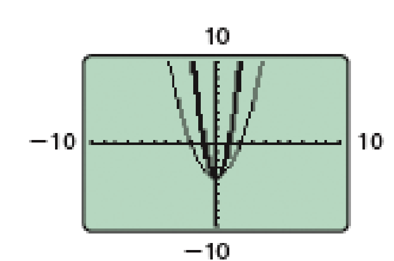


ب 
$f(x)=x^2-4$ ؛ $g(x)=f(2x)$.

تُبيِّن الحاسبة البيانيّة أنّ التقاطع العمودي للدالّة هو -4 وأنّ لها تقاطعين أفقيين هما -2 وَ 2.
لاحظ أنّ الدالّة $g(x)$ هي نتيجة كبس أفقي للدالّة $f(x)$ عامله $\frac{1}{2}$. ينتج عن ذلك أنّ التقاطع العمودي لا يتغيّر، وأن كل تقاطع أفقي يُضرب في $\frac{1}{2}$.
التقاطعان الأفقيان للدالّة $g(x)$ هما -1 وَ 1.



تحقَّق أنشئ على الشاشة نفسها بيان الدالّة $g(x)$ لتدعم جوابك.





2. حدّد تقاطعات الدالّة $f(x)$، ثم حدّد تقاطعات الدالّة $g(x)$ من دون رسم بيانها.

أ $f(x)=\frac{2}{3}x+4$ $g(x)=-f(x)$

ب $f(x)=x^2-9$ $g(x)=\frac{1}{3}f(x)$

مثـــال 3 تركيب التحويلات

ارسم بيان الدالّة $g(x)=f\left(\frac{3}{2}x\right)+4$
حيث $f(x)=-\frac{2}{3}x^2+6$

الخطوة 1 ارسم بيان الدالّة $f(x)$. يقطع بيان الدالّة $f(x)$ المحور الثاني عند $(0,6)$ والمحور الأول عند $(-3,0)$ وَ $(3,0)$.

الخطوة 2 تفحّص كل تحويل على حدة.
التحويل الأول هو كبس أفقي عامله $\frac{2}{3}$. بعد هذا التحويل لا يتغيّر التقاطع العمودي ويبقى 6، بينما يصبح التقاطعان الأفقيان -2 وَ 2.
التحويل الثاني هو سحب إلى أعلى 4 وحدات، استعمل الجدول لتبيان سحب كل من النقاط الثلاث.

نقاط التقاطع	$(-2, 0)$	$(2, 0)$	$(0, 6)$
صورها بالسحب	$(-2, 4)$	$(2, 4)$	$(0, 10)$

تحقَّق ارسم بيان الدالّتَين $f(x)$ وَ $g(x)$ في المستوى الإحداثي نفسه.



3. ارسم بيان الدالّة $g(x)=-\frac{1}{2}f(x)$ حيث $f(x)=2^x-4$.

مثـــال 4 تطبيق على حل المسائل



تستعمل إدارة إحدى الجامعات دالّة متفرعة القاعدة لتحديد رسوم تسجيل الطلاب بدلالة عدد ساعات المقررات التي يتسجّلون فيها.

هذه الدالّة هي

$$f(x)=\begin{cases}110\ 000x & 0<x<12\\ 1\ 320\ 000 & 12\le x\le 18\\ 150\ 000(x-18)+1\ 320\ 000 & x>18\end{cases}$$

قررت الإدارة زيادة الرسوم 10% لفصل الخريف، كما قررت أن تضيف رسم أعمال إدارية قدره 75 000 دينار على كل تسجيل. اكتب الدالّة التي تسمح بحساب رسوم التسجيل في فصل الخريف بدلالة x.

1 افهمِ المسألة

تتحدّد الدالَّة الجديدة بتحويل الدالّة الأصلية بتحويلَيْن: زيادة رسوم التسجيل 10%، ثم إضافة رسم الأعمال الإدارية وقدره 75 000 دينار. يمكن ترجمة رفع الرسوم 10% بضرب كل فرع من فروع الدالّة في 110% أو 1.1 مما يعني إخضاع الدالّة لمط عمودي عامله 1.1، بينما تُترجم إضافة رسم الأعمال الإدارية بسحب إلى أعلى 75 000 وحدة.

2 خطِّطْ

أنْجز التحويل الأول، ثم التحويل الثاني، واكتب الدالّة الناتجة.

3 حُلَّ

ابدأ بإيجاد نموذج الرسوم بعد زيادتها 10% .

اضرِبِ كل فرع في 1.1

$$g(x)=(1.1)f(x)=\begin{cases}(1.1)110\ 000x & 0<x<12\\ (1.1)1\ 320\ 000 & 12\le x\le 18\\ (1.1)[150\ 000(x-18)+1\ 320\ 000] & x>18\end{cases}$$

$$=\begin{cases}121\ 000x & 0<x<12\\ 1\ 452\ 000 & 12\le x\le 18\\ 165\ 000(x-18)+1\ 452\ 000 & x>18\end{cases}$$

جِد الآن نموذج الرسوم بعد زيادة رسم الأعمال الإدارية وقدره 75 000 دينار.

$$h(x)=g(x)+75\ 000=\begin{cases}121\ 000x+75\ 000 & 0<x<12\\ 1\ 452\ 000+75\ 000 & 12\le x\le 18\\ 165\ 000(x-18)+1\ 452\ 000+75\ 000 & x>18\end{cases}$$

$$=\begin{cases}121\ 000x+75\ 000 & 0<x<12\\ 1\ 527\ 000 & 12\le x\le 18\\ 165\ 000(x-18)+1\ 527\ 000 & x>18\end{cases}$$

4 تحقَّق

تحقَّق من جوابك باستعمال بعض القيم. كانت الرسوم الأصلية لـ 20 ساعة، 000 620 1 دينار. بزيادة هذه الرسوم 10% وإضافة 75 000 دينار، تُصبح هذه الرسوم 000 857 1. جِد قيم الدالّة الجديدة عند $x=20$.

$$h(20)=165\ 000(20-18)+1\ 527\ 000=330\ 000+1\ 527\ 000=1\ 857\ 000\ \checkmark$$



4. يتقاضى متحف العلوم رسم دخول 5 000 دينار عن الولد الذي يقل عمره عن 12 سنة، وَ 7500 دينار عن كل شخص لا يقل عمره عن 12 سنة. قرَّرت إدارة المتحف رفع أسعار الدخول 20% وإضافة 500 دينار على كل بطاقة، وذلك لتسهيل شرائها بواسطة آلة. اكتب دالّة تشكِّل نموذجًا للكلفة الجديدة للبطاقة بدلالة عمر الزائر.

فكِّرْ وناقش

1. ما التحويلات التي لا تغيّر التقاطع العمودي؟
2. **أوضح** السبب الذي يجعل النقطة $(0,0)$ لا تتغيّر تحت تأثير أي مط وأي كبس.
3. **كن منظّمًا** انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. اذكر تأثير كل تحويل على التقاطعات.

التحويل	التقاطع الأفقي	التقاطع العمودي
مط أو كبس أفقي بعامل b		
مط أو كبس عمودي بعامل a		
انعكاس حول المحور الأول		
انعكاس حول المحور الثاني		

اعلم واحفظ



تمارين موجّهة

انظر المثال 1

اكتب قاعدة الدالّة $g(x)$ الناتجة عن تحويل $f(x)=\begin{cases} x-3 & x\le 0 \\ 4x & x>0 \end{cases}$ **بالتحويل المحدّد.**

1 سحب إلى اليسار 6 وحدات.

2 كبس أفقي عامله $\frac{1}{4}$.

انظر المثال 2

حدّد تقاطعات الدالّة $f(x)$، ثم حدّد تقاطعات الدالّة $g(x)$ من دون أن ترسم بيانها.

3 $f(x)=4x+12$ ؛ $g(x)=\frac{1}{6}f(x)$

4 $f(x)=-x^2+16$ ؛ $g(x)=f(4x)$

انظر المثال 3

ارسم بيان الدالّة $f(x)$ ثم استعمل التحويلات لرسم بيان الدالّة $g(x)$.

5 $f(x)=-x^2+1$ ؛ $g(x)=f(2x)-1$

6 $f(x)=|x-1|-2$ ؛ $g(x)=-2f(x)$

انظر المثال 4

7 **ضرائب** تعتمد إحدى الحكومات الدالّة $T(x)=\begin{cases} 0.02x & 0<x\le 10\ 000\ 000 \\ 0.05x & x>10\ 000\ 000 \end{cases}$ لتحديد قيمة الضريبة على الدخل بدلالة مدخول الفرد x. قرَّرت الحكومة زيادة الضرائب 20% وفرض رسم مقطوع قدره 100 000 دينار يدفعه كل شخص خاضع للضريبة. اكتب الدالّة الجديدة لتحديد قيمة الضريبة بدلالة المدخول.

تمــارين وحلُّ مســائـل

تمارين حرّة	
لحل التمارين	أنظر المثال
10-8	1
16-11	2
18-17	3
19	4

اكتب قاعدة الدالّة $g(x)$ الناتجة عن تحويل الدالة $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<1 \\ 4x & x\geq 1 \end{cases}$ بالتحويل المحدَّد.

8 كبس عمودي عامله $\frac{1}{4}$. **9** مط أفقي عامله 2 . **10** سحب إلى أسفل 3 وحدات.

حدّد تقاطعات الدالّة $f(x)$ مع محوري الاحداثيات، ثم حدّد تقاطعات الدالّة $g(x)$ من دون رسم بيانها.

11 $f(x)=-\frac{3}{2}x+9$ ؛ $g(x)=\frac{2}{3}f(x)$

12 $f(x)=x^2-25$ ؛ $g(x)=f\left(\frac{5}{3}x\right)$

13 $f(x)=-\frac{2}{5}x+2$ ؛ $g(x)=f(2x)$

14 $f(x)=x^2-3x-4$ ؛ $g(x)=-f\left(\frac{1}{3}x\right)$

15 $f(x)=3^x-1$ ؛ $g(x)=2f(x)-4$

16 $f(x)=x^3+8$ ؛ $g(x)=f\left(-\frac{1}{2}x\right)$

ارسم بيان الدالّة $f(x)$ ، ثم استعمل تحويلاً لرسم بيان الدالّة $g(x)$.

17 $f(x)=\frac{1}{2}x+4$ ؛ $g(x)=3f(-x)$

18 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$ ؛ $g(x)=-f(2x)$

19 **أعمال** لحساب الكلفة، تعتمد شركة تؤمِّن مستلزمات الاحتفالات المدرسية، الدالّة

$c(n)=\begin{cases} 18\ 000n & n\leq 50 \\ 400\ 000+10\ 000n & n>50 \end{cases}$ ، حيث n عدد الأشخاص.

أ قرَّر مدير الشركة تخفيض الأسعار 10% . اكتب الدالّة الجديدة لحساب الكلفة.

ب قرَّر مدير الشركة أن يُقدّم حسمًا إضافيًّا قدره 2000 دينار عن كل شخص. اكتب الدالّة الجديدة لحساب الكلفة.

نافذة

سلامة السير

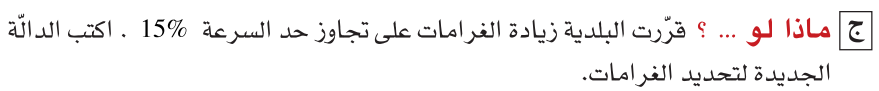
تضع الشرطة في بعض المدن آلات تصوير لتحديد السيارات المخالفة وتغريمها.

20 **سلامة السير** تُغرِّم بلدية العاصمة السيارات التي تتجاوز حد السرعة المسموح به، وفقًا للجدول المقابل.

غرامات تجاوز حد السرعة	
الزيادة على الحد (km / h)	الغرامة (دينار)
10–1	30 000
15–11	50 000
20–16	100 000
25–21	150 000
26→	200 000

أ اكتب دالّة لحساب قيمة الغرامة بدلالة مدى التجاوز.

ب تفرض البلدية غرامة إضافية قدرها 50 000 دينار إذا كان تجاوز حد السرعة قد حصل في منطقة مدارس. اكتب الدالّة التي تُستعمل لتحديد قيمة الغرامة في مناطق المدارس.



ج **ماذا لو ...** ؟ قرّرت البلدية زيادة الغرامات على تجاوز حد السرعة 15% . اكتب الدالّة الجديدة لتحديد الغرامات.

21 **تفكير ناقد** افترض أن بيان الدالّة $f(x)$ يقطع المحور الأول n مرة.

أ كم مرة يقطع بيان الدالّة $bf(ax)$ المحور الأول؟ أوضح ذلك.

ب أوضح السبب الذي يجعلك عاجزًا عن تحديد عدد النقاط التي يقطع فيها بيان الدالة $f(x-h)+k$ المحور الأول.

22 **نقود** يسمح أحد المصارف لحاملي البطاقات المصرفية الصادرة عنه أن يسحبوا على سبيل الإقراض مبالغ من آلات سحب النقود. يتقاضى المصرف مبلغ 6000 دينار إذا لم تتجاوز قيمة المبلغ المسحوب 200 000 دينار، وَ 3% من قيمة المبلغ المسحوب إذا تجاوز 200 000 دينار.

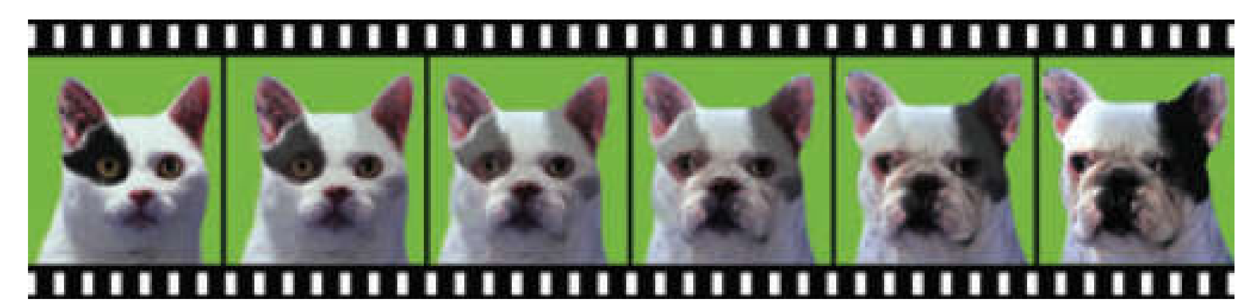
أ اكتب دالّة تُمثّل ما يتقاضاه المصرف بدلالة المبلغ المسحوب.

ب افترض أنّ المصرف قرّر زيادة ما يتقاضاه 15% . اكتب الدالّة الجديدة.

23 وقف الطلاب في حفل عيد ميلاد أحد زملائهم صفًّا طويلاً. همس الطالب المضيف في أذن الطالب الأول جملة، وطلب إليه نقلها همسًا إلى الطالب الذي يليه، الذي بدوره همس الجملة في أذن من يليه وطلب إليه نقلها إلى الطالب الذي يليه وهكذا ... حتى إذا وصلت الجملة إلى الطالب الأخير ذكرها بصوت مسموع أمام جميع زملائه. تشكل الدالة $T(n)=\begin{cases}3.5n & n\le 8\\ 5.4n-8 & n>8\end{cases}$ نموذجًا لحساب الزمن بالثواني الذي يستغرقه انتقال الجملة من أول طالب في الصف إلى الطالب ذي الرتبة n.

أ) تكرَّرت اللعبة مرة ثانية، وكان الطلاب أسرع في اللعب من المرة الأولى بنسبة 20% . اكتب الدالّة الجديدة لحساب الزمن الذي يستغرقه انتقال الجملة.

ب) صِف تأثير هذا التحسّن في أداء الطلاب على بيان الدالّة $T(n)$.



24 **تكنولوجيا** المورفنغ Morphing تقنية حاسوبية تسمح بتحويل صورة إلى صورة أخرى كما تُبيّن ذلك سلسلة الصور أعلاه. تقوم هذه التقنية على تحويل نقاط محددة من صورة إلى أخرى.

أ) ارسم بيانات الدوال $f(x)=\left\{\frac{1}{2}x+4\right.$ حيث $1\le x\le 2$ ، وَ $g(x)=\left\{-x^2+6x-7\right.$ حيث $2\le x\le 4$ ، وَ $h(x)=\left\{-\frac{1}{2}x+7\right.$ حيث $4\le x\le 5$ ، في المستوي الإحداثي نفسه.

ب) ارسم بيانات الدوالّ $f_1(x)=-f(x)+8$ وَ $g_1(x)=-5g(x)+3$ وَ $h_1(x)=-h(x)+8$

اكتب، لكل دالّة، الدالّة الناتجة عن تحويلها بالتحويل المحدَّد.

25 $f(x)=\begin{cases}2^x-1 & x\le -3\\ -5x+3 & x>-3\end{cases}$ ؛ سحب إلى أدنى 7 وحدات.

26 $f(x)=\begin{cases}3x^2 & x<1\\ -2x+4 & x\ge 1\end{cases}$ ؛ مط عمودي عامله 5.

27 **منتجات** يعرض أحد المزارعين منتجاته للبيع بأسعار مغرية.



أ) أنشئ رسمًا بيانيًّا يمثِّل كلفة شراء كمية تتراوح بين 0 kg وَ 10 kg.

ب) اكتب دالّة متفرِّعة القاعدة يُمكن استعمالها لحساب ثمن x kg من المنتجات الزراعية.

ج) **ماذا لو ... ؟** في أواخر النهار، عرض المزارع أن يُقدِّم إلى الزبون كيلوغرامًا مجانيًّا مقابل كل كيلوغرام يشتريه. ارسم بيان الدالّة الجديدة، وصِف التحويل الذي يُولّده من بيان الدالّة الأصلية.

28 **أعمال** تعتمد إحدى شركات بيع الحاسبات الدالّة $P(n)=-0.002n^2+19n-9000$ لتحديد أرباحها من بيع n حاسبة. بالاستناد إلى معطيات جديدة، سوف تعتمد الشركة للعام المقبل الدالّة $R(n)=P(0.8n)$.

أ ما تأثير هذا التغيير على عدد الحاسبات التي يتوجب على الشركة بيعها، لتحقيق الحد الأعلى من الأرباح؟

ب جِد عدد الحاسبات التي على الشركة بيعها لتحقيق الحدّ الأعلى من الأرباح.

29 **تفكير ناقد** التقاطع الأفقي لدالّة خطّية 2 وتقاطعها العمودي 3. تم مط هذه الدالّة عموديًّا بعامل 2، ثم سُحبت إلى أسفل 3 وحدات، ثم تم مطّها أفقيًّا بعامل 2. ما التقاطعات الجديدة للدالّة بعد تحويلها؟

30 **تفكير ناقد** لماذا لا يُغيّر السحب العمودي في مجال الدالّة، بينما يُغيّر السحب الأفقي فيه؟

31 **اكتب** هل يُمكن تحويل بيان منقطع (غير متصل) إلى بيان متصل باستعمال المط والكبس فقط؟ أوضح ذلك.



32 أي ممّا يلي هو الدالّة $g(x)$ في الرسم البياني المقابل؟

أ $g(x)=2f\left(\frac{1}{4}x\right)$ ج $g(x)=2f(4x)$

ب $g(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{4}x\right)$ د $g(x)=\frac{1}{2}f(4x)$

33 أيّ مما يلي هو الدالّة $g(x)=f(4x)$ حيث $f(x)=\begin{cases}2x & x>8\\ x^2 & x\le 8\end{cases}$ ؟

أ $g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & x>2\\ \frac{x^2}{16} & x\le 2\end{cases}$ ج $g(x)=\begin{cases}8x & x>32\\ 4x^2 & x\le 32\end{cases}$

ب $g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & x>8\\ \frac{x^2}{16} & x\le 8\end{cases}$ د $g(x)=\begin{cases}8x & x>2\\ 16x^2 & x\le 2\end{cases}$

34 التقاطع العمودي للدالّة $g(x)=\frac{3}{5}f(5x)$ هو 15. ما التقاطع العمودي للدالّة $f(x)$ ؟

أ 3 ب 9 ج 25 د 75

تحدٍّ وتوسّع

35 **هندسة** استعمل الدالّة $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x+4 & x<0\\ -\frac{1}{2}x+4 & x\ge 0\end{cases}$.

أ ارسم بيان الدالّة $f(x)$، وحدّد تقاطعاتها. ثم احسب مساحة المنطقة المحدّدة بالبيان وبالمحور الأول.

ب ارسم بيان الدالّة $g(x)=4f(2x)$. ثم احسب مساحة المنطقة المحدّدة بالبيان وبالمحور الأول.

36 استعمل الدالّة $f(x)=2x^3-3x^2-11x+6$.

أ حدّد تقاطعات الدالّة $g(x)=3f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

ب حدّد تقاطعات الدالّة $h(x)=-g\left(\frac{1}{2}x\right)$.

مراجعة لولبية

37 **جيولوجيا** ضرب الولايات المتحدة 973 زلزالاً بين عامَي 1999 وَ 2002 وقع 43% منها في ولاية كاليفورنيا. كم زلزالاً تقريبًا ضرب كاليفورنيا خلال هذه الفترة. (الصفوف السابقة)

جِد القيمة الكبرى أو القيمة الصغرى لكل دالّة، ثم حدّد مجال الدالّة ومداها. (الصفوف السابقة)

38 $f(x)=4x^2-2x+8$

39 $g(x)=-3x^2+6x-9$

احسب قيمة كل دالّة متفرِّعة القاعدة عند $x=-4$ وَ $x=0$ وَ $x=5$. (الدرس 5– 2)

40 $f(x)=\begin{cases} 3 & x<1 \\ x^2-4 & x\geq 1 \end{cases}$

41 $g(x)=\begin{cases} 5-2x & x<-3 \\ 4+x & x\geq -3 \end{cases}$

الفصل 5



1-5 التمثيلات المختلفة للدوال

1 على ڤيان أن تقرأ في الأسبوع القادم 294 صفحة تحضيرًا لاختبار التاريخ. اكتشفت أن بمقدورها قراءة 42 صفحة في الساعة. أنشئ جدولاً بيانيًّا واكتب معادلة لتمثيل عدد الصفحات المتبقية للقراءة بدلالة الزمن x.

2 يُبيّن الجدول التالي ارتفاعات قذيفة بالأمتار، في عدة أزمنة، بعد إطلاقها.

الزمن (بالثواني)	0	1	2	3	4	5
الارتفاع (بالأمتار)	50.0	65.1	70.4	65.9	51.5	27.5

أ) جِد نموذجًا مناسبًا لحساب ارتفاع القذيفة h بدلالة الزمن t .

ب) ما أعلى ارتفاع بلغته القذيفة؟

ج) كم من الزمن بقيت القذيفة في الجو؟

2-5 الدوالّ المتفرِّعة القاعدة

ارسم بيان الدالّة.

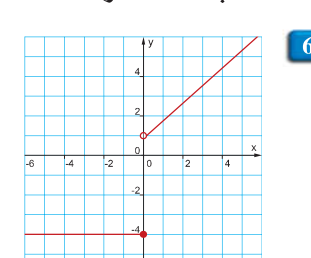
3 $f(x)=\begin{cases}3 & x<0\\ 2x+3 & x\geq 0\end{cases}$

4 $h(x)=\begin{cases}-x+1 & x<-3\\ -x & -3\leq x<1\\ -x-1 & x\geq 1\end{cases}$

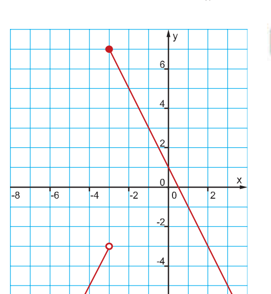
5 كلفة استئجار دراجة للتنقّل في الجبال 25 000 دينار للساعات الثلاث الأولى، وَ 5000 دينار لكل ساعة إضافية. أنشئ رسمًا بيانيًّا يمثّل كلفة استئجار الدراجة لأزمنة من 0 إلى 8 ساعات.

اكتبْ دالّة متفرّعة القاعدة للرسم البياني.

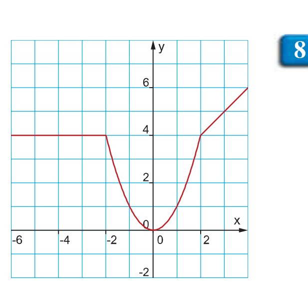
6



7



8



3-5 تحويلات الدوال

حدّد التقاطعات الأفقية والعمودية للدالّة $f(x)$ ، واستنتج التقاطعات الأفقية والعمودية للدالّة $g(x)$ من دون رسم بيانها.

9 $f(x)=2x-2$ ، $g(x)=-f\left(\frac{1}{2}x\right)$

10 $f(x)=x^2-4$ ، $g(x)=2f(x)$



ارسم بيان $g(x)$ بمعرفة $f(x)$.

11 $f(x)=|x|-3$ ، $g(x)=2f(x)+3$

12 $f(x)=x^2+1$ ، $g(x)=-3f(x)$

3-5 العمليات على الدوال

Operations with Functions



الأهداف

يجمع الدوال ويطرحها ويضربها ويقسمها.

يركّب الدوال، ويحسب قيم دالّة مركّبة.

من يستعمل هذا الأمر؟

يُمكن للمستوردين أن يستعملوا العمليات على الدوال ليُحدِّدوا كلفة ما يشترونه بالعملة الأجنبية. (المثال5)

تستطيع إجراء العمليات على الدوال كما أجريت العمليات على الأعداد والمقادير. يُمكن جمع الدوال وطرحها وضربها وقسمتها بإجراء هذه العمليات على المقادير التي تشكّل قواعدها.



كتابة العمليات على الدوالّ

العملية	الكتابة
الجمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
الطرح	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
الضرب	$(fg)(x)=f(x)g(x)$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ ، حيث $g(x)\neq 0$

مثال 1 جمع الدوالّ وطرحها

$f(x)=2x^2+4x-6$ ؛ $g(x)=2x-2$ ، **جِد كل دالّة.**

أ $(f+g)(x)$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$=(2x^2+4x-6)+(2x-2)$$ عوّض عن كل دالة بقاعدتها.

$$=2x^2+6x-8$$ بسّط.

ب $(f-g)(x)$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$=(2x^2+4x-6)-(2x-2)$$ عوّض عن كل دالة بقاعدتها.

$$=2x^2+4x-6-2x+2$$ استعمل خاصية التوزيع.

$$=2x^2+2x-4$$ بسّط.



1. $f(x)=5x-6$ ؛ $g(x)=x^2-5x+6$ ، جِد:

أ $(f+g)(x)$ ب $(f-g)(x)$

عندما تقسم دالّة على أخرى، تأكّد من كتابة كل تحديد للمجال قد ينتج عن القسمة.

مثـــــال 2 ضرب الدوال وقسمتها

$f(x)=2x^2+4x-6$ ؛ $g(x)=2x-2$. جِد كل دالّة.

أ $(gf)(x)$

$(gf)(x)=g(x)\times f(x)$

$=(2x-2)(2x^2+4x-6)$ عوّض عن كل دالّة بقاعدتها.

$=2x(2x^2+4x-6)-2(2x^2+4x-6)$ استعمل خاصية التوزيع.

$=4x^3+8x^2-12x-4x^2-8x+12$ اضرب.

$=4x^3+4x^2-20x+12$ بسّط.

ب $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

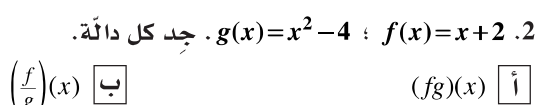
$=\frac{2x^2+4x-6}{2x-2}$ اكتب ناتج القسمة على صورة مقدار نسبي.

$=\frac{2(x-1)(x+3)}{2(x-1)}$ حلّل بالكامل. لاحظ $x\neq 1$.

$=\frac{\cancel{2}\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{2}\cancel{(x-1)}}$ اختصر.

$=x+3 \quad (x\neq 1)$ بسّط.





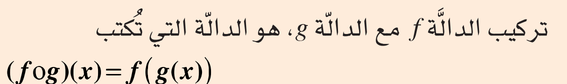
2. $f(x)=x+2$ ؛ $g(x)=x^2-4$. جِد كل دالّة.

أ $(fg)(x)$ ب $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$



اعلم و احفظ — تركيب الدوال

تركيب الدالّة f مع الدالّة g، هو الدالّة التي تُكتب



$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

مجال الدالّة المركّبة $(f\circ g)(x)$ هو مجموعة قيم x في مجال g التي تجعل $g(x)$ تنتمي إلى مجال f .



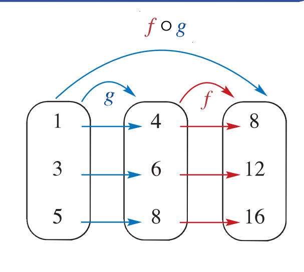
قراءة الرياضيات

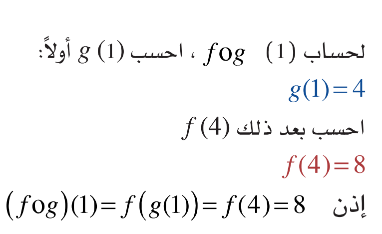
الدالة المركبة

$(f\circ g)(x)$ أو $f(g(x))$

تقرأ

f of g of x





لحساب (1) $f\circ g$ ، احسب $g(1)$ أولاً:

$g(1)=4$

احسب بعد ذلك $f(4)$

$f(4)=8$

إذن $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(4)=8$

قواعد تراتب العمليات على الدوال هي نفسها قواعد تراتب العمليات على الأعداد والمقادير.
لحساب $(f\circ g)(3)$. احسب أولاً $g(3)$، ثم احسب قيمة f عندما تكون القيمة المُدخلة $g(3)$.

مثـــــال 3 حساب قيم الدوال المركَّبة

$f(x)=3x+1$ وَ $g(x)=x^3$. احسب كل قيمة.

أ $f(g(2))$

الخطوة 1 احسب $g(2)$

$g(2)=2^3=8$ $g(x)=x^3$

الخطوة 2 احسب $f(8)$

$f(8)=3\times 8+1=25$ $f(x)=3x+1$

إذن $f(g(2))=25$

ب $g(f(2))$

الخطوة 1 احسب $f(2)$

$f(2)=3\times 2+1=7$ $f(x)=3x+1$

الخطوة 2 احسب $g(7)$

$g(7)=7^3=343$ $g(x)=x^3$

إذن $g(f(2))=343$

انتبه!

لا تخلط بين رمز تركيب الدوال ($\circ$) ورمز الضرب ($\bullet$).

$(f\circ g)(x)\neq(f\bullet g)(x)$

نقطة مراقبة

3. استعمل الدالتين $f(x)=2x-3$ وَ $g(x)=x^2$. احسب كل قيمة.

أ $f(g(3))$ ب $g(f(3))$

يُمكنك استعمال مقادير جبرية كقيم مُدخلة للدالّة، تمامًا كما تستعمل الأعداد.

لكي تجد قاعدة الدالّة المركَّبة $f(g(x))$ ، عوّض عن x في $f(x)$ بالمقدار $g(x)$ ، ثم اكتب المقدار الناتج على أبسط صورة.

مثـــــال 4 كتابة الدالّة المركَّبة

$f(x)=5x+2$ وَ $g(x)=\frac{2}{x-1}$. اكتب كل دالّة مركَّبة وحدّد مجالها.

أ $f(g(x))$

$f(g(x))=f\left(\frac{2}{x-1}\right)$ عوّض عن x بعبارة الدالّة g.

$=5\left(\frac{2}{x-1}\right)+2$ استعمل قاعدة f. لاحظ أن $x\neq1$.

$=\frac{10}{x-1}+2 \;;\; x\neq1$ بسّط.

مجال الدالّة $f(g(x))$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المختلفة عن 1، أي $\{x|x\neq1\}$ لأن $g(1)$ غير معرّف.

ب $g(f(x))$

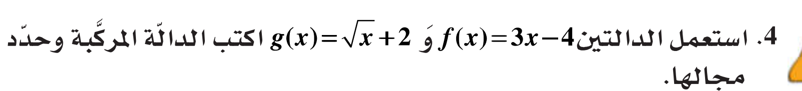
$gf(x)=g(5x+2)$ عوّض عن x بقاعدة الدالة f.

$=\frac{2}{(5x+2)-1}$ استعمل قاعدة g. لاحظ أن $x\neq1$.

$=\frac{2}{5x+1} \;,\; x\neq-\frac{1}{5}$ بسّط.

مجال الدالّة $g(f(x))$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المختلفة عن $-\frac{1}{5}$ ، أي $\{x|x\neq-\frac{1}{5}\}$ لأن $f\left(-\frac{1}{5}\right)=1$ وَ $g(1)$ غير معرّف.

نقطة مراقبة



4. استعمل الدالتين $f(x)=3x-4$ وَ $g(x)=\sqrt{x}+2$ اكتب الدالّة المركَّبة وحدّد مجالها.

أ $f(g(x))$ ب $g(f(x))$

يُمكن استعمال تركيب الدوال لتبسيط سلسلة من الدوال.

مثـــــال 5 تطبيق في إدارة الأعمال

يستورد دلسوز درّاجات من إيطاليا مُسعّرة باليورو. تتضمّن الكلفة الكلّية لكل درّاجة 10% رسمًا جمركيًا، وَ 75 يورو للشحن.

أ اكتب دالّة مركّبة تُشكّل نموذجًا لحساب كلفة كل درّاجة بالدينار بدلالة سعرها باليورو (c) .

الخطوة 1 اكتب دالّة لحساب كلفة الدرّاجة باليورو.

$$E(c) = c + 0.1c + 75$$
$$= 1.1c + 75$$

الخطوة 2 اكتب دالّة لحساب الكلفة بالدينار بدلالة الكلفة باليورو. $R(c) = 1920c$

استعمل: 1 يورو = 1920 ديناراً

أسعار العملات	
لكل 1000 دينار عراقي	
0.84	دولار أميركي
3.09	ريال سعودي
1260	ليرة لبنانية
0.52	يورو أوروبي

الخطوة 3 جِد الدالّة المركّبة $R(E(c))$.

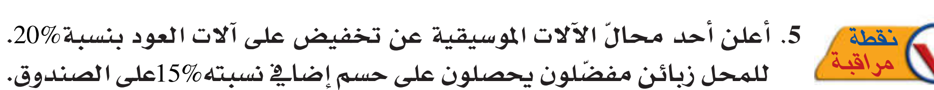
$$R(E(c)) = 1920E(c) = 1920(1.1c + 75) = 2112c + 144\ 000$$ عوّض

ب احسب الكلفة بالدينار لدراجة ثمنها 1200 يورو.

احسب قيمة الدالّة المركّبة $R(E(c))$ عندما $c = 1200$.

$$R(E(1200)) = 2112 \times 1200 + 144\ 000 = 2\ 678\ 000$$

ستبلغ الكلفة الكلّية لهذه الدراجة 2 678 000 دينار.



نقطة مراقبة

5. أعلن أحد محالّ الآلات الموسيقية عن تخفيض على آلات العود بنسبة 20%. للمحل زبائن مفضّلون يحصلون على حسم إضافي نسبته 15% على الصندوق.

أ اكتب دالّة مركّبة لحساب الثمن النهائي الذي يدفعه زبون مفضّل على الصندوق عند شرائه عودًا ثمنه x دينار.

ب اشترى آلان، وهو زبون مفضّل لدى المحل، عودًا ثمنه 248 000 دينار. كم دفع آلان على الصندوق؟

فكِّر وناقش

1. **أوضح** السبب الذي يجعل $(f + g)(x) = (g + f)(x)$.
2. جِد دالّتَين $f(x)$ وَ $g(x)$ تحقّقان $f(g(x)) = g(f(x))$.
3. **كن منظّمًا** انسخ الجدول ثم أكمله. اكتب كل عملية على دالّتين بالطريقة الصحيحة.



العملية	الكتابة
جمع دالّتَين	
طرح دالّتَين	
ضرب دالّتَين	
قسمة دالّة على أخرى	
تركيب دالّتَين	

3-5 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** بمَ يختلف تركيب الدوال عن بقية العمليات عليها؟

انظر المثال 1

$f(x)=8x+13$ ؛ $g(x)=x^2-5x$. جد كل دالّة.

2 $(f+g)(x)$ **3** $(f-g)(x)$ **4** $(g-f)(x)$

انظر المثال 2

$f(x)=2x^2+2x$ ؛ $g(x)=x+1$. جد كل دالّة.

5 $(fg)(x)$ **6** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ **7** $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

انظر المثال 3

$f(x)=3x^2$ ؛ $g(x)=7-x$. جد كل قيمة.

8 $f(g(5))$ **9** $g(f(5))$ **10** $f(g(-2))$

انظر المثال 4

$f(x)=x^2$ ؛ $g(x)=2x-3$ ؛ $h(x)=\sqrt{x+1}$. جد كل دالّة وحدّد مجالها.

11 $f(g(x))$ **12** $(g\circ f)(x)$ **13** $f(h(x))$

انظر المثال 5

14 **اقتصاد المستهلك** يرغب كريكار في الانتساب إلى الجامعة. لذلك يودع شهريًا، في حساب للتوفير، 10% مما يتقاضاه، مضافًا إليها 50 000 دينار. يشكل صافي ما يتقاضاه كريكار بعد حسم الضرائب والرسوم 80% من مرتبّه الأصلي.

أ اكتب دالّة مركّبة لحساب ما يودعه كريكار شهريًا في حساب التوفير بدلالة مرتبّه الأصلي g .

ب احسب ما يودعه كريكار في حساب التوفير، علمًا بأنّ مرتبّه الأصلي 2 400 000 دينار في الشهر.

تمارين وحلّ مسائل

تمارين حرّة	
لحل التمارين	انظر المثال
18-15	1
23-19	2
29-24	3
32-30	4
33	5

$f(x)=2x^2-8$ ؛ $g(x)=x^2+5x+6$ ؛ $h(x)=2x+4$. جد كل دالّة.

15 $(f+g)(x)$ **16** $(f-g)(x)$ **17** $(f+h)(x)$ **18** $(g-h)(x)$

19 $(fg)(x)$ **20** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ **21** $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$ **22** $(gh)(x)$ **23** $\left(\frac{g}{h}\right)(x)$

$f(x)=2\sqrt{x+3}$ ؛ $g(x)=-3x+1$. جد كل قيمة.

24 $f(g(1))$ **25** $g(f(1))$ **26** $f(g(4))$

27 $g(f(6))$ **28** $f\left(g\left(\frac{4}{3}\right)\right)$ **29** $g(f(97))$

$f(x)=4x+3$ ؛ $g(x)=\frac{x}{x+3}$ ؛ $h(x)=x^2-2$. جد كل دالّة مركّبة وحدّد مجالها.

30 $f(g(x))$ **31** $g(f(x))$ **32** $f(h(x))$

33 **أعمال** تبلغ كلفة تبليط غرفة 100 000 دينار يُضاف إليها 4000 دينار عن كل ياردة مربّعة. تذكّر أنّ الياردة وحدة إنجليزية لقياس الطول، وأن كل ياردة تساوي 3 أقدام (**القدم** وحدة إنجليزية أخرى لقياس الطول مقدارها 30.48cm).

أ اكتب دالّة مركّبة لحساب كلفة تبليط غرفة مساحتها x قدمًا مربّعة.

ب احسب مساحة غرفة بالقدم المربّعة علمًا بأنّ كلفة تبليطها بلغت 380 000 دينار.

34 عند تسخين الهواء في المنطاد حتى °38، يُمكن لكل متر مكعب من الهواء أن يرفع $250\ g$ تقريبًا.

أ) اكتب دالّة تُبيّن عدد الغرامات التي يُمكن لمنطاد يحتوي على $x\,\mathrm{m}^3$ من الهواء الساخن أن يحملها.

ب) كم مترًا مكعبًا من الهواء الساخن يلزم لرفع شخص كتلته $75\ kg$؟

ج) تُشكّل الدالّة $g(x)=\frac{x}{453.6}$ نموذجًا لتحويل x غرام إلى باوند (وحدة إنجليزية لقياس الكتلة).
اكتب دالّة تُبيّن عدد الباوندات التي يُمكن لمنطاد يحتوي على $x\,\mathrm{m}^3$ من الهواء الساخن أن يحملها.

د) قدّر عدد الأمتار المكعّبة من الهواء الساخن في منطاد يرفع 1000 باوند.

35 **اقتصاد المستهلك** مع كوزين بطاقتا شراء يُمكنها استعمالهما عند شرائها أحذية من محل الحذاء الأحمر. تؤمّن لها البطاقة الأولى حسم 10 000 دينارٍ، بينما تؤمّن الثانية حسمًا نسبته 15%.

أ) اكتب دالّة $f(p)$ لحساب ما تدفعه كوزين عند شراء حذاء ثمنه p دينارًا، إذا استعملت البطاقة الأولى فقط.

ب) اكتب دالّة $g(p)$ لحساب ما تدفعه كوزين عند شراء حذاء ثمنه p دينارًا، إذا استعملت البطاقة الثانية فقط.

ج) جِد $f(g(p))$ وَ $g(f(p))$.

د) أيّ بطاقة تنصح كوزين باستعمالها أوّلاً؟ أوضح ذلك.

هـ) جِد أقلّ ثمن يُمكن لكوزين أن تدفعه لشراء حذاء ثمنه 49 000 دينار.

نافذة على الزلازل

تنشأ الزلازل عادة من حركة طبقات الأرض قرب فالق أرضي. الفوالق كسور في القشرة الأرضية، وتقع الكبيرةُ منها عند حدود الصفائح التكتونيّة.

36 **زلازل** تتمدّد الموجة التي يولّدها زلزال انطلاقًا من مركزه بسرعة $9\ km/s$. عندما تتسع الموجات الدائرية التي يسبّبها الزلزال، يبلغ ضررها، أكثر فأكثر، المناطق المحيطة بالموقع.

أ) جِد دالّة لحساب مساحة المنطقة (بالـkm^2) التي تتأثر بالزلزال بعد t ثانية.

ب) قدّر الجيولوجيون أن أثر زلزال سينتهي بعد أن تبلغ مساحة المنطقة التي تأثرت به $35\,000\ \mathrm{km}^2$. كم من الزمن سيمضي لينتهي تأثير الزلزال؟

37 **سكانٌ** تُعتمد الدالّة $p(t)=160\ 000\times1.05^t$ ، حيث يُمثّل t عدد السنوات منذ عام 1980، نموذجًا لتحديد عدد سكان إحدى المدن. كما تُعتمد الدالّة $d(p)=0.0044p$ لتحديد عدد الأطباء في هذه المدينة بدلالة عدد سكّانها p.

أ) اكتب دالّة لحساب عدد الأطباء في هذه المدينة بدلالة عدد السنوات منذ عام 1980.

ب) **تقدير** قدّر عدد الأطباء في هذه المدينة سنة 2010.

ج) متى سيتجاوز عدد الأطباء في هذه المدينة 5000 طبيب؟

38 **تفكيرناقد** إذا كان $f(x)=x$ ، فهل الدالّة $f(g(x))$ تساوي الدالّة $g(f(x))$ دائمًا؟ أوضح ذلك.

استعمل الجدولين المقابلين لإيجاد كل قيمة.

x	2	3	4	5
$f(x)$	0	1	2	3

x	1	2	3	4
$g(x)$	1	2	4	8

39 $(g\circ f)(5)$ **40** $(f\circ g)(3)$

41 $g(f(4))$ **42** $f(g(2))$

43 **تفكيرناقد** هل تستطيع استعمال الجدولين لإيجاد $f(g(4))$؟ أوضح جوابك.


44 **اكتب** هل مجموع دالّتَين خطّيتَين دالّة خطّية؟ هل ناتج ضرب دالّتَين خطّيتَين دالّة خطّية؟ أوضح ذلك.



45 أي دالّتين $f(x)$ وَ $g(x)$، تحققّان $(f \circ g)(x)=(3x+4)^2$ ؟

(أ) $f(x)=3x+4$ ؛ $g(x)=x^2$

(ب) $f(x)=x^2$ ؛ $g(x)=3x+4$

(ج) $f(x)=(3x)^2$ ؛ $g(x)=4^2$

(د) $f(x)=3x+4$ ؛ $g(x)=\sqrt{x}$

46 إذا كان $f(x)=2x+1$ وَ $g(x)=5x-2$ فما قيمة $(fg)(5)$ ؟

(أ) 253 (ب) 53 (ج) 47 (د) 13

47 أي مما يلي الدالّة $(f \circ g)(x)$، إذا كان $f(x)=4-x^2$ وَ $g(x)=\frac{1}{2}x-2$ ؟

(أ) $(f \circ g)(x)=-\frac{1}{2}x^2$

(ب) $(f \circ g)(x)=-\frac{1}{4}x^2+2x$

(ج) $(f \circ g)(x)=-\frac{1}{2}x^3+2x^2+2x-8$

(د) $(f \circ g)(x)=-x^2+\frac{1}{2}x+2$

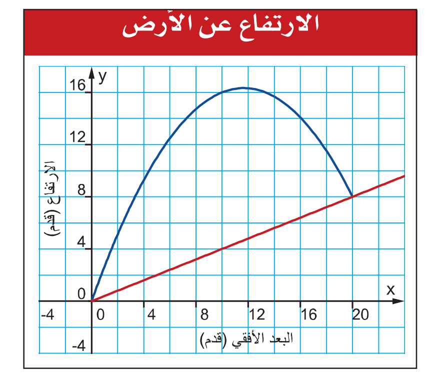
48 **جواب فقط** جِد $(f+g)(2)$، حيث $f(x)=(x+1)^2$ وَ $g(x)=3x$.

تحدٍّ وتوسّع

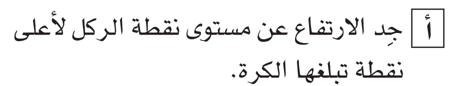
49 جِد $g(x)$، علمًا بأن $f(x)=2x-6$ وَ $f(g(x))=3x^2+4$.

50 جِد $g(f(x))$، حيث $f(x)=3x+8$ وَ $g(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 5x+2 & x\geq 0 \end{cases}$.

51 **فيزياء** تُشكِّل الدالّة $y=-0.12x^2+2.8x$ نموذجًا لحساب ارتفاع كرة قدم (y) تم ركلها باتجاه تلة، بدلالة بعدها الأفقي x عن نقطة الركل. كما تُشكِّل الدالّة $y=\frac{2}{5}x$ نموذجًا لحساب ارتفاع نقطة على التلة بدلالة بعدها عن نقطة ركل الكرة.



أ جِد الارتفاع عن مستوى نقطة الركل لأعلى نقطة تبلغها الكرة.



ب جِد الارتفاع عن مستوى نقطة الركل لنقطة وقوع الكرة على أرض التلة.

مراجعة لولبية

52 **أعمال** تتناقص قيمة حاسوب ثمنه 000 500 2 دينار بنسبة 20% سنويًّا. (الدرس 4–1)

أ اكتب دالّة لحساب قيمة الحاسوب بعد t سنة.

ب كم ستصبح قيمة الحاسوب بعد 10 سنوات؟

لديك $f(x)=\begin{cases} 8x & x\geq 0 \\ x-9 & x<0 \end{cases}$، **اكتب قاعدة لكل دالّة.** (الدرس 5–2)

53 $g(x)$ هي الدالّة الناتجة من تحويل الدالّة $f(x)$ بسحب إلى اليسار 5 وحدات.

54 $h(x)$ هي الدالّة الناتجة من تحويل الدالّة $f(x)$ بمط عمودي عامله 3.

4-5 النماذج الرياضية
Mathematical Models

الأهداف

يُمثّل حالات من الواقع باستعمال دوال.

يستعمل النماذج الرياضية لإجراء توقّعات.

من يستعمل هذا الأمر؟

يُمكنك أن تستعمل النماذج الرياضية للتحليل وتوقّع عدد آلات الصرف الآلي العاملة. (المثال 3).

كثير من المعطيات التي تتجمّع حول حالة من الواقع قد تُشكّل نمطًا يُمكن تمثيله باستعمال دالّة من الدوال التي درستها. آنذاك تستطيع أن تستعمل هذه الدالّة للتحليل وصياغة توقّعات. تذكّر بعضًا من الدوال الأم التي درستها حتى الآن.



الدوال الأم				
النوع	خطّية	تربيعية	أسّية	جذرية
المعادلة	$f(x)=x$	$f(x)=x^2$	$f(x)=b^x,\ b>0$	$f(x)=\sqrt{x}$
البيان				
ثبات الفروق أو النسب	ثبات الفروق الأولى لقيم y العائدة إلى قيم x المتساوية البعد	ثبات الفروق الثانية لقيم y العائدة إلى قيم x المتساوية البعد	ثبات النسبة لقيم y العائدة إلى قيم x المتساوية البعد	ثبات الفروق الثانية لقيم x العائدة إلى قيم y المتساوية البعد

مساعدة

بما أنّ دالّة الجذر التربيعي هي الدالّة العكسية للدالّة التربيعية، فإن قيم x وقيم y تتبادلان.

مثـــال 1 تمييز النماذج باستعمال ثبات الفروق أو النسب

استعمل ثبات الفروق أو النسب لتجد الدالّة الأمّ الأنسب لتمثيل مجموعة معطيات.

أ **يتحدّد طول النابض بكتلة الجسم الذي يحمله.**

الكتلة (kg)	4	5	6	7	8	9	10
الطول (cm)	30.6	32	33.4	34.8	36.2	37.6	39

لاحظ أنّ الفرق بين كل قيمتَين متجاورتَين للكتلة ثابت. تحقّق إن كان الفرق بين كل قيمتَين متجاورتَين للطول ثابتًا.

الطول (cm)	30.6	32	33.4	34.8	36.2	37.6	39
الفروق الأولى	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	

بما أنّ الفروق الأولى ثابتة، فإنّ الدالة الخطّية هي الأنسب لتمثيل معطيات الجدول.

ب **يتحدّد عمر الشجرة بقطرها.**

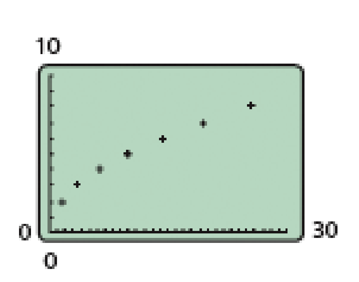
القطر (cm)	1.6	3.6	6.4	10.0	14.4	19.6	25.6
العمر (سنة)	2	3	4	5	6	7	8

لاحظ أنّ الفرق بين كل قيمتين متجاورتين للعمر ثابت. تحقّق إن كان الفرق بين كل قيمتَيْن متجاورتين للقطر ثابتًا.

القطر (cm)	1.6	3.6	6.4	10.0	14.4	19.6	25.6

الفروق الأولى 2.0 2.8 3.6 4.4 5.2 6.0

الفروق الثانية 0.8 0.8 0.8 0.8 0.8



بما أنّ الفروق الثانية للمتغيّر الحر، العائدة إلى قيم ثابتة التباعد للمتغيّر التابع، ثابتة، فإنّ دالّة الجذر التربيعي هي الأنسب لتمثيل معطيات الجدول.

تحقق تُبيّن النقاط البيانية التي تُمثِّل معطيات الجدول أن الدالّة الأنسب لتمثيل هذه المعطيات هي دالّة الجذر التربيعي $f(x)=\sqrt{x}$.

ج **يتحدّد حجم كمية الماء المتبقّية بعد التبخُّر بالزمن.**

الزمن (ساعة)	1	2	3	4	5	6
الحجم (mL)	512	384	288	216	162	121.5

بما أنّ الفرق بين كل قيمتين متجاورتين للزمن ثابت، فلنتحقَّق إن كان الفرق بين كل قيمتين متجاورتين للحجم ثابتًا.

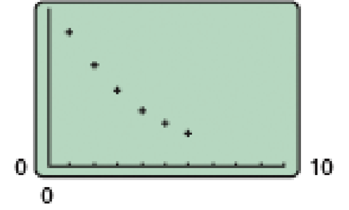
الحجم (mL)	512	384	288	216	162	121.5

الفروق الأولى −128 −96 −72 −54 −40.5

الفروق الثانية 32 24 18 13.5

الفروق الأولى غير ثابتة، وكذلك الفروق الثانية. تحقّق إن كانت نسبة كل قيمة للحجم إلى القيمة التي تسبقها ثابتة أم لا.

$\frac{384}{512}=0.75$ $\frac{288}{384}=0.75$ $\frac{216}{288}=0.75$ $\frac{162}{216}=0.75$ $\frac{121.5}{162}=0.75$



بما أنّ نسبة كل قيمة للحجم إلى القيمة التي تسبقها ثابتة، فإنّ الدالّة الأسّية هي الأنسب لتمثيل المعطيات.

تحقَّق تُبيّن النقاط البيانية التي تُمثِّل معطيات الجدول أن الدالّة الأنسب لتمثيل هذه المعطيات هي دالّة تراجع أسّي .

نقطة مراقبة

1. استعمل ثبات الفروق أو النسب لتجد الدالّة الأم الأنسب لتمثيل مجموعة المعطيات.

أ

x	12	48	108	192	300
y	10	20	30	40	50

ب

x	21	22	23	24
y	243	324	432	576

نادرًا ما تكون فروق المعطيات الواقعية أو نسبها ثابتة بالمعنى الرياضي للكلمة، لكن بإمكانك تحليلها لترى إن كانت هذه الفروق أو النسب قريبة من أن تكون ثابتة. يُمكنك أيضًا أن تمثِّل بيانيًّا معطيات الواقع في نقاط بيانية، وأن تتعرّف نوع الدالّة الأنسب لتمثيلها، ثم تستعمل وظيفة الانحدار Regression في الحاسبة البيانية، لإيجاد الدالّة التي تمثِّل هذه المعطيات أفضل تمثيل.

مثـــال 2 تطبيق في الحفاظ على الأجناس

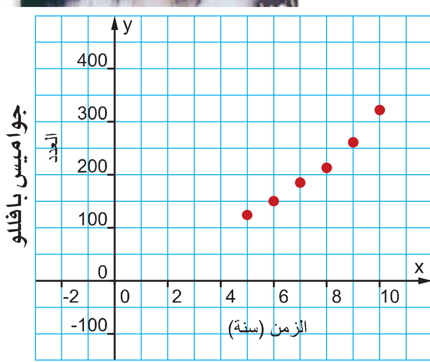


جمع عالم أحياء معطيات عن تطور عدد جواميس البافالو في قطيع أُطلق في محمية طبيعية. اكتب دالّة تُمثِّل هذه المعطيات.

الزمن (بالسنة)	5	6	7	8	9	10
العدد	124	150	185	213	261	322

الخطوة 1 أنشئ نقاطًا بيانية تمثِّل المعطيات.

تُظهر النقاط البيانية أن لها نمطًا تربيعيًّا أو نمطًا أسيًّا.



الخطوة 2 ادرس الفروق.

العدد	124	150	185	213	261	322

الفروق الأولى 26 35 28 48 61

الفروق الثانية 9 −7 20 13

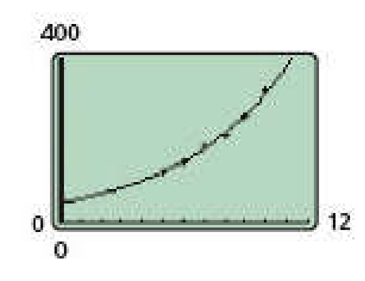
لا الفروق الأولى تبدو ثابتة ولا الفروق الثانية.

الخطوة 3 ادرس النسب.

$\frac{150}{124}=1.210$ $\frac{185}{150}=1.233$ $\frac{213}{185}=1.151$ $\frac{261}{213}=1.225$ $\frac{322}{261}=1.234$

جميع النسب تبدو قريبة من 1.2 ، ما يدفع إلى البحث عن نموذج أسّي.

الخطوة 4 استعمل حاسبة بيانية لإيجاد نموذج أسي.



ExpReg
y=a*b^x
a=48.58125224
b=1.206624633
r²=.9978012254
r=.9989000077

تُشكِّل الدالّة الأسّية $f(x)=48.581(1.207^x)$ نموذجًا لمعطيات الجدول.

مساعدة

لكي تُظهر شاشة الحاسبة معامل الارتباط r ، عليك أن تطلب منها ذلك، اضغط 2nd CATALOG 0 ، ثم اختر **Diagnostic On**.

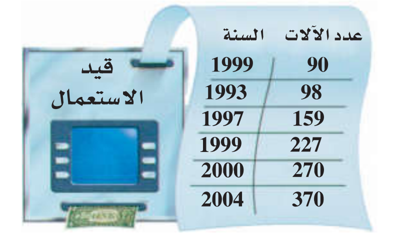
نقطة مراقبة

2. اكتب دالّة تمثِّل معطيات الجدول التالي:

x	12	14	16	18	20	22	24
y	110	141	176	215	258	305	356

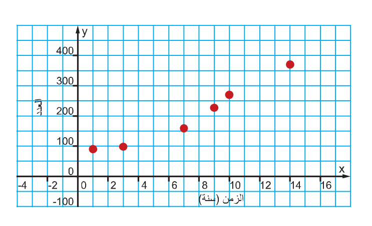
عندما لا تكون المعطيات مرتَّبة، أو تكون الفروق بينها غير ثابتة، عليك أن تجرّب نماذج عدة لتجد أيّها يمثِّل المعطيات أفضل تمثيل. تُظهر الحاسبة البيانية قيمة تُسمّى **معامل التحديد** يُرموز إليها بالرمز r^2 ، أو R^2 . كلما كان هذا المعامل قريبًا من 1، كان النموذج أصدق في تمثيل المعطيات.

مثـــال 3 تطبيق في مصرفي



عدد الآلات	السنة
90	1999
98	1993
159	1997
227	1999
270	2000
370	2004

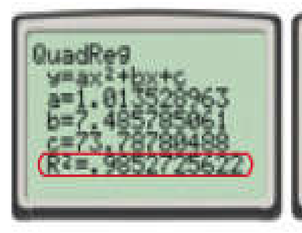
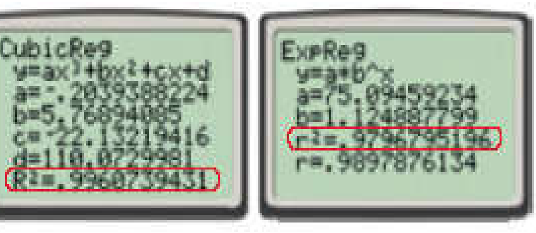
تُظهر المعطيات المقابلة أعداد آلات الصرف الآلي في إحدى الدول سنة بعد أخرى. اكتب دالّة تمثِّل هذه المعطيات، معتمدًا سنة 1990 السنة صفرًا.



بما أنّ فروق قيم المتغيّر الحر غير ثابتة وفروق قيم المتغيّر التابع غير ثابتة أيضًا، فلن تستطيع دراسة الفروق.

أنشئ نقاطًا بيانيَّة لتمثيل المعطيات، معتمدًا سنة 1990 السنة صفر. توحي النقاط البيانية بنمطٍ تربيعيّ أو تكعيبيّ أو أسيّ.

استعمل الحاسبة البيانية للقيام بتراجع من كل نوع.

QuadReg	CubicReg	ExpReg
y=ax²+bx+c	y=ax³+bx²+cx+d	y=a*b^x
a=1.013528963	a=-.2039388224	a=75.09459234
b=7.485785061	b=5.76894085	b=1.124887799
c=73.78780488	c=-22.13219416	r²=.9796795196
R²=.9852725622	d=110.0729981	r=.9897876134
	R²=.9960739431	

قارن بين قيم r^2 . يبدو أنّ النموذج التكعيبي هو الأفضل. يُمكنك اعتماد الدالّة

$$f(x)=0.2x^3+5.44x^2-22.13x+110.07$$

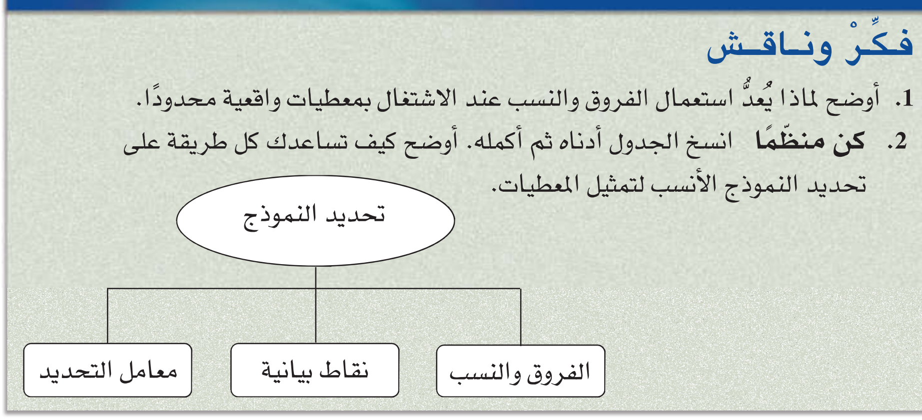
نموذجًا لتحديد عدد الآلات بدلالة السنين بعد عام 1990.

نقطة مراقبة 3. **اكتب دالّة تمثِّل معطيات الجدول التالي:**

x	11	14	25	31	40	50
y	245	302	480	557	645	705

فكِّرْ وناقش

1. أوضح لماذا يُعدُّ استعمال الفروق والنسب عند الاشتغال بمعطيات واقعية محدودًا.
2. **كن منظّمًا** انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. أوضح كيف تساعدك كل طريقة على تحديد النموذج الأنسب لتمثيل المعطيات.





4-5 التمارين

تمارين موجّهة

انظر المثال 1

استعمل الفروق أو النسب لتجد الدالّة الأمّ التي تُشكّل النموذج الأفضل لتمثيل المعطيات.

1

x	y
6	69.6
13	51.4
20	33.2
27	15
34	−3.2
41	−21.4

2

x	y
11	2
47	6
99	10
167	14
251	18
351	22

3

x	y
0	125
1	150
2	180
3	216
4	259.2
5	311.04

انظر المثال 2

4 يُبيّن الجدول أدناه الكميّة، بالغرام، المتبقية من مادة الأيودين – 131 بعد t يومًا من بدء الاختبار.

الزمن t بالأيام	0	1	2	3	4	5	6
الكمية m بالغرام	1000	917.40	841.62	772.10	708.33	649.82	596.14

أ اكتب دالّة تمثّل معطيات الجدول.

ب استعمل النموذج لتجد كمية الأيودين – 131 المتبقّية بعد 20 يومًا.

ج استعمل النموذج لتجد كم يومًا يلزم لتصبح كمّية الأيودين – 131 المتبقية أقل من 50 g.

انظر المثال 3

5 يُبيّن الجدول أدناه عدد الدرّاجات في محل «درّاجتي» في الشهور الأربعة والعشرين الماضية.

الزمن t بالأشهر	0	4	9	12	15	20	24
العدد	62	54	45	48	55	53	60

أ اكتب دالّة تمثّل معطيات الجدول.

ب استعمل النموذج لتجد عدد الدراجات في الشهر السادس.

ج هل تنصح مدير المحل باعتماد النموذج ليتوقّع عدد الدراجات في محله بعد سنة من الآن؟ أوضح ذلك.

تمارين وحلُّ مسائل

تمارين حرة	
لحل التمارين	أنظر المثال
8-6	1
9	2
10	3

استعمل الفروق أو النسب لتحديد الدالّة الأمّ التي تُشكّل النموذج الأفضل لتمثيل المعطيات.

6

x	y
1	380
3	343
5	310
7	279
9	252
11	228

7

x	y
2	97
8	202
14	253
20	250
26	193
32	82

8

x	y
4	4
9	6
16	8
25	10
36	12

9 **زراعة** أجرى أحد المزارعين اختبارًا على كميات السماد التي يجب وضعها في الفدّان الواحد للحصول على أفضل إنتاج. استعمل لهذه الغاية عدة حقول، ودوّن نتائج اختباره في الجدول أدناه. اكتب دالّة لتمثيل معطيات الجدول.

كمية السماد في الفدان (kg)	45	70	90	115	125	135	150
كمية الإنتاج في الفدان (مكيال)	29	60	70	88	84	86	76

10 **أحياء** يُبيّن الجدول أدناه الأعداد المقدّرة لنوع من البكتيريا (إيريشيا كولي) في صحن اختباري بعد t دقيقة من بدء الاختبار.

الزمن t بالدقائق	0	10	20	30	40	50	60
عدد البكتيريا	300	423	596	842	1188	1686	2354

أ جِد نموذجًا يُمثّل عدد البكتيريا بدلالة الزمن، أفضل تمثيل.

ب استعمل النموذج لتجد عدد البكتيريا بعد 3 ساعات.

ج كم يلزم من الزمن لكي يصبح عدد البكتيريا 3 أضعاف عددها في البداية؟



على تاريخ الرياضيات



في سنة 1806، وجد عالم الرياضيات الفرنسي لوجندر Legendre، (1833 – 1752)، مسار أحد المذنّبات، عن طريق رسم منحنٍ يمر أقرب ما يمكن من بعض المواقع التي وجد فيها المذنّب.

11 **عقارات** يُبيّن الجدول أدناه ثمن عدد من البيوت المبيعة وفقًا لمساحاتها.

المساحة (m^2)	248	109	138	233	227	276
الثمن (مليون دينار)	179	125.9	136.75	172.5	169.9	187

أ جِد نموذجًا لحساب ثمن البيت بدلالة مساحته.

ب استعمل النموذج لإيجاد المساحة التقريبية لبيت ثمنه 175 مليون دينار.

ج هل تعتقد أنّ جوابك في السؤال ب دقيق؟ أوضح ذلك.

12 **اقتصاد** درس أحد علماء الاقتصاد متوسِّط الأجر اليومي لأفراد فئة من العمّال في القطاع الخاص، وفقًا لأعمارهم، ودوّن المعطيات التالية:

العمر (سنة)	18	28	38	48	58	68
متوسط الأجر (دينار)	17 480	30 650	37 440	41 230	37 570	21 390

أ جِد نموذجًا مناسبًا لتمثيل معطيات الجدول.

ب استعمل النموذج لإيجاد متوسِّط الأجر اليومي لعامل من هذه الفئة، عمره 43 سنة.

13 **صحة** يُبيّن الجدول أدناه أعمار النساء في أحد المجتمعات، عند الإنجاب الأول.

السنة	1980	1985	1990	1995	2000
متوسط عمر المرأة عند الإنجاب الأول	22.7	23.7	24.2	24.5	24.9

أ اعتبر سنة 1980 السنة صفر، واستعمل الحاسبة البيانية لإيجاد نموذج تربيعي وآخر تكعيبي لتمثيل معطيات الجدول.

ب استعمل كلا النموذجين لتقدير سن الإنجاب الأول لدى المرأة في هذا المجتمع، سنة 2010.

ج أي تقدير يبدو لك أقرب إلى الواقع؟ أوضح ذلك.

14 يُبيّن الجدول أدناه حجم الهواء الساخن v في المنطاد، وفقًا لدرجة حرارة الجو t .

درجة الحرارة	37	41	44	47
الحجم (m^3)	850	934	1027	1130

أ جِد نموذجًا أسّيًّا لتمثيل معطيات الجدول.

ب استعمل النموذج لتحديد حجم الهواء الساخن في المنطاد، إذا كانت حرارة الجو $42^{\circ}C$.

ج هل سيكون النموذج دقيقًا عندما تزيد درجات الحرارة على 47 درجة؟ علِّل ذلك.

15 **زراعة** يُبيّن الجدول أدناه عدد المزارع في إحدى الدول الكبرى ومتوسِّط مساحة المزرعة، خلال القرن العشرين .

السنة	1910	1930	1950	1969	1987	1997
عدد المزارع (مليون)	6.4	6.3	5.4	2.7	2.1	1.9
متوسط المساحة (فدان)	139	157	216	390	462	487

أ استعمل عدد المزارع كمتغيّر حر لإيجاد نموذج لمتوسِّط مساحة المزرعة.

ب استعمل النموذج لتقدير متوسِّط مساحة المزرعة، عندما يبلغ عدد المزارع مليونًا واحدًا.

ج استعمل النموذج لتقدير متوسِّط مساحة المزرعة، عندما يكون عدد المزارع 4.5 ملايين.

16 **أسواق مالية** تأسَّست شركة للصناعات الإسمنت سنة 1990. يُبيّن الجدول أدناه بعض أسعار السهم الواحد لهذه الشركة.

السنة	1991	1994	1997	2000	2003
سعر السهم بالدينار	79 410	96 410	107 260	132 440	151 190

أ جِد نموذجًا لتمثيل معطيات الجدول.

ب ما النسبة المئوية لارتفاع ثمن سهم شركة النسر في السنة؟

ج كان سعر سهم شركة النسر 520 155 دينارًا سنة 2004. هل يتطابق هذا السعر مع السعر الذي يُحدّده النموذج؟ أوضح ذلك.

د استعمل النموذج لتقدير السنة التي يبلغ فيها سعر سهم الشركة النسر 000 200 دينار.

هـ بسبب التضخم، ارتفع ما كان سعره دينارًا واحدًا سنة 1991، إلى 1.34 دينار سنة 2003. قارن بين ارتفاع سعر سهم شركة النسر ونسبة التضخم.

17 **أحياء** يُبيّن الجدول أدناه أعداد أنواع الزواحف في بعض جزرالكاريبي ومساحات تلك الجزر بالأميال المربَّعة.



العدد	11	16	53	45	108	100
المساحة	5	32	3 435	4 244	29 371	44 218

أ جِد نموذجًا لتمثيل معطيات الجدول، بعد اعتبار العدد متغيّرًا حرًا.

ب استعمل النموذج لتقدير مساحة جزيرة فيها 75 نوعًا من الزواحف.

ج ما دقّة التقدير الذي وجدته في السؤال ب؟ أوضح ذلك.

18 **تفكير ناقد** قد يكون مفيدًا استعمال نموذج تربيعي لمعطيات تبدو خطّية. ماذا تقول عن المعامل a في النموذج التربيعي في هذه الحالة؟

19 **اكتب** افترض أنك وجدت نموذجًا مناسبًا لتمثيل معطيات بمتغيّرَيْن. هل تستنتج وجود علاقة سببيَّة جيدة بين المتغيّرين؟ ضمِّن جوابك مثالاً.



20 أي مما يلي ينطبق على معطيات الجدول المقابل؟

x	y
3	2
4	23
5	50
6	83
7	122
8	167

(أ) الفروق الأولى للمتغيّر التابع ثابتة.

(ب) الفروق الثانية للمتغيّر التابع ثابتة.

(ج) نسب قيم المتغيّر التابع ثابتة.

(د) نسب المتغيّر الحر ثابتة.

21 ما قيمة n التي تسمح بتمثيل معطيات الجدول المقابل بنموذج أسّي دقيق؟

x	5	6	7
y	16	28	n

(أ) 40 (ج) 45

(ب) 49 (د) 52

22 ما قيمة n التي تسمح بتمثيل معطيات الجدول المقابل بنموذج تربيعي دقيق؟

x	5	6	7	8
y	12	32	58	n

(أ) 60 (ج) 80

(ب) 70 (د) 90

تحدٍّ وتوسّع

23 غالبًا ما تستعمل الدالّة $p(t)=\frac{a}{1+be^{-kt}}$ ، المسّماة دالّة السوق، في الحالات التي يُشكِّل فيها الطعام أو مساحة الأرض معوِّقًا أمام نمو المجموعات. يُمكن استعمال الدالّة $F(t)=\frac{4000}{1+5.7e^{-0.2t}}$ نموذجًا لتحديد عدد الأسماك في مزرعة لتربية الأسماك، بدلالة عدد الشهور t التي مضت على زرع بويضات السمك.

أ قدّر عدد الأسماك في المزرعة بعد 10 شهور من زرعها.

ب كم شهرًا يستغرق بلوغ عدد الأسماك 3000؟

ج جِد الحد الأقصى لعدد الأسماك في المزرعة، إذا افترضت أنّ الدّالة مناسبة للاستعمال.

24 **حاسبة بيانية** يُمكنك إيجاد نوع آخر من نماذج الانحدار باستعمال الحاسبة البيانية. إنه انحدار القوى Power Regression . استعمل وظيفة PwrReg في الحاسبة البيانية لإيجاد نموذج قوى يُمثّل معطيات الجدول المقابل.

x	1	24	41	74
y	1	4.9	6.4	8.6

مراجعة لولبية

مثِّل بيانيًّا كل نظام متباينات. (الدرس 3-2)

25 $\begin{cases} y \geq 3x+1 \\ y \leq x-3 \end{cases}$

26 $\begin{cases} y \geq x-8 \\ y \leq -\frac{4}{3}x+\frac{1}{3} \end{cases}$

27 $\begin{cases} y \leq 5x \\ y \geq x+2 \end{cases}$

28 **أعمال** تُشكِّل الدالّة $p(x)=-x^3+12x^2-12x-80$ نموذجًا لحساب أرباح إحدى الشركات بملايين الدنانير، بدلالة عدد الوحدات المُنتجة x . (الصفوف السابقة)

أ) جِد أصفار هذه الدالّة.

ب) أي من هذه الأصفار يُمثِّل عدد الوحدات التي على الشركة إنتاجها لكي تنتقل من الخسارة إلى الربح؟

استعمل تركيب الدوال لتقرر إن كانت الدالّة g هي الدالّة العكسية للدالّة f . (الدرس 5-4)

29 $f(x)=x^2+1$ ؛ $g(x)=\sqrt{x}+1$

30 $f(x)=-4+5x$ ؛ $g(x)=\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$

الفصل 5

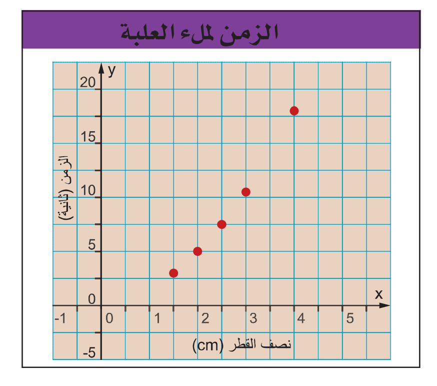
دليل الدراسة : مراجعة

1 يهتم رئيس بلدية بتنظيف شوارعها بعد هبوب عاصفة ثلجية. يُبيّن الجدول كلفة تنظيف مساحات مختلفة من الشوارع. استعمل رسمًا بيانيًّا واكتب معادلة لحساب كلفة تنظيف شارع طوله 2400 m.

طول الشارع بالأمتار	الكلفة بالدنانير
300	6950
600	8900
900	10 850
1200	12 800

2 يخطِّط نادي الثقافة لإقامة حفل تكريمي لمؤسسه. قرَّر منظم الحفل أن يقدّم إلى المدعوّين 4 أطباق في كل منها 30 قطعة من المقبّلات بالإضافة إلى 4 قطع مقبّلات لكل مدعو. أنشئ جدولاً ورسمًا بيانيًّا واكتب معادلة لتمثيل الحالة، معتمدًا عدد المدعوين كمتغيّر حر.

3 تُبيّن النقاط البيانية معطيات عن الزمن اللازم لملء عدد من العلب الأسطوانية بدلالة نصف قطرها.



أ أنشئ جدولاً واكتب معادلة لتمثيل هذه المعطيات.

ب استعمل المعادلة التي كتبتها لتقدير الزمن اللازم لملء أسطوانة نصف قطرها $12cm$.

4 جِد قيمة الدالّة $f(x)=\begin{cases}5x+2 & x\le 1\\ x^2-6 & x>1\end{cases}$ عندما $x=-2$ وَ $x=5$.

5 ارسم بيان الدالّة $f(x)=\begin{cases}2x+4 & x<-2\\ -3x+2 & x\ge -2\end{cases}$.

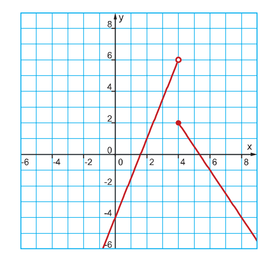
6 جِد قيمة الدالّة $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5x+9} & x\ge 4\\ 9-7x & x<4\end{cases}$ عندما $x=-6$ وَ $x=10$.

ارسم بيان الدالّة.

7 $f(x)=\begin{cases}2x-4 & x<0\\ 5 & x\ge 0\end{cases}$

8 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x-1 & x\le 2\\ \sqrt{x+2} & x>2\end{cases}$

9 اكتب الدالّة المتفرِّعة القاعدة ذات البيان التالي:



10 يتقاضى ناقل طرود بريدية 6000 دينار عن كل طرد لا تزيد كتلته على $8\ kg$، وَ 1500 دينار عن كل كيلوغرام إضافي. اكتب دالّة متفرِّعة القاعدة عما يتقاضاه ناقل الطرود عن طرود لا تزيد كتلتها على $18\ kg$.

11 $g(x)$ هي الدالّة الناتجة عن تحويل الدالّة $f(x)=\begin{cases}2x-2 & x\le 3\\ -4x+16 & x>3\end{cases}$ بسحب وحدتَين إلى اليسار. اكتب معادلة $g(x)$.

12 اكتب الدالّة $h(x)$ الناتجة عن سحب $f(x)=\begin{cases}2x-2 & x\le 3\\ -4x+16 & x>3\end{cases}$ وحدتَين إلى أعلى.

13 اكتب الدالّة $g(x)$ الناتجة عن سحب $f(x)=\begin{cases}3x+2 & x\leq 0\\ x^2 & x>0\end{cases}$ 7 وحدات إلى اليمين.

14 ارسم بيان $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)+1$ ، علمًا بأنّ $f(x)=2x^2+1$.

15 جِد $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ علمًا بأن $f(x)=x+3$ وَ $g(x)=x^2-9$.

16 جِد $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ علمًا بأن $f(x)=x+6$ وَ $g(x)=\frac{18}{x+4}$. حدد مجال $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$.

$f(x)=x^2-5x-14$ ، اكتب كل دالّة.
وَ $g(x)=x-7$.

17 $(f+g)(x)$

18 $(f-g)(x)$

19 $(g-f)(x)$

20 $(f\,g)(x)$

21 $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

22 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

$f(x)=x-2$ وَ $g(x)=\frac{8}{x+1}$ ، جِد كلاً مما يلي.

23 $f(g(-2))$ وَ $g(f(-2))$

24 $f(g(1))$ وَ $g(f(1))$

25 $g(f(x))$ ومجالها.

26 $f(g(x))$ ومجالها.

27 قرَّرت إحدى شركات الطيران إضافة 000 30 دينار إلى ثمن كل بطاقة، بالنظر إلى ارتفاع أسعار المحروقات. وكان على الشركة أن تُضيف إلى ثمن البطاقة 9% رسوم مطارات. اكتب دالّة مركَّبة تمثِّل الثمن الجديد لبطاقة كان ثمنها x دينارًا، قبل زيادة أسعار المحروقات والرسوم.

28 يُبيّن الجدول ارتفاع أسعار الدخول إلى حديقة الحيوانات بالعلاقة مع السنوات التي مضت منذ إنشائها. ادرس الفروق والنسب لتحديد أي نوع من النماذج هو الأنسب لتمثيل معطيات الجدول. استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد هذا النموذج.

أسعار الدخول إلى حديقة الحيوانات	
عدد السنوات منذ الإنشاء	السعر بالدنانير
1	9500
2	10 250
3	11 100
4	12 000
5	12 920

29 يُبيّن الجدول معطيات عن استهلاك سكان إحدى المدن للماء بدلالة درجة الحرارة.

درجة الحرارة (مئوية)	استهلاك الماء (m^3)
12	269 899
15	297 912
18	328 952
21	363 110
24	401 122
27	442 893

أ جِد نموذجًا تقريبيًّا يُمثِّل هذه المعطيات.

ب استعمل النموذج لتقدير استهلاك الماء، إذا كانت درجة الحرارة $30^\circ C$.

ج كان استهلاك الماء في أحد الأيام $189\ 270\ m^3$ كم بلغت درجة الحرارة في ذلك اليوم؟

الفصل 5



1 يعمل زيار بائعًا في أحد المخازن الكبرى ، ويتقاضى شهريًا 300 000 دينار يُضاف إليها 3% من مجموع مبيعاته. مثّل ما يتقاضاه كريكار شهريًا بجدول ورسم بياني ومعادلة، علمًا بأنّ مبيعاته تتراوح بين 0 وَ 10 000 000 دينار.

2 كان زانا يقف على صخرة عالية، حين ركل حجرًا نحو الأسفل. يُبيّن الجدول أدناه معطيات عن ارتفاع الحجر بعد عدة ثوان من ركله.

أ) أنشئ رسمًا بيانيًّا ومعادلة يعبّران عن ارتفاع الحجر بدلالة الزمن كمتغيّر حر.

ب) ما ارتفاع الصخرة؟

ج) ما ارتفاع الحجر بعد 10 ثوان؟

د) بعد كم ثانية يصل الحجر إلى الأرض؟

الزمن (s)	الارتفاع (m)
1	615.1
2	600.4
3	575.9
4	541.6
5	497.5
6	443.6

ارسم بيان الدالّة.

3 $f(x)=\begin{cases}-x-3 & x<1\\ 2x-6 & x\geq 1\end{cases}$

4 $f(x)=\begin{cases}5 & x<-2\\ -x^2-4x & x\geq -2\end{cases}$

ارسم بيان $g(x)$ بمعرفة $f(x)$.

5 $f(x)=2x-4$ وَ $g(x)=-\frac{1}{2}f(x)-1$

6 $f(x)=x^2-2$ وَ $g(x)=-f(x+2)$

جد كل دالّة أو قيمة، علمًا بأن $f(x)=4x^2-9$ وَ $g(x)=2x+3$

7 $(f-g)(4)$

8 $g(f(3))$

9 $(fg)(5)$

10 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

11 يدفع مخزن المجوهرات 10% من ثمن كل حلية كرسم تأمين عليها. ويبيعها بثمن يبلغ 150% من كلفتها الكلّيّة. اكتب دالّة مركّبة تمثّل ثمن الحلية بدلالة كلفتها الأصلية c دينارًا.

12 يُبيّن الجدول أدناه معطيات عن ثمن بعض البيوت بحسب بعدها عن وسط المدينة.

أ) جِد دالّة تُشكِّل نموذجًا لدراسة ثمن البيت p بدلالة بعده d عن وسط المدينة.

ب) استعمل النموذج الذي وجدته لتقدير متوسِّط ثمن منزل يبعد 20 km عن وسط المدينة.

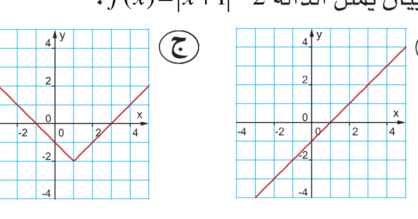
أثمان المنازل	
البعد عن وسط المدينة (km)	متوسط الثمن (دينار)
2	118 496 000
4	109 016 000
6	100 295 000
8	92 271 000
10	84 890 000
12	78 098 000



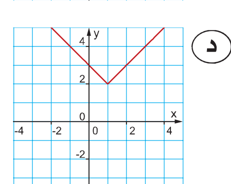
اختبار تراكمي

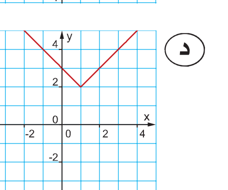
خيار من متعدّد

1 أي بيان يمثِّل الدالّة $f(x)=|x+1|-2$ ؟

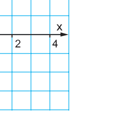


أ ج

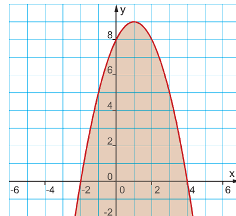


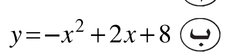


ب د



2 أي مما يلي حلّه البياني هو:





أ $y=x^2+2x+8$

ب $y=-x^2+2x+8$

ج $y\leq x^2+2x+8$

د $y\leq -x^2+2x+8$

3 أي وصف يعبّر عن الرسم البياني أدناه أفضل تعبير؟

أ قطع شيركو على دراجته 6 km متوجِّهًا إلى المكتبة، حيث قضى ساعة، ثم أكمل إلى بيته.

ب قطع شيركو على دراجته 6 km متوجِّهًا إلى المكتبة، حيث قضى نصف ساعة. توَّجه بعد ذلك إلى محل بيع شرائط الفيديو وقضى نصف ساعة قبل أن يُكمل إلى بيته.

ج قطع شيركو على دراجته 3 km متوجِّهًا إلى المكتبة، حيث قضى نصف ساعة. قطع بعد ذلك 3 km متوجِّهًا إلى محل بيع شرائط الفيديو، ثم أكمل إلى بيته.

د قطع شيركو على دراجته 6 km متوجِّهًا إلى المكتبة، حيث قضى نصف ساعة. قطع بعد ذلك 3 km متوجِّهًا إلى محل بيع شرائط الفيديو، حيث قضى ساعة.

4 ما قيمة $f(x)=\begin{cases} x^2+4x-8 & x<-1 \\ x^3-x^2+5 & x\geq -1 \end{cases}$ عندما $x=-1$ ؟

أ -13 ب -11 ج 3 د 5

5 أي مما يلي مجموعة الحل للمعادلة $\sqrt{2x-4}=x-6$؟

أ $\{10\}$ ج $\{2, 20\}$

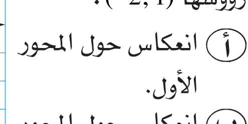
ب $\{4, 10\}$ د $\{2, 12\}$

6 أي مما يلي هو الدالّة $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ، حيث $f(x)=2x^2-7x-30$ وَ $g(x)=x-6$ ؟

أ $2x-5$ ج $\frac{(2x-5)(x+6)}{x-6}$

ب $2x+5$ د $\frac{(2x-10)(9x+3)}{x-6}$

7 أي تحويل مما يلي يُعطي صورة للمثلث أحد رؤوسها $(-2, 1)$؟



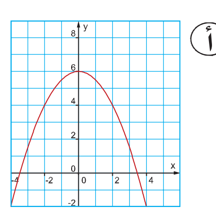
أ انعكاس حول المحور الأول.

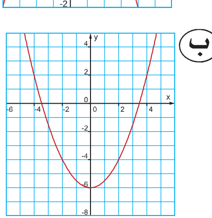
ب انعكاس حول المحور الثاني.

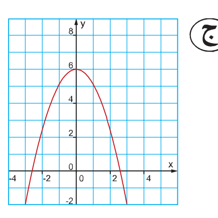
ج سحب 3 وحدات إلى اليسار، و3 وحدات إلى أعلى.

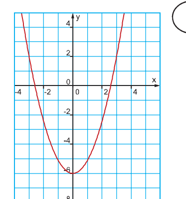
د دوران حول نقطة الأصل بزاوية $180°$.

8 أي بيان هو بيان الدالّة $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+6$؟

أ


ب


ج


د


جواب مختصر

9 ما قيمة المقدار $\log_4 256^3$؟

10 ما قيمة c في $4(5i-2)+3=2(10i+c)-7$ ؟

11 جِد قيمة المقدار عندما $x=5$.

$$\left(\frac{x^2+5x-36}{2x^2-10x+8}\right)\left(\frac{x^2+x-2}{x^2+11x+18}\right)$$

جواب مختصر

12 $f(x)=x^2+1$

أ جِد العلاقة العكسية لهذه الدالّة.

ب مثِّل بيانيًّا الدالّة $f(x)=x^2+1$ والعلاقة العكسية.

ج أوضح إن كانت العلاقة العكسية دالّة أم لا.

13 استعمل النقاط $(0, 6)$، $(2, 2)$، $(5, 11)$.

أ اكتب دالّة تربيعية يمر بيانها في النقاط الثلاث.

ب تحقّق جبريًّا من أنّ بيان الدالّة التي كتبت يمر في كل من هذه النقاط.

ج ارسم بيان الدالّة.

د جِد $f(7)$ وَ $f(-7)$.

14 $f(x)=x^2-4$

أ جِد تحويلين يحوِّلان الدالّة، بحيث يُصبح رأس الدالّة الناتجة عند $(1, 4)$.

ب جِد تحويلين يحوِّلان الدالّة بحيث يمر بيان الدالّة الناتجة في $(0, 2)$ وَ $(-4, 2)$.

جواب مفصَّل

15 ملأ آوات خزّان سيارته، وانطلق في رحلة. يُبيِّن الجدول معطيات عن كمية الوقود المتبقية في الخزّان بدلالة المسافة التي قطعتها السيارة.

المسافة (بالأميال)	0	50	100	150	200
كمية الوقود (بالغالون)	10	8	6	4	2

أ استعمل ثبات الفروق أو النسب لإيجاد الدالّة الأم لنموذج كميّة الوقود المتبقيّة في خزّان السيارة.

ب اكتب النموذج الذي يمثِّل معطيات الجدول.

ج ما كمية الوقود المتبقية بعد 75 ميلاً؟

د هل يُمكن للسيارة أن تقطع 300 ميل من دون وقود جديد؟

هـ جِد الدالّة العكسية، وبيِّن ما تمثِّله.

الفصل

6

المتتاليات والمتسلسلات

Sequences and Series

الفصل السادس

المتتاليات والمتسلسلات

المستطيل الذهبي

لمتتالية فيبوناتشي روابط مع الهندسة والفن والعمارة. استكشف هذه العلاقات بإستعمال المستطيلات الذهبية.

هل أنت مستعد؟

المفردات

اربط المفردة بتعريفها الوارد إلى اليسار.

1 الدالّة الأسّية
2 الدالّة
3 الدالّة الخطّية
4 الدالّة التربيعية

أ علاقة بين متغيّرين بحيث يقابل كل قيمة للمتغيّر الأول قيمة وحيدة للمتغيّر الثاني.
ب دالّة بيانها خط مستقيم.
ج دالّة قاعدتها نسبة حدوديتين.
د دالّة معادلتها $f(x)=ax^2+bx+c$ ، حيث $a\neq 0$.
هـ دالّة معادلتها $f(x)=ab^x$ ، حيث $a\neq 0$ ، $b\neq 1$ ، $b>0$

كتابة المقادير الجذرية على أبسط صورة

اكتب المقدار على أبسط صورة.

5 $\sqrt{25}\times\sqrt{36}$
6 $\sqrt{121}-\sqrt{81}$
7 $\sqrt{\frac{1}{49}}$
8 $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{64}}$



حساب القوى

احسب قيمة المقدار.

9 $(-3)^3$
10 $(-5)^4$
11 $1-(-2^3)^3$
12 $\frac{2^2\times 2^7}{(2^2)^5}$

حل معادلة بالنسبة إلى متغيّر

احسب x بدلالة y .

13 $y=12x-5$
14 $y=-\frac{x}{3}+1$
15 $y=-9+x^2$
16 $y=-4(x^2-9)$

حساب قيمة المقادير

احسب قيمة المقدار عندما $x=2$ وَ $y=12$ وَ $z=24$.

17 $\frac{y(y+1)}{3x}$
18 $z+(y-1)x$
19 $y\left(\frac{x+z}{2}\right)$
20 $z\left(\frac{1-y}{1-x}\right)$

أمثلة مضادة

جِد مثالاً مضادًا يُبيِّن عدم صحة المقولة.

21 $n^2=n$ ، حيث n عدد حقيقي.
22 $n^3\geq n^2\geq n$ ، حيث n عدد حقيقي.
23 $\frac{1}{n}>\frac{1}{n^2}$ ، حيث n عدد حقيقي.
24 $\frac{2}{n}\neq\frac{n}{2}$ ، حيث n عدد حقيقي.

الفصل 6

دليل الدراسة: نظرة إلى الفصل

في الماضي

درست سابقًا

- مجموعات الأعداد بما فيها الأعداد الطبيعية والأعداد المربَّعة.
- استعمال أنماط الفروق والنسب لتصنيف المعطيات.
- رسم بيانات الدوال الخطّية والدوال الأسّية وحساب قيمها.

في هذا الفصل

سوف تتعلّم

- أنماطًا من الأعداد تُسمّى **المتتاليات**، ومجاميعها وتُسمّى **المتسلسلات**.
- طرقًا لتحدد إن كانت المتتالية حسابية أو هندسية.
- كيف تكتب المتتاليات والمتسلسلات وتحسب قيمها.

في المستقبل

يُمكنك استعمال مهارات هذا الفصل

- في صفوف أعلى، عند دراسة الحساب التفاضلي والتكاملي.
- في دروس الفيزياء، لإيجاد نماذج مثل الارتفاعات المتتالية لكرة ترتطم بالأرض.
- في الحياة، لحساب نمو التوظيفات المالية.

المفردات *Vocabulary*

المفردات	Vocabulary
المتتالية	Sequence
المتتالية التوافقية	Convergent sequence
المتتالية التخالفية	Divergent sequence
التعريف المُعلن	Explicit definition
المتتالية المنتهية	Finite sequence
المتتالية غير المنتهية	Infinite sequence
التكرار	Iteration
النهاية	Limit
التعريف المُضمر	Recursive definition
المتسلسلة	Series
حد المتسلسلة	Term of a sequence

نافذة على المفردات

لكي تألف بعض المفردات الواردة في هذا الفصل، تابع الخطوات التالية:

1. ماذا تعني كلمة **متتالية** في الحياة اليومية؟ ماذا تعني متتالية أعداد؟
2. تدل كلمة منتهية على وجود نهاية. أعطِ أمثلة على جمل تستعمل كلمة منتهية. أوضح ما يُمكن أن يدل عليه تعبير **متتالية منتهية**.
3. استند إلى معنى كلمة منتهية، لإعطاء أمثلة على جمل تستعمل تعبير «غير منتهية». أوضح ما يُمكن أن يدل عليه تعبير **متتالية غير منتهية**.
4. ماذا تعني كلمة مسلسل في التلفزيون؟ ماذا يمكن أن تعني كلمة **متسلسلة** في الرياضيات؟
5. اذكر ما هو الحد في الحدودية، ثم اكتب وصفًا **لحد المتتالية**.





استراتيجية للكتابة : استعمل حجّة مقنعة

أن تكون قادرًا على كتابة حجّة مقنعة تتعلق بمفهوم من مفاهيم الرياضيات، يعني أنك تفهم جيدًّا ما تتحدث عنه. يُمكنك استعمال طريقة من أربع خطوات لكتابة مثل هذه الحجّة، كما هو مبيّن في حل التمرين أدناه.

من كتاب الصف العاشر

اكتب أوضح الفرق بين **الاحتمال النظري والاحتمال الاختباري**. أعطِ مثالاً يختلفان فيه.

الخطوة 1 حدِّد الغاية.

الغاية إيضاح الفرق بين الاحتمال النظري والاحتمال الاختباري.

الخطوة 2 اكتب جملة تحقّق الغاية.

يعتمد الاحتمال النظري على الرياضيات فحسب، بينما يستند الاحتمال الاختباري إلى نتائج تجربة.

الخطوة 3 قدّم أمثلة تدعم جوابك.

عندما نرمي قطعة نقود معدنية، فإن احتمال الحصول على الكتابة هو $\frac{\text{عدد النتائج التي تحقق الحدث}}{\text{عدد النتائج الممكنة كلها}}$ أي $\frac{1}{2}$.

أما الاحتمال الاختباري للحصول على الكتابة فهو $\frac{\text{عدد المرات التي ظهرت فيها الكتابة}}{\text{عدد المرات التي رمينا فيها قطعة النقود}}$

في الاحتمال الاختباري، لو اكتفينا برمي قطعة النقود مرة واحدة سنحصل على الكتابة أو على الصورة. سيكون الاحتمال الاختباري للحصول على الكتابة إما 1 (في حالة الحصول على الكتابة) وإما 0 (في حالة الحصول على الصورة). أما الاحتمال النظري للحصول على الكتابة، فيبقى $\frac{1}{2}$.

الخطوة 4 لخّص حجّتك.

بما أن الاحتمال النظري يستند فقط إلى عدد النتائج نظريًّا، فهو لا يتغيّر أبدًا. أما الاحتمال الاختباري فيستند إلى النتائج التجريبيّة، ممّا يجعله عرضة للتغيّر عند كل محاولة.

حاول

استعمل طريقة الخطوات الأربع للإجابة عن السؤالين.

1. رمت دوين مكعَّب الأعداد 20 مرة، وحصلت على العدد 3 مرتين. كم مرة على الأقل عليها أن ترمي المكعب بعد لكي يصبح الاحتمال الاختباري للحدث« الحصول على 3 » مساويًا لاحتماله النظري؟ أوضح كيف وصلت إلى الجواب.
2. يرغب والد هشيار في إلحاق ولده بمدرسة جديدة. اختار 9 مدارس ليزورها. قرر أن يزور 3 أو 4 مدارس خلال الأسبوع القادم . كم يزيد عدد الطرق الممكنة لزيارة 4 مدارس على عدد الطرق الممكنة لزيارة 3 مدارس؟ أوضح جوابك.

1–6 مدخل إلى المتتاليات
Introduction to Sequences



الأهداف
يجد الحد النوني لمتتالية.
يكتب قاعدة لمتتالية.

المفردات Vocabulary
المتتالية Sequence
حد المتتالية Term of a sequence
المتتالية غير المنتهية Infinite sequence
المتتالية المنتهية Finite sequence
التعريف المعلن Explicit definition
التكرار Iteration
التعريف المضمر Recursive definition

من يستعمل هذا الأمر؟
تُستعمل المتتاليات لإنشاء نماذج هدفها دراسة الكثير من الظواهر الطبيعية، مثل التغيّر في أعداد مجموعة من الأرانب مع مرور الزمن.

وصف عالم الرياضيات الإيطالي ليوناردو فيبوناتشي، سنة 1201 م، التزايد السريع في عدد مجموعة من الأرانب تعيش في ظروف نموذجية. دوّن فيبوناتشي عدد أزواج الأرانب شهرًا بعد آخر، فوجد أن هذه الأعداد تتبع نمطًا سُمّي فيما بعد **متتالية فيبوناتشي Fibonacci**.

المتتالية Sequence مجموعة مرتّبة من الأعداد. كل من هذه الأعداد **حد Term** من حدود المتتالية. يُمكن للمتتالية أن تكون **غير منتهية Infinite**، أي إنها تتألف من عدد غير محدود من الحدود، كمتتالية الأعداد الطبيعية، أو **متتالية منتهية Finite sequence**، أي إنها تتألف من عدد محدود من الحدود مثل 4، 3، 2، 1.

يُمكنك أن تنظر إلى المتتالية على أنها دالّة يتكوّن مجالها من أعداد طبيعية متتالية، ويتكوّن مداها من مجموعة الأعداد التي تشكّل حدودها.

عوضًا عن استعمال الكتابة الدالّية $a(n)$، يستعمل أهل الرياضيات الكتابة a_n. العدد الطبيعي n يُسمّى **رتبة الحد** a_n. فالحد الأول هو a_1 والحد الثاني هو a_2. أما الحد ذو الرتبة n، أو **الحد النوني، *nth* term** فهو a_n. بما أن المتتالية دالّة فإن كل رتبة n يقابلها حد وحيد هو a_n.

المجال	n	1	2	3	4	5	رتبة الحد
المدى	a_n	1	1	2	3	5	الحد

في متتالية فيبوناتشي، كل من الحدين الأول والثاني يساوي 1 في حين أن كل حد من الحدود الأخرى يساوي مجموع الحدين اللذين يسبقانه مباشرة. بكتابة أخرى $a_1=1$، $a_2=1$، $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ حيث $n\geq 3$. يُسمى مثل هذا التعريف **تعريفًا مُضمرًا Recursive definition**. في التعريف المُضمر يُستعمل حد سابق أو حدود سابقة لتوليد الحد التالي.

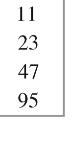
مثال 1 إيجاد حدود متتالية باستعمال التعريف المُضمر

جد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية المُعرّفة بالتعريف المُضمر $a_1=5$ ، $a_n=2a_{n-1}+1$.

الحد الأول مُعطى:

عوّض عن a_1 بقيمته لإيجاد a_2 ، واستمر في استعمال كل حد لإيجاد الحد الذي يليه.

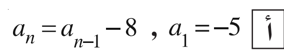
n	$2a_{n-1}+1$	a_n
1	معطى	5
2	2(5)+1	11
3	2(11)+1	23
4	2(23)+1	47
5	2(47)+1	95



الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية هي 5, 11, 23, 47, 95 .

نقطة مراقبة

1. **جد الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية.**



أ $a_1=-5$, $a_n=a_{n-1}-8$

ب $a_1=2$, $a_n=-3a_{n-1}$

يُمكنك تعريف بعض المتتاليات **تعريفًا معلنًا** **Explicit definition** بحيث تستطيع أن تجد قيمة أي حد بمعرفة رتبته.

مثـــال 2 إيجاد حدود متتالية باستعمال التعريف المعلن

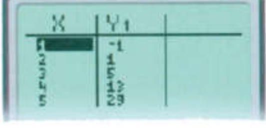
جِد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية المُعرفّة كما يلي $a_n = 2^n - 3$.

n	$2^n - 3$	a_n
1	$2^1 - 3$	-1
2	$2^2 - 3$	1
3	$2^3 - 3$	5
4	$2^4 - 3$	13
5	$2^5 - 3$	29

أنشئ جدولاً واحسب قيمة a_n حيث يتّخذ n القيم من 1 إلى 5.

الحدود الخمسة الأولى هي $-1, 1, 5, 13, 29$.

تحقّق استعمل حاسبة بيانية. أدخل الدالة $y = 2^x - 3$ ثم أنشئ جدول قيم لها.



نقطة مراقبة 2. جد الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية.

أ $a_n = n^2 - 2n - 1$ ب $a_n = 3n - 5$



يُمكنك استعمال معرفتك للدوال لكتابة تعريف لمتتالية.

مثـــال 3 كتابة تعريف لمتتالية

اكتب تعريفًا ممكنًا للحد النوني لكل متتالية.

أ 3, 6, 21, 24, 48

تفحّص الفروق بين كل حد والحد الذي يسبقه ونسبة كل حد إلى الحد الذي يسبقه.

النسب		2	2	2	2
الحدود	3	6	21	24	48
الفروق الأولى		3	6	12	24
الفروق الثانية			3	6	12

النسب ثابتة، ما يعني أن $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$ أو $a_n = 2a_{n-1}$. المتتالية هي متتالية أسّية أساسها 2. انظر نمط قوى العدد 2.

$a_1 = 3 = 3 \times 2^0$ ، $a_2 = 6 = 3 \times 2^1$ ، $a_3 = 12 = 3 \times 2^2$ ...

النمط $3(2^{n-1})$ هو تعريف مقبول للمتتالية. إذن $a_n = 3 \times 2^{n-1}$.

ب 2.5, 4, 5.5, 7, 8.5

الحدود	2.5	4	5.5	7	8.5
الفروق الأولى		1.5	1.5	1.5	1.5

بما أن الفروق الأولى ثابتة، فإن المتتالية خطّية. الحد الأول هو 2.5، وتنتقل من كل حد إلى الذي يليه بإضافة 1.5.

تـذكَّـرْ

يدل ثبات الفروق الأولى على نموذج خطّي، كما يدل ثبات الفروق الثانية على نموذج تربيعي. بينما يدل ثبات النسب على نموذج أسّي.



نقطة مراقبة 3. اكتب تعريفًا ممكنًا للحد النوني لكل متتالية.

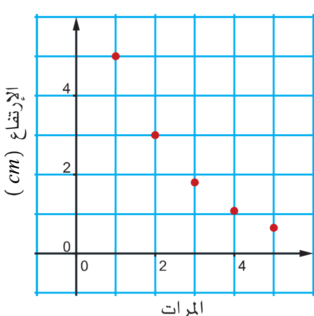
أ $7, 5, 3, 1, -1$ ب $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

مثـــــال 4 تطبيق على الفيزياء

سقطت كرة على البلاط فارتفعت إلى علوّ 155 cm ، ثمّ راحت تسقط وترتدّ مرات عديدة. في كل مرة كانت ترتفع إلى 60% من العلوّ السابق. مثّل بيانيًا متتالية الارتفاع وصف نمطها. كم سيكون علوّ الكرة في الارتداد التاسع؟

العلوّ في المرة الأولى 155 cm. العلوّ في كل مرة يبلغ 60% من العلوّ السابق. يمكن تعريف المتتالية كما يلي: $a_1 = 155$ ، $a_n = 0.6 \times a_{n-1}$

استعمل هذا التعريف لتجد بعض حدود المتتالية ثمّ مثّلها بيانيًّا.



$$a_2 = 0.6 \times 155 \ = 93$$
$$a_3 = 0.6 \times 93 \ = 55.8$$
$$a_4 = 0.6 \times 55.8 = 33.48$$

يبدو أن التمثيل البياني أسّي. استعمل النمط لكتابة تعريف مناسب للمتتالية.

$a_n = 155 \times 0.6^{n-1}$ ، حيث يدل n على رتبة علو الكرة. استعمل هذه القاعدة لحساب علو الكرة في المرة التاسعة. $a_9 = 155 \times 0.6^{9-1} \approx 2.603$

سترتفع الكرة عندما تعاود الارتفاع في المرة التاسعة إلى علو 2.6 cm تقريبًا.

انتبه!

لا تصل بين النقاط بخط، لأن مجال الدالّة هو جزء من مجموعة الأعداد الطبيعية.



4. حوض أزهار يلزم لريّه 1.6 غالون ماء كل مرة. مثّل بيانيًّا مجموع كميات الماء التي استهلكها الحوض بعد كل ريّ. صفِ النمط الذي حصلت عليه. ما مجموع كميات الماء التي استُهلكت بعد 10 ريّات؟

الفراكْتال Fractals رسم تحصل عليه بتكرار نمطٍ مشابه لنمطٍ أساسي.

مثـــــال 5 مثلث سيربنسكي Sierpinski

مثلث سيربنسكي هو فراكتال تحصل عليه من مثلث متساوي الأضلاع، بنزع مثلث متساوي الأضلاع من وسط المثلث الأول، ثم تكرار ذلك على كل مثلث تحصل عليه. كم سيكون عدد المثلثات في المرحلة الخامسة؟

عند كل تكرار، يتضاعف عدد المثلثات 3 مرات. ارمز بـ N_n إلى عدد المثلثات في المرحلة n .

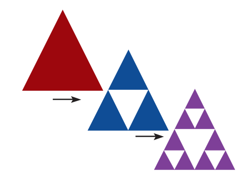
في المرحلة الأولى كان لديك مثلث واحد. في الثانية تحصل على 3 مثلثات، وهكذا...

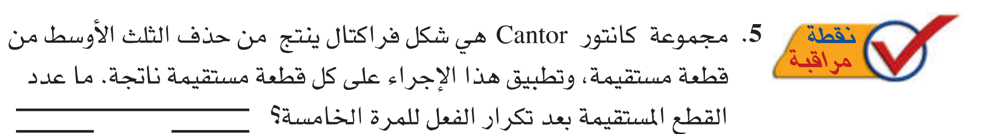
$N_1 = 1$ ، $N_2 = 3$ ، $N_3 = 3^2$

يمكنك أن تكتب $N_n = 3^{n-1}$

إذن $N_4 = 3^3 = 27$ وَ $N_5 = 3^4 = 81$

في المرحلة الخامسة سيكون عدد المثلثات 81.



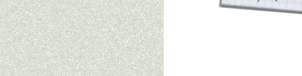


5. مجموعة كانتور Cantor هي شكل فراكتال ينتج من حذف الثلث الأوسط من قطعة مستقيمة، وتطبيق هذا الإجراء على كل قطعة مستقيمة ناتجة. ما عدد القطع المستقيمة بعد تكرار الفعل للمرة الخامسة؟

فكِّر وناقش

1. **أوضح** الفرق بين تعريف المتتالية بشكل مُضمر وتعريفها بشكل مُعلن.
2. **جِد** 3 حدود تكمل المتتالية ... 4، 2، 1.
3. **صِف** كيف تنظر إلى المتتالية كدالّة. هل لجميع المتتاليات المجال نفسه؟ أوضح ذلك.





4. **كن منظمًا** انسخ الشكل المقابل ثم أكمله. لخِّص داخله ما تعلّمته عن المتتاليات.

نوعا المتتاليات	تعريف المتتالية
المتتاليات	
قاعدتا تعريف ممكنتان	أمثلة

1-6 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** التعريف ________ لمتتالية تعريف يسمح بتوليد حدّها النوني بمعرفة الحد السابق أو حدود سابقة (المُضمر أو المُعلن).

انظر المثال 1

جِد الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية.

2 $a_n = 4a_{n-1} - 1$ ؛ $a_1 = 1$
3 $a_n = a_{n-1} + 11$ ؛ $a_1 = 3$
4 $a_n = \frac{a_{n-1}}{5}$ ؛ $a_1 = 500$

انظر المثال 2

5 $a_n = 12(n-2)$
6 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
7 $a_n = -3n^2$
8 $a_n = n(n-1)$
9 $a_n = 4^{n-1}$
10 $a_n = (n+1)^2$

انظر المثال 3

اكتب تعريفًا ممكنًا للحد النوني لكل متتالية.

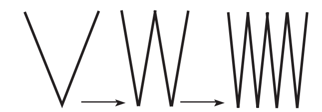
11 $6, 9, 12, 15, 18, \ldots$
12 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
13 $25, 15, 5, -5, -15, \ldots$

انظر المثال 4

14 **مداخيل** كان مدخول آوات 25000000 دينار في السنة الأولى. في السنوات التالية، كان مدخوله كل سنة يزيد 5% على مدخوله في السنة السابقة. مثّل بيانيًّا هذه المتتالية، وصِف نمطها. كم سيكون مدخوله بعد 5 سنوات؟ بعد 10 سنوات؟

انظر المثال 5

15 **فراكتال** كم سيكون عدد القطع المستقيمة في الشكلين الرابع والخامس؟



تمارين وحلُّ مسائل

لحل التمارين	انظر المثال
18–16	1
21–19	2
24-22	3
25	4
26	5

(تمارين حرّة)

جِد الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية.

16 $a_n = a_{n-1} - 3$ ؛ $a_1 = 7$
17 $a_n = \frac{1}{n^2}$
18 $a_n = 1.5a_{n-1} - 2$ ؛ $a_1 = 4$
19 $a_n = (2)^{n-1} + 8$
20 $a_n = 2n^2 - 12$
21 $a_n = -3a_{n-1} - 1$ ؛ $a_1 = -2$

اكتب تعريفًا ممكنًا للحد النوني لكل متتالية.

22 $2, 8, 18, 32, 50, \ldots$

23 $9, 5, 1, -3, -7, \ldots$

24 $5, 0.5, 0.05, 0.005, \ldots$

25 **تصميم** وُزِّعت أمكنة مقاعد أفراد الأوركسترا في قاعة الموسيقى الكلاسيكية على شكل نصف دائرة، بحيث يقف قائد الأوركسترا في المركز. عدد المقاعد 16 مقعدًا في الصف الأول ويزداد 4 مقاعد بالانتقال من صف إلى الصف الذي يليه. مثِّل بيانيًا هذه المتتالية وصِف نمطها. ما عدد المقاعد في الصف السادس؟

26 **فراكتال** جد عدد المربّعات في الشكلين الرابع والخامس.

جد الحدود الخمسة الأولى في كل متتالية.

27 $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 2$ ، $a_1 = 12$

28 $a_n = \frac{2}{a_{n-1}}$ ، $a_1 = 1$

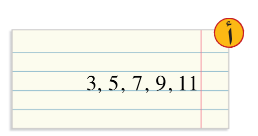
29 $a_n = -a_{n-1} + 10$ ، $a_1 = -10$

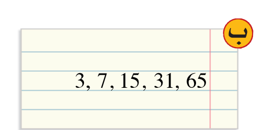
30 $a_n = 2n^2 - 12$

31 $a_n = 8 - \frac{1}{10}n$

32 $a_n = 5(-1)^{n+1} \times 3^{n-1}$

33 **خطأ في التحليل** فيما يلي محاولتان لكتابة الحدود الخمسة الأولى للمتتالية $a_n = 2n + 1$ ، $a_1 = 3$ أيهما خاطئة؟ بيّن الخطأ.


أ
3, 5, 7, 9, 11


ب
3, 7, 15, 31, 65

اكتب تعريفًا ممكنًا للحد النوني لكل متتالية، واكتب الحد العاشر.

34 $16, 4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots$

35 $\frac{15}{9}, \frac{14}{9}, \frac{13}{9}, \frac{12}{9}, \frac{11}{9}, \ldots$

36 $-5.0, -2.5, 0, 2.5, 5.0, \ldots$

37 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

38 $0.04, 0.4, 4, 40, 400, \ldots$

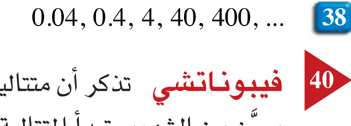
39 $24, 21, 16, 9, 0, \ldots$

40 **فيبوناتشي** تذكر أن متتالية فيبوناتشي تُشكِّل نموذجًا لدراسة عدد أزواج الأرانب بعد عدد معيَّن من الشهور. تبدأ المتتالية بالعدد 1 ثم العدد 1، ويساوي كل حد مجموع الحدَّين السابقين له.

أ) جِد الحدود الاثني عشر الأولى من هذه المتتالية.

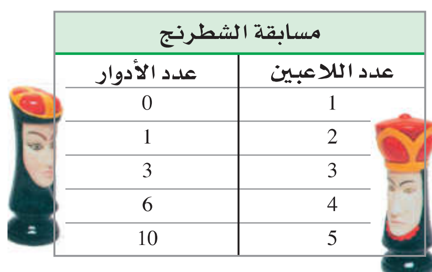
ب) ما عدد أزواج الأرانب في نهاية سنة كاملة؟

نافذة على تاريخ الرياضيات



تُستعمل متتالية فيبوناتشي أيضًا لاستكشاف النسبة الذهبية. تقترب نسبة كل حد إلى الذي يسبقه من النسبة الذهبية $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ كلما ازدادت رتبة الحد.

41 **شطرنج** ينظم سنكر مباراة في الشطرنج بحيث يلعب كل متبارٍ مع كل من المتبارين مرة واحدة. أنشأ جدولاً وجد أن إضافة لاعب جديد تتسبَّب في إضافة أكثر من مباراة.



مسابقة الشطرنج

عدد اللاعبين	عدد الأدوار
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10

أ) مثِّل المتتالية بيانيًّا وصِف نمطها. ما الحدان التاليان؟

ب) استعمل الانحدار لإيجاد قاعدة المتتالية.

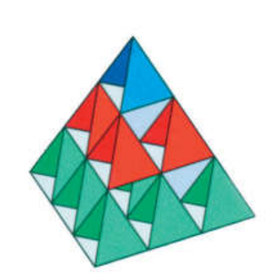
ج) **ماذا لو...؟** كيف يتغيّر الجدول لو توجَّب على كل متبارٍ أن يلعب مرتين مع كل من المتبارين الآخرين؟ أنشئ جدولاً، وأوضح كيف تتغيّر المتتالية.

جد عدد النقاط في الرسمَيْن التاليين من كل نمط.

42 a_1 a_2 a_3 a_4

43 a_1 a_2 a_3 a_4

44 يتألف الجسم المقابل من أشكال هندسية يتكوَّن كل منها من 6 عيدان متساوية الطول. يوجد شكل واحد في الطبقة العليا وَ 3 أشكال في الثانية، وَ 6 أشكال في الثالثة، وهكذا...



أ) تشكِّل المتتالية $a_n = a_{n-1} + 6n$ نموذجًا لحساب عدد العيدان في الطبقة ذات الرتبة n . جد الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية عندما $a_1 = 6$.

ب) استعمل الانحدار لإيجاد قاعدة لهذه المتتالية.

ج) كم عودًا يلزم لبناء الطبقة العاشرة؟

45 **هندسة** يُبيِّن الجدول أدناه مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلّعات المنتظمة الخمسة الأولى.

مجموع قياسات الزوايا الداخلية				
900°	720°	540°	360°	180°

أ) اكتب تعريفًا مُعلنًا لهذه المتتالية. ما مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلّع منتظم اثني عشري؟

ب) تذكّر أن للزوايا الداخلية في مضلَّع منتظم القياس نفسه. أنشئ جدولاً يُبيّن قياس زاوية داخلية لكل مضلّع منتظم. مثّل بيانيًّا معطيات الجدول وصِف النمط.

ج) اكتب تعريفًا مُعلنًا لمتتالية السؤال ب.

د) جِد قياس زاوية داخلية في المضلَّع المنتظم العشاري.

46 **تقدير** قدّر قيمة الحد العشرين في المتتالية ... ,7.94, 8.935, 9.93, 10.925, 11.92

47 **موسيقى** يدل الرسم أدناه على مدة نوتات موسيقية مختلفة.



أ) اكتب متتالية عددية تبيّن تقدُّم النوتات الموسيقية. اكتب تعريفًا مُضمرًا وآخر مُعلنًا لهذه المتتالية.

ب) تمثل نوتة كاملة 4 بيتات (Beats) ونصف النوتة بيتين، وربع النوتة بيتًا وهكذا ... اكتب متتالية تبيّن عدد البيتات التي يُمثّلها تتابع النوتات أعلاه. اكتب تعريفًا مُضمرًا وآخر مُعلنًا لهذه المتتالية. ما العلاقة لتي تربط بين هذه المتتالية ومتتالية السؤال – أ؟

48 **اكتب** أوضح الفرق بين متتالية منتهية وأخرى غير منتهية.



49 أي مما يلي هو الحد التالي في المتتالية ... ,0 ,3−, 6−, 9−؟

(أ) -3 (ب) 0 (ج) 3 (د) 6

50 أي مما يلي يُعرِّف المتتالية ... ,108 ,36 ,12 ,4؟

(أ) $a_n = 4 + 3n$

(ب) $a_n = 3 + 4n$

(ج) $a_1 = 4$؛ $a_n = 3a_{n-1}$ حيث $n \geq 2$

(د) $a_1 = 3$؛ $a_n = 4a_{n-1}$ حيث $n \geq 2$

51 أي متتالية قاعدتها $a_n = \frac{2n}{n+1}$؟

(أ) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \ldots$

(ب) $0, 1, 2, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \ldots$

(ج) $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \ldots$

(د) $2, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{12}{7}, \ldots$

52 أي متتالية قاعدتها $a_1 = 6$؛ $a_n = 12 - 2a_{n-1}$، حيث $n \geq 2$.

(أ) $6, 4, 2, 0, -2, -4, \ldots$

(ب) $6, 0, 12, -12, 36, \ldots$

(ج) $0, 12, -12, 36, -60, \ldots$

(د) $6, 0, -6, -12, -18, \ldots$

53 **جواب مختصر** جِد الحد التالي في المتتالية ... $-32, 16, -8, 4, -2, \ldots$

تحدٍّ وتوسّع

اكتب تعريفًا مُعلنًا لكل متتالية، وجِد حدّها العاشر.

54 $-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 8, \frac{61}{3}, \frac{122}{3}, \ldots$

55 $-2, 6, -12, 20, -30, \ldots$

56 $0.9, 0.8, 0.6, 0.3, -0.1, \ldots$

57 **هندسة** ارسم 5 دوائر. ضع نقطة على الدائرة الأولى ونقطتين على الثانية و3 نقاط على الثالثة وهكذا... في كل دائرة، صل بين كل نقطتين عليها. عُدّ الحد الأعلى للمناطق غير المتقاطعة التي تتضمنّها كل دائرة.

أ) اكتب المتتالية التي حصلت عليها.

ب) يبدو أن كل حد يساوي ضعف الحد الذي يسبقه. غير أن الحد السادس يبدو أقل من 32. حاول أن تحدِّد هذه المناطق في الدائرة السادسة تحديدًا دقيقًا بأن تنشئ رسمًا متقنًا.

مراجعة لولبية

اكتب المقدار على أبسط صورة، مفترضًا أنه مُعرّف. (الصفوف السابقة)

58 $\frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$

59 $\frac{4x^2-5x}{8x^2+18x-35}$

60 $\frac{4x-12}{x^2-25} \div \frac{8x-24}{2x-10}$

61 $\frac{x^2-5x-6}{x^2-3x-18} \times \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

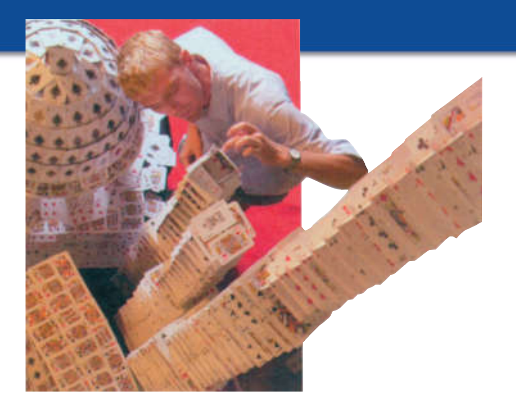
اجمع أو اطرح. (الصفوف السابقة)

62 $\frac{2x-3}{x+1} + \frac{4x-9}{x-1}$

63 $\frac{9x}{8x-4} - \frac{10x+3}{12x-6}$

64 $\frac{x^2}{2x+7} - \frac{x}{x+2}$

65 **أدب** يقرأ كرمانج كتابًا من 854 صفحة بمعدَّل صفحة ونصف في الدقيقة. أنشئ جدولاً واكتب دالّة تُمثّل عدد الصفحات الباقية بدلالة الزمن. ارسم بيان الدالّة.



2–6 المتسلسلات
Series

الأهداف

يحسب مجموع متتالية ويكتبه باستعمال رمز الجمع.

لماذا نتعلم هذا الأمر ؟

يُمكنك استعمال مجاميع المتتاليات لإيجاد قياسات منزل مبني باستعمال البطاقات. (المثال 4)

المفردات Vocabulary

المتسلسلة Series

المجموع الجزئي Partial sum

رمز الجمع Summation symbol

تعلّمت في الدرس السابق كيف تجد الحد النوني لمتتالية. ينبغي لك أحياناً حساب مجموع بعض الحدود في متتالية. تستعمل **المتسلسلة** **Series** للتعبير عن هذا المجموع. يبيّن الجدول أدناه أمثلة على ذلك.

المتتالية	$1, 2, 3, 4$	$2, 4, 6, 8, \ldots$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$
المتسلسلة	$1+2+3+4$	$2+4+6+8+\ldots$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

بما أن أكثرية المتتاليات غير منتهية، فغالباً ما تستعمل مجاميع جزئية. **المجموع الجزئي**، ويُرمز إليه بالرمز S_n، هو مجموع n حداً من الحدود الأولى للمتتالية.

$S_1 = 2$ مجموع الحد الأول

$S_2 = 2+4 = 6$ مجموع الحدين الأوّلين

$S_3 = 2+4+6 = 12$ مجموع الحدود الثلاثة الأولى

$S_4 = 2+4+6+8 = 20$ مجموع الحدود الأربعة الأولى

يُمكنك التعبير عن المتسلسلة باستعمال رمز الجمع Σ على الصورة التالية.

$$\sum_{k=1}^{k=5} 2k$$

قيمة k الأخيرة ← $k=5$

التعريف المُعلن للمتتالية ← $2k$

قيمة k الأولى ← $k=1$

مثال 1 استعمال رمز التجميع

اكتب كل متسلسلة باستعمال رمز الجمع.

أ $3+6+9+12+15$

جِد التعريف المعلن للمتتالية.

$a_k = 3k$ التعريف المُعلن

اكتب مجموع الحدود الخمسة الأولى.

$\sum_{k=1}^{k=5} 3k$ استعمل رمز الجمع

ب $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}$

جِد التعريف المعلن للمتتالية.

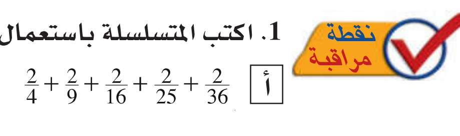
$a_k = (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ التعريف المُعلن

اكتب مجموع الحدود الستة الأولى،

$\sum_{k=1}^{k=6} (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ استعمل رمز الجمع

انتبه!

للمتتاليات المتناوبة الإشارة، استعمل $(-1)^{k+1}$ إذا كانت إشارة a_1 $(+)$، وَ $(-1)^k$ إذا كانت إشارة a_1 $(-)$.



نقطة مراقبة

1. اكتب المتسلسلة باستعمال رمز الجمع.

أ $\frac{2}{4}+\frac{2}{9}+\frac{2}{16}+\frac{2}{25}+\frac{2}{36}$

ب $-2+4-6+8-10+12$

مثـــال 2 حساب قيم المتسلسلات

انشر المتسلسلة واحسب قيمتها .

أ $\sum_{k=3}^{k=6} \frac{1}{2^k}$

$\sum_{k=3}^{k=6} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6}$ انشر المتسلسلة بالتعويض عن k.

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ احسب القوى.

$= \frac{8}{64} + \frac{4}{64} + \frac{2}{64} + \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$ بسّط.

ب $\sum_{k=1}^{k=4} (10 - k^2)$

$\sum_{k=1}^{k=4} (10-k^2) = (10-1^2) + (10-2^2) + (10-3^2) + (10-4^2) = 10$ انشر

انتبــه!

قد تبدأ بعض المتتاليات بالحد a_k حيث $k \neq 1$ كما هو حال المثال 2-أ.



نقطة مراقبة 2. انشر المتسلسلة واحسب قيمتها.

أ $\sum_{k=1}^{k=4} (2k-1)$ **ب** $\sum_{k=1}^{k=5} -5(2)^{k-1}$

ليس من السهل دائمًا إيجاد مجموع عدد من حدود متتالية. لكن يمكن إيجاد صيغ لحساب مجموع الحدود الأولى لبعض المتتاليات الخاصة.

المتسلسلة الثابتة متسلسلة جميع حدودها متساوية: 3+3+3+3+3 .

$$\sum_{k=1}^{k=5} 3 = \underbrace{3+3+3+3+3}_{\text{عدد الحدود } 5} = 5 \times 3 = 15$$

مجموع الحدود الأولى للمتسلسلة الثابتة هو $\sum_{k=1}^{k=n} c = ac$.

$$\sum_{k=1}^{k=n} c = \underbrace{c+c+c+\ldots}_{\text{عدد الحدود } n} = c \times n = 15$$

المتسلسلة الخطّية متسلسلة للعد مثل مجموع الأعداد الطبيعية الأولى حتى رتبة معينة. فمجموع الأعداد الطبيعية العشرة الأولى (باستثناء الصفر) هو:

$$\sum_{k=1}^{10} k = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

أعد ترتيب الأعداد:

$$= (1+10) + (2+9) + (3+8) + (4+7) + (5+6)$$
$$= 11+11+11+11+11 = 5 \times 11 = 55$$

لاحظ أن 5 هو نصف عدد الحدود، وأن 11=1+10 هو مجموع الحد الأول والحد الأخير. تسمح لك هذه الملاحظة بتوقُّع أن يكون مجموع الأعداد الطبيعية حتى الرتبة n (باستثناء الصفر) هو: $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n}{2}(n+1)$ أو $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.



قوانين الجمع

المتسلسلة التربيعية	المتسلسلة الخطّية	المتسلسلة الثابتة
$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=1}^{k=n} a = na$

مثـــــال 3 استعمال قوانين الجمع

احسب قيمة المتسلسلة.

أ $\sum_{k=1}^{k=6} 8$ متسلسلة ثابتة

طريقة أولى استعمل قانون الجمع.

تتضمّن المتسلسلة 6 حدود.

$$\sum_{k=1}^{k=6} 8 = na = 6 \times 8 = 48$$

طريقة ثانية انشر واحسب المجموع.

$$\sum_{k=1}^{k=6} 8 = \underbrace{8+8+8+8+8+8}_{6 \text{ حدود}} = 48$$

ب $\sum_{k=1}^{k=5} k$ متسلسلة خطيّة

طريقة أولى استعمل قانون الجمع.

$$\sum_{k=1}^{k=5} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

طريقة ثانية انشر واحسب المجموع.

$$\sum_{k=1}^{k=5} k = 1+2+3+4+5 = 15$$



ج $\sum_{k=1}^{k=7} k^2$ متسلسلة تربيعية

طريقة أولى استعمل قانون الجمع.

$$\sum_{k=1}^{k=7} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{7(7+1)(2 \times 7+1)}{6}$$

$$= \frac{56(15)}{6}$$

$$= 140$$

طريقة ثانية استعمل الحاسبة البيانية.

$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2$

140

انتبه!

عندما تعد حدود متسلسلة ينبغي أن يتضمّن العدّ الحدين الأول والأخير. فعدد حدود المتسلسلة $\sum_{k=5}^{k=10} 8$ هو 6 وليس 5، لأن قيم n هي 5، 6، 7، 8، 9، 10.



نقطة مراقبة 3. احسب قيمة المتسلسلة.



أ $\sum_{k=1}^{k=60} 4$ ب $\sum_{k=1}^{k=15} k$ ج $\sum_{k=1}^{k=10} k^2$

مثـــــال 4 تطبيق على حل المسائل



يرغب سيبان في بناء منزل من بطاقات اللعب شبيه بما تراه في الصورة المقابلة. وهو يريد الحصول على أكبر عدد ممكن من الطوابق. كم طابقًا يمكنه أن يبني علمًا بأن عدد بطاقات اللعب 52؟

1 افهم المسألة

المطلوب معرفة عدد الطوابق.

اذكر المعلومات المهمة:

- عدد البطاقات 52.
- المطلوب أكبر عدد ممكن من الطوابق.

2 خطّط

أنشئ مخطّطًا للمنزل لكي تفهم المسألة بشكل أفضل. جِد نمطًا لعدد البطاقات في كل طابق. اكتب المتسلسلة، واحسب قيمتها.



3 حُلَّ

أنشئْ جدولاً ورسومًا.

الطابق	1	2	3	4
الرسم	/\	/▽\	/▽▽\	/▽▽▽\
عدد البطاقات	2	5	8	11

يزداد عدد البطاقات 3 بطاقات من طابق إلى آخر. اكتب متسلسلة تُبيّن عدد البطاقات في n طابقًا.

$\sum_{k=1}^{k=n}(3k-1)$ ، حيث يرمز k إلى رتبة الطابق، ويرمز n إلى عدد الطوابق.

$$\sum_{k=1}^{k=4}(3k-1)=(3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)+(3\times4-1)=26$$

$$\sum_{k=1}^{k=5}(3k-1)=(3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)+(3\times4-1)+(3\times5-1)=40$$

$$\sum_{k=1}^{k=6}(3k-1)=(3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)+(3\times4-1)+(3\times5-1)+(3\times6-1)=57$$

بما أن عدد البطاقات 52، فإن أكبر عدد من الطوابق يُمكن لسيان أن يحصل عليه هو 5 طوابق.

4 تحقَّقْ

استعمل الجدول لإكمال النمط. فالطابق الخامس سوف يتضمن 14 بطاقة.

$S_5=2+5++8+11+14=40$. لو أراد سيان أن يُضيف طابقًا آخر لاحتاج إلى بطاقات أكثر من البطاقات المتبقية لديه وعددها 12.



4. بعد الانتهاء من ري الحديقة، قام مهند بلف خرطوم الماء عدة لفات لركنه في مكان أمين. كان طول كل لفة يزيد 6 cm على طول اللفة السابقة، وكان طول اللفة الأولى 34 cm . ما طول الخرطوم إذا كان عدد اللفات 12؟

فكِّر وناقش

1. أوضح الفرق بين المتتالية والمتسلسلة.

2. أوضح ما يرمز إليه كل متغيّر في $\sum_{k=1}^{k=n} k$.

3. **كن منظّمًا** انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. اكتب الصيغة العامة لكل مفردة ، ومثالاً عليها.



	المتتالية	المتسلسلة
الصيغة العامة		
مثال		

2-6 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** أعطِ مثالاً على استعمال رمز الجمع.

انظر المثال 1

اكتب المتسلسلة باستعمال رمز الجمع.

2 $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}$ **3** $-3+6-9+12-15$

4 $1+10+100+1000+10\ 000$ **5** $100+95+90+85+80$

انظر المثال 2

انشر المتسلسلة واحسب قيمتها.

6 $\sum_{k=1}^{k=5} k^3$ **7** $\sum_{k=1}^{k=4} (-1)^{k+1}\frac{12}{k^2}$ **8** $\sum_{k=5}^{k=10} -5k$

انظر المثال 3

احسب قيمة المتسلسلة.

9 $\sum_{k=1}^{k=21} k$ **10** $\sum_{k=1}^{k=20} k^2$ **11** $\sum_{k=15}^{k=35} 6$

انظر المثال 4

12 **تمويل** يدفع كارزان قسطا شهريًّا مقداره 285 000 دينار، من ثمن سيارة اشتراها.
كم سيكون قد دفع بعد سنتين؟ بعد 5 سنوات؟

تمارين وحلُّ مسائل

لحل التمارين	أنظر المثال
16-13	1
19-17	2
22-20	3
23	4

اكتب المتسلسلة باستعمال رمز الجمع.

13 $1.1+2.2+3.3+4.4+5.5$ **14** $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$

15 $11-12+13-14+15-16$ **16** $1+2+4+8+16+32$

انشر المتسلسلة، واحسب قيمتها.

17 $\sum_{k=1}^{k=5} 8(k+1)$ **18** $\sum_{k=2}^{k=7} (-2)^k$ **19** $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{k-1}{k+1}$

احسب قيمة المتسلسلة.

20 $\sum_{k=1}^{k=99} k$ **21** $\sum_{k=11}^{k=88} 2.5$ **22** $\sum_{k=1}^{k=25} k^2$

23 يعرض أحد المخازن الكبرى عبوات الحساء موضبة في عدة طبقات، بحيث تحوي الطبقة العليا عبوة واحدة ، تحوي كل طبقة عبوة زيادة على الطبقة التي تعلوها. كم عبوة يُعرض، علمًا بأن عدد الطبقات 20؟

اكتب المتتالية باستعمال رمز الجمع.

24 $-1+4-9+16-25+36$ **25** $25+24+23+...+2+1$

26 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$ **27** $-800-80-8-0.8-0.08$

28 $10.8+10.5+10.2+9.9$ **29** $9-16+25-36+49-64$

30 $-3.9+4.4-4.9+5.4-5.9$ **31** $0+3.4+6.8+10.2+13.6$

32 $3+\frac{3}{2}+1+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}$ **33** $1000+100+10+1+\frac{1}{10}$

34 **سفر** تبلغ المسافة بين بغداد وبلدة هاوكار 596 km . قرَّر هاوكار أن يقطع نصف المسافة في اليوم الأول ونصف المتبقي في اليوم الثاني، ونصف المتبقي في اليوم الثالث، وهكذا...
اكتب متسلسلة باستعمال رمز الجمع يكون مجموعها ما قطعه هاوكار في 5 أيام.
كم كيلومترًا اجتاز في الأيام الخمسة؟

35 **أمان** يعتمد مدير أحد المخازن الكبرى طريقة الشجرة لإبلاغ مستخدميه قرار إقفال المخزن في حالة الطوارئ. تقوم هذه الطريقة على إبلاغ المدير 3 مستخدمين بقرار الإقفال، ويقوم كل منهم بإبلاغ ثلاثة مستخدمين آخرين وهكذا...

أ) أنشئ مخطط شجرة من ثلاثة مستويات لتمثيل هذه الطريقة.

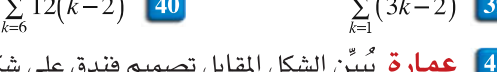
ب) اكتب متسلسلة تكون قيمتها عدد المستخدمين الذين تم إبلاغهم على 5 مستويات واحسب قيمة هذه المتسلسلة.

ج) **ماذا لو...؟** افترض أن المدير قرر أن يكون الإبلاغ لخمسة مستخدمين بدل 3 في كل مستوى. فكم يكون عدد المستخدمين الإضافيين الذين يتم إبلاغهم على 5 مستويات؟

انشر المتسلسلة واحسب قيمتها.

36 $\sum_{k=1}^{k=6}(k^2+1)$ **37** $\sum_{k=1}^{k=6}(-1)^k(5k)$ **38** $\sum_{k=3}^{k=6}\frac{1}{2k}$

39 $\sum_{k=1}^{k=6}(3k-2)$ **40** $\sum_{k=6}^{k=11}12(k-2)$ **41** $\sum_{k=1}^{k=5}\frac{k^2}{5k}$

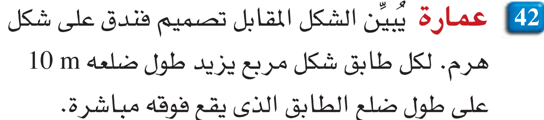


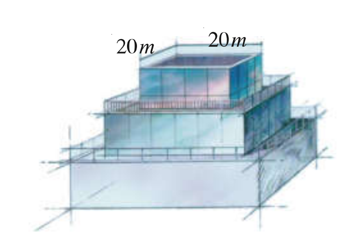
نافذة على تاريخ الرياضيات



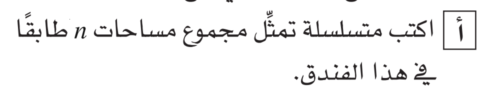
اكتشف عالم الرياضيات الألماني فردريك غوس في العاشرة من عمره طريقة سريعة لحساب مجموع الأعداد الطبيعية من 1 إلى 100. أدّت طريقته إلى اكتشاف قانون حساب مجموع الأعداد الطبيعية من 1 إلى n، أيًّا يكن العدد الطبيعي الموجب n.

42 **عمارة** يُبيِّن الشكل المقابل تصميم فندق على شكل هرم. لكل طابق شكل مربع يزيد طول ضلعه 10 m على طول ضلع الطابق الذي يقع فوقه مباشرة.

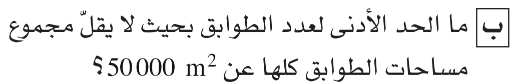




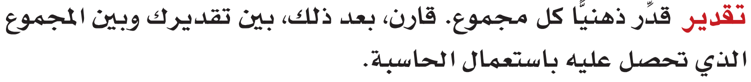
أ) اكتب متسلسلة تمثِّل مجموع مساحات n طابقًا في هذا الفندق.



ب) ما الحد الأدنى لعدد الطوابق بحيث لا يقلّ مجموع مساحات الطوابق كلها عن $50000\ m^2$؟



تقدير **قدِّر ذهنيًا كل مجموع. قارن، بعد ذلك، بين تقديرك وبين المجموع الذي تحصل عليه باستعمال الحاسبة.**



43 $10+11+12+...+29+30$ **44** $1+3+5+...+97+99$

45 $(-2)+(-4)+(-6)+...+(-98)+(-100)$

46 **فيزياء** يُبيِّن الجدول المقابل المسافات التي يقطعها جسم يسقط سقوطًا حرًّا في كل فترة من الفترات الزمنية المتساوية. (تم إهمال وحدات المسافة والزمن في هذا التمرين لعدم تأثيرها).

مسافة السقوط الحر في كل فترة زمنية		
الفترات	نموذج ليوناردو	نموذج غاليليو
1	1	1
2	2	3
3	3	5
4	4	7
5	5	9

أ) اكتب متسلسلة على 5 فترات لكل نموذج، واحسب قيمتها. ماذا يُمثِّل كل مجموع؟

ب) اكتب كل متسلسلة باستعمال رمز الجمع. احسب مجموع الحدود العشرة الأولى في كل منها.

ج) المسافات التي يقطعها الجسم الذي يسقط سقوطًا حرًّا وفقًا للنموذج المعمول به حاليًّا هي: .. ,25 ,16 ,9 ,4 ,1 قارن بين نموذج كل من ليوناردو وغاليليو وبين النموذج المعمول به حاليًّا.



47 **تفكير ناقد** يُمكن تطبيق بعض الخصائص الرياضية على المتسلسلات.

أ) احسب مجموع كل من $\sum_{k=1}^{k=10} 3k$ وَ $3\sum_{k=1}^{10} k$. اكتب مقولة تستند إلى ما توصَّلت إليه.

ب) احسب كلاً من $\sum_{k=1}^{k=10} k + \sum_{k=1}^{k=10} 2$ وَ $\sum_{k=1}^{k=10} (k+2)$. اكتب مقولة تستند إلى ما توصلت إليه.

48 تُستعمل المتسلسلة $\sum_{k=1}^{k=n} (3k^2+3k)$ لإيجاد عدد العيدان الضرورية لإنشاء هرم من n طبقة شبيهة بالهرم المُبيّن في الصورة.



أ) انشر المتسلسلة العائدة إلى هرم من 5 طبقات، واحسب قيمتها لتعرف عدد العيدان.

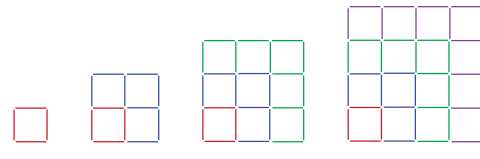
ب) استعمل القاعدة

$$\sum_{k=1}^{k=n} (a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{k=n} a_k + \sum_{k=1}^{k=n} b_k \quad \text{والقاعدة} \quad \sum_{k=1}^{k=n} ax_k = a\sum_{k=1}^{k=n} x_k$$

لكتابة المتسلسلة $\sum_{k=1}^{k=n} (3k^2+3k)$ كمجموع ناتج ضرب متسلسلة تربيعية في عدد، مع ناتج ضرب متسلسلة خطّية في عدد.

ج) استعمل قوانين جمع المتسلسلات الخطّية والتربيعية وما حصلت عليه في السؤال ب، لإيجاد عدد العيدان الضرورية لبناء هرم من 17 طابقًا.

49 **خطوات متعدِّدة** تفحّص النمط التالي القائم على استعمال عيدان كبريت لبناء مربَّعات يزداد طول ضلعها واحدًا في كل مرة.



أ) اكتب متتالية تُبيّن عدد العيدان المُضافة لإنشاء مربع جديد.

ب) اكتب متسلسلة باستعمال رمز التجميع لتمثيل عدد العيدان المستعملة لإنشاء مربّع طول ضلعه 6 عيدان. كم عودًا لزم لإنشاء هذا المربّع؟

50 **تفكير ناقد** هل المجموع $1+3+5+7+9$ مساوٍ للمجموع $9+7+5+3+1$؟ هل تُكتب هاتان المتسلسلتان على الصورة نفسها باستعمال رمز الجمع؟

51 **اكتب** أوضح السبب الذي يجعل S_n يُمثّل مجموعًا جزئيًا وليس المجموع الكلّي لحدود متتالية.



52 أي مما يلي هو نشر المتسلسلة $\sum_{k=1}^{k=7} (-1)^k (3k)$ ؟

أ) $3+6+9+12+15+18+21$

ب) $-3+6-9+12-15+18-21$

ج) $3-6+9-12+15-18+21$

د) $-3-6-9-12-15-18-21$

53 أي مما يلي هو كتابة المتسلسلة $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$ باستعمال رمز الجمع؟

أ) $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{k}{2}$

ب) $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{1}{2^k}$

ج) $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{1}{2k}$

د) $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{1}{k+2}$

54 أي مما يلي يُشكِّل قيمة $\sum_{k=1}^{k=6} k^2$ ؟

(أ) 36 (ب) 55 (ج) 91 (د) 273

55 أي مما يلي يُشكِّل قيمة $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$ ؟

(أ) $\frac{1}{45}$ (ب) $\frac{4}{45}$ (ج) $\frac{7}{12}$ (د) $\frac{5}{8}$

56 **جواب مختصر** أنشا بريز هرمًا من علب المرطّبات، بحيث تشكَّلت الطبقة العليا من علبة واحدة، بينما تشكَّلت الطبقة التي تليها من 4 علب، والثالثة من 9 علب، والرابعة من 16 علبة... هل تستعمل متتالية أم متسلسلة لإيجاد عدد العلب في الطبقة 20؟ أوضح ذلك.

تحدٍّ وتوسّع

اكتب المتسلسلة باستعمال رمز الجمع، ثم جِد قيمتها.

57 $1+2+3+...+1000$

58 $1^2+2^2+3^2+...+25^2$

أثبت كلاً من خصائص المتسلسلات.

59 $\sum_{k=1}^{k=n} ax_k = a\sum_{k=1}^{k=n} x_k$

60 $\sum_{k=1}^{k=n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{k=n} a_k+\sum_{k=1}^{k=n} b_k$

61 **تفكير ناقد** ما هو، في رأيك، قيمة المتسلسلة $1-1+1-1+1-1+...$ إذا تابعت على هذا المنوال؟ أوضح ذلك.

مراجعة لولبية

جِد التقاطعات الأفقية والعمودية لكل مستقيم، ثم ارسمه. (الصفوف السابقة)

62 $3x-4y=12$

63 $-6x+3y=-18$

64 $10x+15y=-5$

65 **عمارة** تشكِّل الدالّة $h(t)=8|t-6|+10$ نموذجًا لحساب ارتفاع مصعد عن الأرض، بالأقدام، بدلالة الزمن t ، بالثواني. ما أقل ارتفاع للمصعد؟ (الصفوف السابقة)

جِد الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية. (الدرس 6 - 1)

66 $a_n=\left(\frac{1}{2}n+2\right)^2$

67 $a_n=\left(a_{n-1}\right)^2-1$ ؛ $a_1=2$

68 $a_n=\frac{4^n}{2}$



3–6 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية
Arithmetic Sequences and Series

الأهداف

يجد الحد المطلوب في متتالية حسابية.

يجد قيم المتسلسلات الحسابية.

المفردات
Vocabulary

المتتالية الحسابية
Arithmetic Sequence

المتسلسلة الحسابية
Arithmetic Series

من يستعمل هذا الأمر؟

يُمكنك استعمال المتتاليات الحسابية لتقدير كلفة إرسال طرود بريدية.

اشترى سمكو سيارة جديدة ثمنها 000 750 16 دينار.

تُقدِّر مديرية الضرائب قيمة هذه السيارة سنة بعد أخرى كما يلي 000 750 17، 000 250 16، 000 750 14، 000 250 13،... تقول عن هذه المتتالية أنها **متتالية حسابية Arithmetic sequence** لأن الفرق d بين كل حد والحد الذي يليه ثابت، ولا يساوي 0. يُسمّى هذا الفرق **الفرق المشترك Common difference**. الفرق المشترك للمتتالية الحسابية أعلاه هو 000 500 1دينار.

قيمة السيارة (مليون دينار)

الوقت (سنة)

الحد	a_1	a_2	a_3	a_4
القيمة	17 750 000	16 250 000	14 750 000	13 250 000
الفروق	–1500	–1500	–1500	

تذكر أن الفروق الأولى لقيم دالّة خطّية فروق ثابتة. لاحظ التالي: إذا مثّلت بيانيًّا الأزواج المرتبة (n, a_n) تحصل على نقاط تقع كلها على مستقيم واحد. هكذا يُمكنك النظر إلى المتتالية الحسابية على أنها دالّة خطّية مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية.

مثـــال 1 تمييز المتتاليات الحسابية

حدِّد إن كانت المتتالية حسابية أو لا. إذا كانت حسابية، جِد الفرق المشترك والحد الذي يلي آخر حد مُعطى.

أ $-3, 2, 7, 12, 17, ...$

الحدود	17	12	7	2	-3
الفروق	5	5	5	5	

المتتالية حسابية، والفرق المشترك بين حدودها هو 5.الحد التالي هو $5 + 17 = 22$.

ب $-4, -12, -24, -40, -60, ...$

الحدود	–60	–40	–24	–12	–4
الفروق	–20	–16	–12	-8	

المتتالية ليست حسابية لأن الفروق الأولى غير متساوية.



1. حدِّد إن كانت المتتالية حسابية، أو لا. إذا كانت حسابية، جِد الفرق المشترك والحد الذي يلي آخر حد مُعطى.

أ $1.9, 1.2, 0.5, -0.2, -0.9, ...$

ب $\frac{11}{2}, \frac{11}{3}, \frac{11}{4}, \frac{11}{5}, \frac{11}{6}, ...$

تفحّص النمط في الشكل المقابل.
كل حدّ يساوي الحد الأول مضافًا إليه أحد مضاعفات الفرق المشترك.
الحد الثاني = الحد الأول + الفرق المشترك
الحد الثالث = الحد الأول + 2 الفرق المشترك
وهكذا...
يمكنك تعميم هذا النمط بالقانون التالي:

قيمة السيارة سنة بعد سنة	
n	a_n
1	$a_1 = 16\,750\,000 + 0(-1500\,000)$
2	$a_2 = 16\,750\,000 + 1(-1500\,000)$
3	$a_3 = 16\,750\,000 + 2(-1500\,000)$
4	$a_4 = 16\,750\,000 + 3(-1500\,000)$
5	$a_5 = 16\,750\,000 + 4(-1500\,000)$





القانون العام للمتتاليات الحسابية

يُحسب الحد النوني لمتتالية حسابية بالقانون $a_n = a_1 + (n-1)d$

حيث a_1 هو الحد الأول للمتتالية، وَ d ويُسمى **أساس** المتتالية.

مثـــال 2 حساب الحد النوني لمتتالية حسابية منشورة

جد الحد العاشر في المتتالية الحسابية ... ,4 ,11 ,18 ,25 ,32

الخطوة 1 جِد أساس المتتالية. $d = 25 - 32 = -5$

الخطوة 2 احسب الحد العاشر باستعمال القانون.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ القانون.

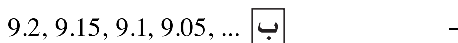
$a_{10} = 32 + (10-1)(-7)$ عوِّض.

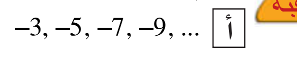
$= -31$ بسِّط.

الحد العاشر في هذه المتتالية هو -31 .

تحقَّق أكمل المتتالية.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	32	25	18	11	4	−3	−10	−17	−24	−31



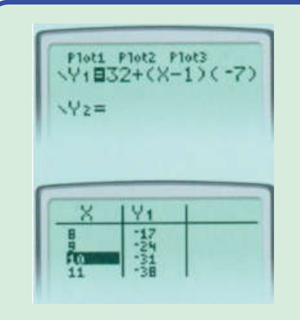


2. جِد الحد الحادي عشر في كل متتالية حسابية.

أ) ... ,9− ,7− ,5− ,3−

ب) ... ,9.05 ,9.1 ,9.15 ,9.2

من طالب إلى طالب



أحب أن أتحقَّق من قيمة حد باستعمال الحاسبة البيانية.
أدخل إلى الحاسبة دالّة الحد العام. أدخل، في المثال 2 ، $y = 32 + (x-1)(-7)$.
أستعمل، بعد ذلك، وظيفة الجدولة. أبدأ بـ 1 $(n=1)$ ، وأستعمل خطوة مقدارها 1. بعد ذلك، أقرأ قيمة الحد الذي أريد. إنها قيمة y التي تُقابل رتبة الحد.

مثـــال 3 إيجاد الحدود الناقصة.

جِد الحدود الناقصة في المتتالية الحسابية $11, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, -17$.

الخطوة 1 جِد الأساس.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ القانون.

$-17 = 11 + (5-1)d$ عوِّض.

$-7 = d$ بسِّط.

الخطوة 2 جِد الحدود الناقصة باستعمال $a_1 = 11$ وَ $d = -7$.

$a_2 = 11 + (2-1)(-7) = 4$

$a_3 = 11 + (3-1)(-7) = -3$

$a_4 = 11 + (4-1)(-7) = -10$



3. جِد الحدود الناقصة في المتتالية الحسابية $2, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, 0$.

بما أن الفروق بين حد وسابقه في متتالية حسابية، هي فروق ثابتة، فإن معرفة حدَّين تكفي لإيجاد الأساس.

مثـــال 4 إيجاد الحد النوني لمتتالية حسابية بمعرفة حدَّين.

جِد الحد السادس في متتالية حسابية، علمًا بأن $a_9 = 120$ وَ $a_{14} = 195$.

الخطوة 1 جِد الفرق المشترك.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ القانون.

$a_{14} = a_9 + (14-9)d$ اعتبر $a_n = a_{14}$ وَ $a_1 = a_9$. ضع 9 بدل 1.

$a_{14} = a_9 + 5d$ بسِّط.

$195 = 120 + 5d$ عوِّض.

$15 = d$ حُلّ.

الخطوة 2 جِد a_1.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ القانون.

$120 = a_1 + (9-1)(15)$ عوِّض.

$120 = a_1 + 120$ بسِّط.

$0 = a_1$ حُلّ.

الخطوة 3 اكتب قاعدة المتسلسلة واستعملها لإيجاد a_6 .

$a_n = a_1 + (n-1)d$ القانون.

$a_n = 0 + (n-1)(15)$ عوِّض.

$a_6 = 0 + (6-1)15$ بسِّط.

$= 75$

الحد السادس في هذه المتتالية هو 75 .

تـذكَّـرْ

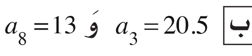
إذا عُلِم حدّان a_m وَ a_n من متتالية حسابية، فإن الأساس يُساوي $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$.



4. جِد الحد الحادي عشر في كل متتالية حسابية.



أ) $a_2 = -133$ وَ $a_3 = -121$



ب) $a_3 = 20.5$ وَ $a_8 = 13$

كتبت في الدروس السابقة متسلسلات، وحسبت قيمها. **المتسلسلة الحسابية Arithmetic Series** متسلسلة متتالياتها حسابية. يُمكنك أن تجد بسهولة قانونًا لحساب قيمة متسلسلة حسابية حتى رتبة معيّنة، كما يلي:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \ldots + a_n \\ S_n &= a_n + (a_n-d) + (a_n-2d) + \ldots + a_1 \\ \hline 2S_n &= \underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)\ldots+(a_1+a_n)}_{a_1+a_n \text{ مجموع } n \text{ مقدار كل منها يساوي }} \end{aligned}$$

$$2S_n = n(a_1+a_n)$$

$$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right) \text{ أو } S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

اعلم و احفظ

مجموع الحدود الأولى في متسلسلة حسابيّة

بالكلمات	بالأعداد	في الجبر
مجموع الحدود الأولى في متسلسلة حسابية هو ناتج ضرب عدد هذه الحدود في متوسِّط الحدَّين الأول والأخير.	مجموع $2+4+6+8+10$ هو $S_5 = 5\left(\frac{2+10}{2}\right) = 5(6) = 30$	$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$ حيث n عدد الحدود وَ a_1 الحد الأول وَ a_n الحد الأخير.



مثال 5 إيجاد قيمة متسلسلة حسابية

جد المجموع المطلوب في كل متسلسلة حسابية.

أ S_{15} في المتسلسلة

$\mathbf{25+12+(-1)+(-14)+\ldots}$

جِد الأساس.

$d = 12 - 25 = -13$

جِد الحد a_{15}.

$a_{15} = 25 + (15-1)(-13)$

$= -157$

جِد S_{15}.

$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$

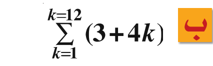
$S_{15} = 15\left(\frac{25+(-157)}{2}\right)$

$= 15(-66) = -990$

استعمل الحاسبة البيانية لتتحقَّق.

```
sum(seq(3+4X,X,1
,12,1))
                348
```

√

ب  $\sum_{k=1}^{k=12}(3+4k)$

جِد الحدَّين a_1 وَ a_{12}.

$a_1 = 3 + 4(1) = 7$

$a_{12} = 3 + 4(12) = 51$

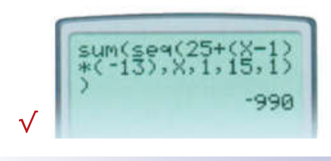
جِد S_{12}.

$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$

$S_{12} = 12\left(\frac{7+51}{2}\right)$

$= 348$

استعمل الحاسبة البيانية لتتحقَّق.



√

انتبه

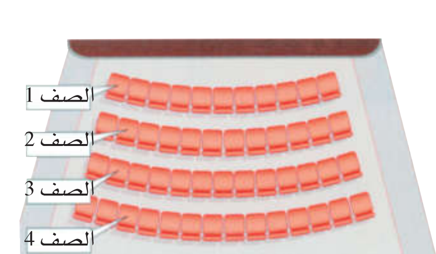
هذه المجاميع جزئية. لا تستطيع أن تجد مجموع متسلسلة حسابية غير منتهية، لأن قيم حدودها تتزايد أو تتناقص إلى ما لا نهاية.



5. جِد المجموع المطلوب لكل متسلسلة حسابية.

أ S_{16} في المتسلسلة $12+7+2+(-3)+\ldots$ ب $\sum_{k=1}^{k=15}(50-20k)$

مثـــال 6 تطبيق على المسارح



تُشكِّل أعداد المقاعد في الصفوف الـ 14 الأولى في الجناح الأوسط من أحد المسارح العالميَّة، متتالية حسابية.

أ ما عدد المقاعد في الصف الـ 14 ؟

اكتب القانون مستعملاً $a_1 = 11$ وَ $d = 1$.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	اكتب قانون الحد النوني.
$a_{14} = 11 + (14-1)(1)$	عوِّض.
$= 11 + 13$	
$= 24$	بسِّط.

عدد المقاعد في الصف الرابع عشر 24 مقعدًا.

ب ما عدد المقاعد في الصفوف الـ 14 كلها؟

جِد S_{14} باستعمال قانون مجموع الحدود الأولى في متسلسلة حسابية.

$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$	القانون.
$S_{14} = 14\left(\frac{11+24}{2}\right)$	عوِّض.
$= 14\left(\frac{35}{2}\right) = 245$	بسِّط.

عدد المقاعد في الصفوف الـ 14 الأولى هو 245 مقعدًا.



6. ماذا لو...؟ افترض أن عدد المقاعد في كل صف ابتداء من الثاني يزيد مقعدين على الصف الذي أمامه.

أ ما عدد المقاعد في الصف الـ 14؟

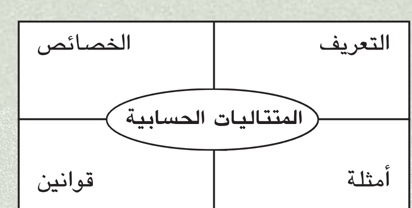
ب ما عدد المقاعد في الصفوف الـ 14 الأولى؟

فكِّرْ وناقش

1. قارن بين المتتالية الحسابية والدالَّة الخطّية.
2. ما معنى أن يكون أساس متتالية حسابية سالبا؟
3. كيف تجد الحد السادس في متتالية حسابية إذا عرفت الحدَّين الثالث والرابع؟
4. كيف تجد الأساس في متتالية حسابية إذا عرفت الحدَّين السابع والثاني عشر؟



5. **كن منظّمًا** انسخ المخطّط المقابل ثم أكمله. املأ كل إطار بحيث تُبيّن ما فهمته من المتتاليات الحسابية.



3-6 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** المقدار $10+20+30+40+50$ هو (متتالية حسابية أو متسلسلة حسابية).

انظر المثال 1

حدِّد إن كانت كل متتالية حسابية أو لا. إذا كانت حسابية، جِد الأساس والحد التالي.

2 $46, 39, 32, 25, 18, \ldots$

3 $28, 21, 15, 10, 6, \ldots$

4 $\frac{12}{3}, \frac{10}{3}, \frac{8}{3}, \frac{6}{3}, \frac{4}{3}, \ldots$

انظر المثال 2

جِد الحد الثامن في كل متتالية حسابية.

5 $3, 8, 13, 18, \ldots$

6 $10, 9\frac{3}{4}, 9\frac{1}{2}, 9\frac{1}{4}, \ldots$

7 $-3.2, -3.4, -3.6, -3.8, \ldots$

انظر المثال 3

جِد الحدود الناقصة في كل متتالية حسابية.

8 $13, ■, ■, 25, \ldots$

9 $9, ■, ■, ■, 37, \ldots$

10 $1.4, ■, ■, ■, -1, \ldots$

انظر المثال 4

جِد الحد التاسع في كل متتالية حسابية.

11 $a_4=27$ ، $a_5=19$

12 $a_3=12.2$ ، $a_4=12.6$

13 $a_3=-5$ ، $a_6=-11$

14 $a_{10}=100$ ، $a_{20}=50$

15 $a_7=-42$ ، $a_{11}=-28$

16 $a_4=\frac{3}{4}$ ، $a_8=\frac{1}{2}$

انظر المثال 5

جِد المجموع المطلوب في كل متسلسلة.

17 S_{15} في المتسلسلة $5+9+13+17+\ldots$

18 $\sum_{k=1}^{k=12}(-2+6k)$

19 S_{18} في المتسلسلة $3.2+2.9+2.6+2.3+\ldots$

انظر المثال 6

20 **أجور** التحق بلند بشركة معلوماتية للعمل فيها بمرتّب سنوي مقداره 26 000 000 دينار على أن يزداد مرتّبه 1 250 000 دينار سنويًا.

أ) كم سيبلغ مرتبه في السنة السادسة؟

ب) كم سيكون مجموع ما تقاضاه من أجور في السنوات الست الأولى؟

تمارين وحل مسائل

لحل التمارين	أنظر المثال
23-21	1
26-24	2
29-27	3
32-30	4
35-33	5
36	6

(تمارين حرّة)

حدِّد إن كانت المتتالية حسابية أو لا. إذا كانت حسابية، جِد الأساس والحد التالي.

21 $288, 144, 72, 36, 18, \ldots$

22 $-2, -12, -22, -32, -42, \ldots$

23 $0.99, 0.9, 0.81, 0.72, \ldots$

جِد الحد الحادي عشر في كل متتالية حسابية.

24 $12, 11.9, 11.8, 11.7, \ldots$

25 $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \ldots$

26 $-3.0, -2.5, -2.0, -1.5, \ldots$

جِد الحدود الناقصة في كل متتالية حسابية.

27 $77, ■, ■, ■, 33, \ldots$

28 $-29, ■, ■, -2, \ldots$

29 $2.3, ■, ■, ■, 1.5, \ldots$

جِد الحد الثاني عشر في كل متتالية حسابية.

30 $a_5=16.2$ ، $a_4=18.4$ **31** $a_8=46$ ، $a_4=-2$ **32** $a_{25}=-58$ ، $a_{22}=-49$

جِد المجموع المطلوب في كل متسلسلة حسابية.

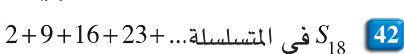
33 S_{15} في المتسلسلة $-18+(-16)+(-14)+\dots$ **34** $\sum_{k=1}^{k=20}(88-3k)$ **35** $\sum_{k=1}^{k=14}\left(14-\frac{1}{2}k\right)$



36 **استهلاك** اشترت كازين ثوبًا بالتقسيط. دفعت للبائع 15000 دينار في الأسبوع الأول، واتفقت معه على زيادة القسط 5000 دينار كل أسبوع.

أ كم ستدفع في الأسبوع التاسع؟

ب كم سيكون مجموع دفعاتها عند نهاية الأسبوع التاسع؟



37 **ساعات** تدق ساعة الساحة دقة عند الساعة الواحدة، ودقتين عند الساعة الثانية، وهكذا ...

أ كم دقة تدق الساعة من الساعة 1 بعد الظهر حتى منتصف الليل؟ على مدى 24 ساعة؟

ب **ماذا لو...؟** تدق ساعة البلدية دقة كل نصف ساعة. اكتب المتتالية التي تمثل الدّقات المسموعة عند كل ساعة. وما عدد الدّقات المسموعة؟

نافذة على الساعة

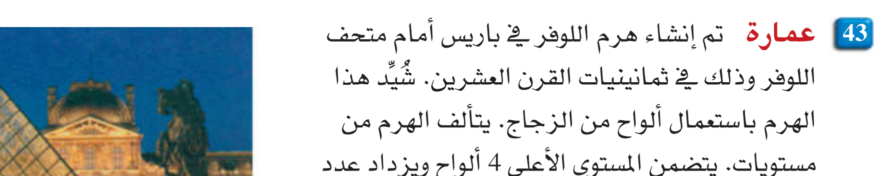


من أهم معالم مدينة لندن، عاصمة بريطانيا، ساعة بيغ بن الشهيرة. تقع هذه الساعة في ساحة البرلمان البريطاني. يعود اسم هذه الساعة Big Ben إلى جرسها الضخم الذي تبلغ كتلته 13.8 طن والذي يدق للإعلان عن الوقت.

جِد المجموع المطلوب في كل متسلسلة حسابية.

38 $\sum_{k=1}^{k=16}(555-11k)$ **39** $\sum_{k=1}^{k=15}(4-0.5k)$ **40** $\sum_{k=1}^{k=18}\left(-33+\frac{5}{2}k\right)$

41 S_{16} في المتسلسلة $7.5+7+6.5+\dots$ **42** S_{18} في المتسلسلة $2+9+16+23+\dots$



43 **عمارة** تم إنشاء هرم اللوفر في باريس أمام متحف اللوفر وذلك في ثمانينيات القرن العشرين. شُيِّد هذا الهرم باستعمال ألواح من الزجاج. يتألف الهرم من مستويات. يتضمن المستوى الأعلى 4 ألواح ويزداد عدد الألواح 4، بالانتقال الى المستوى الأدنى منه.



أ استعمل رمز الجمع لكتابة متسلسلة تحدِّد عدد الألواح الكلّي في n مستوى.

ب لو كان الهرم يتألف من 18 مستوى:، فكم سيكون عدد ألواح الزجاج؟

ج في الحقيقة، تم استعمال عدد من الألواح يقلّ 11 لوحًا عما حسبته لإنشاء مدخل إلى الهرم. ما عدد ألواح الزجاج التي يتضمنها هرم اللوفر؟

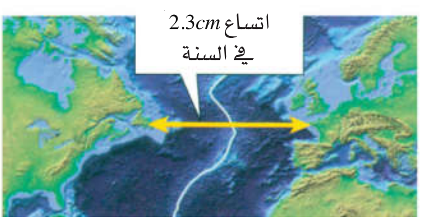
44 **فيزياء** ترتفع أبراج المياه عاليًا لكي تصل المياه إلى كل بيت. كلما ارتفع الخزان مترًا واحدًا ازداد ضغط المياه 9.73 كيلو باسكال.

أ اكتب متتالية تُبيّن ضغط المياه مع ارتفاع الخزان مترًا بعد آخر.

ب ما الحد الأدنى لارتفاع الخزان حتى يصل ضغط المياه إلى 345 كيلو باسكال؟

ج ما الحد الأدنى لارتفاع الخزان حتى يصل ضغط المياه إلى 690 كيلو باسكال، وهو المستوى الأفضل المتعارف عليه لضغط الماء؟

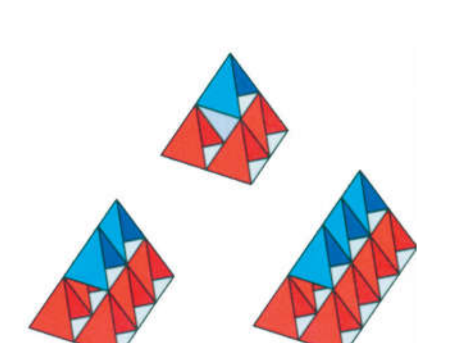
د مثّل المتتالية بيانيًّا، وناقش العلاقة بين ضغط المياه في السؤالَين ب وَ ج.




45 **جيولوجيا** تبتعد قارة أمريكا الشمالية سنويًّا عن القارة الأوروبية.

أ كم ستبتعد أمريكا الشمالية عن أوروبا بعد 50 سنة؟

ب بعد كم سنة سيزيد البعد بين القارتين كيلومترًا واحدًا على الأقل؟



46 يُمكنك تركيب نموذج هرمي وحيد الرأس من طابقين باستعمال 4 أهرامات ثلاثية القاعدة. لكي تركِّب نموذجًا برؤوس متعددة من طابقين، يلزمك 3 إهرامات إضافية في كل مرة، كما تُبيّن ذلك الصورة المقابلة.

أ كم هرمًا ثلاثي القاعدة يلزمك لبناء نموذج من طابقين له 20 رأسًا؟

ب ركَّبت سولاف 20 نموذجًا من طابقين رؤوسها من 1 إلى 20 على التوالي. كم هرمًا ثلاثي القاعدة استعملت؟

47 **أجور** يعرض أحد نوادي كرة السلة على مدرّب للفريق أجرًا مقداره 000 395 دينار في الأسبوع الأول، وزيادة 000 45 دينار كل أسبوع بغية تشجيع المدربين الناجحين على التقدُّم إلى الوظيفة. تقاضى المدرب 000 755 دينار في آخر أسبوع من موسم التدريب . كم أسبوعًا دام هذا الموسم؟

48 **تفكير ناقد** ما الحد الأدنى من الحدود التي عليك معرفتها لتكتب قاعدة متتالية حسابية؟ كم نقطة يلزمك لكتابة معادلة مستقيم؟ هل من علاقة بين الجوابين؟ أوضح ذلك.

49 **اكتب** الفرق المشترك في متتالية حسابية عدد موجب. ما الذي يحدث للحد a_n عندما تتزايد قيمة n باستمرار؟ ما الذي يحدث له إذا كان الفرق المشترك سالبًا؟



50 أي مما يلي متتالية حسابية؟

أ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

ب $2.2, 4.4, 6.6, 8.8, \ldots$

ج $2, 4, 8, 16, \ldots$

د $2, 4, 7, 11, \ldots$

51 يتقاضى أحد منظّمي الحفلات 45 ألف دينار، يُضاف إليها 12 ألف دينار عن كل شخص. أي من المتتاليات أدناه تعبّر عن الحالة؟

أ $a_n = 45 + 12(n-1)$

ب $45, 57, 69, 81, 93, \ldots$

ج $a_n = 57 + 12n$

د $57, 69, 81, 93, 105, \ldots$

52 أي مما يلي الأعداد الناقصة في المتتالية الحسابية $4, ■, ■, ■, 40$ ؟

أ $11, 22, 33$

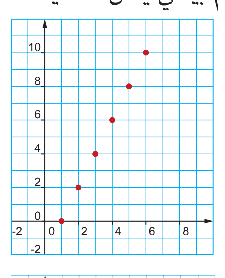
ب $13, 22, 31$

ج $14, 24, 34$

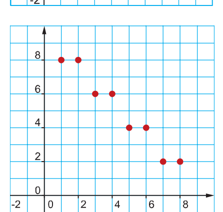
د $16, 24, 36$

53 أي رسم بياني يمثِّل متتالية حسابية؟

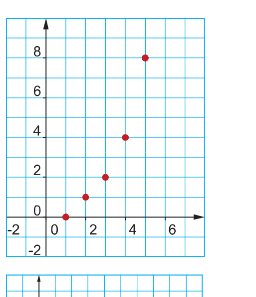
(أ)



(ب)



(ج)



(د)

54 أي مما يلي مجموع المتسلسلة $4+7+10+13+16+19$؟

أ $\sum_{k=1}^{k=6} 19-3k$

ب $\sum_{k=1}^{k=6} (22-3k)$

ج $\sum_{k=1}^{k=6} 19-4k$

د $\sum_{k=1}^{k=6} (22-3(k-1))$

55 **جواب مختصر** ما الحد الثالث عشر في المتتالية الحسابية $54, 50, 46, 42, \ldots$؟

تحدٍّ وتوسّع

56 لديك حدان a_n وَ a_m من حدود متتالية حسابية.

أ بيّن أن الأساس في هذه المتتالية الحسابية هو $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$

ب استعمل القاعدة الجديدة لإيجاد الأساس عندما $a_{12}=88$ وَ $a_{36}=304$

57 جِد قاعدة لا تتضمن من الحدود غير الحد الأول، لحساب مجموع متتالية حسابية. متى يكون مناسبًا استعمال هذه القاعدة؟

58 مجموع ثلاثة حدود متتالية في متتالية حسابية هو 60. ما هذه الحدود إذا كان ناتج ضربها يساوي 7 500 ؟

59 **تفكير ناقد** ما معنى أن تكون المساواة $a_{2n}=2a_n$ صحيحة في متتالية حسابية؟

مراجعة لولبية

اذكر إن كانت الدالّة الأسية دالّة نمو أو دالّة تراجع. (الدرس 4 - 1)

60 $f(x)=1.25(0.75)^x$

61 $f(x)=1.43(5.32)^x$

62 $f(x)=0.92(0.64)^x$

63 **أصوات** تشكِّل الدالّة $L=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$، حيث يمثِّل L مستوى شدّة الصوت بالديسيبل وَ I شدة الصوت، وَ I_0 شدّة عتبة السمع، نموذجًا لحساب مستوى شدّة الأصوات، جد مستوى شدّة صوت شدّته $10^{9.2}I_0$.

اكتب كل متسلسلة باستعمال رمز الجمع. (الدرس 6 - 2)

64 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

65 $\frac{4}{5}+\frac{8}{5}+\frac{12}{5}+\frac{16}{5}+4$

66 $-1+2+7+14+23$

67 $-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-1-\frac{4}{3}-\frac{5}{3}$

الفصل 6



اختبار جزئي

1-6 مدخل إلى المتتاليات

جِد الحدود الخمسة الأولى في كل متتالية.

1) $a_n = \frac{2}{3}n$

2) $a_n = 4^{n-1}$

3) $a_1 = -1.3$ ، $a_n = 2a_{n-1} - 12$

4) $a_n = n^2 - 2n$

اكتب تعريفًا معلنًا ممكنًا لكل متتالية.

5) $8, 11, 14, 17, 20, \ldots$

6) $-2, -8, -18, -32, -50, \ldots$

7) $1\,000, 200, 40, \frac{8}{5}, \ldots$

8) $437, 393, 349, 305, 261, \ldots$

9) تسير حافلة بسرعة 55 km/h. انطلقت الحافلة من الكيلومتر 18 من الطريق وحافظت على سرعتها. عند أي كيلومتر من الطريق تكون الحافلة بعد 4 ساعات؟ مثِّل بيانيًّا المتتالية لـ n ساعة، وصِف النمط.

2-6 المتسلسلات ورمز الجمع

انشر المتسلسلة واحسب قيمتها.

10) $\sum_{k=1}^{k=4}(-14-2k)$

11) $\sum_{k=1}^{k=4}\left(\frac{k}{k+2}\right)$

12) $\sum_{k=1}^{k=5}(-1)^k\left(k^2-2\right)$

جِد قيمة المتسلسلة.

13) $\sum_{k=1}^{k=5}\frac{1}{2}$

14) $\sum_{k=1}^{k=40}k^2$

15) $\sum_{k=1}^{k=15}k$

16) عدد مقاعد الصف الأول في أحد المسارح 20 مقعدًا. يزداد عدد المقاعد من صف إلى الصف الذي يليه 3 مقاعد. ما مجموع المقاعد في المسرح، علمًا بأن عدد صفوفه 12 صفًّا؟

3-6 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

جِد الحد الثامن في كلّ متتالية حسابية.

17) $10.00, 10.11, 10.22, 10.33, \ldots$

18) $-5, -13, -21, -29, \ldots$

19) $a_2 = 57.5$ وَ $a_5 = 80$

20) $a_{10} = 141$ وَ $a_{13} = 186$

جِد الحدود الناقصة في كل متتالية حسابية.

21) $-23, \blacksquare, \blacksquare, -89, \ldots$

22) $31, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, 79, \ldots$

جِد المجموع المطلوب في كلّ متسلسلة حسابية.

23) S_{10} في المتسلسلة $40+30+20+10+\ldots$

24) $\sum_{k=1}^{k=8}4k$

25) $\sum_{k=1}^{k=11}(0.5k+5.5)$

26) S_{14} في المتسلسلة $-6-1+4+9+\ldots$

27) قرر بيشرو توفير بعض ما يُعطيه إياه والده في صندوق خاص. قرر أن يودع الصندوق ألف دينار في الأسبوع الأول من السنة، وَ 1500 ألف دينار في الأسبوع الثاني، وألفَي دينار في الأسبوع الثالث، وهكذا... كم سيودع الصندوق في الأسبوع الأخير من السنة؟ (تذكَّر أن السنة تتألف من 52 أسبوعًا). كم سيكون في الصندوق عند نهاية العام؟



4-6 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية Geometric sequences and Series



الأهداف

يجد حدود متتالية هندسية بما فيها المتوسط الهندسي. يجد قيم المتسلسلات الهندسية.

المفردات Vocabulary

المتتالية الهندسية Geometric Sequence

المتوسط الهندسي Geometric mean

المتسلسلة الهندسية Geometric Series

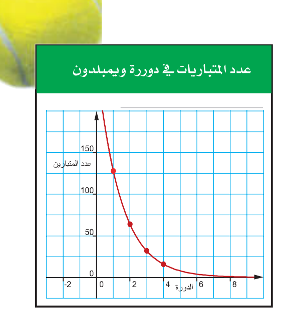
من يستعمل هذا الأمر؟

يُمكن لمخطّطي المباريات الرياضية استعمال المتتاليات والمتسلسلات الهندسية لتحديد عدد المباريات في كل دوري (مثال 6).

فازت سيرينا ولياس، من بين 128 متبارية ، في كرة المضرب للسيدات في ويمبلدون Wimbledon سنة 2003. في نهاية كل مباراة بين لاعبتين، تتابع الفائزة اللعب بينما تخرج الخاسرة من الدورة. هذا يعني أن عدد المتباريات ينخفض إلى النصف في نهاية كل دورة. يُمكن التعبير عن أعداد المتباريات الباقية بعد كل دورة باستعمال متتالية هندسية. في **متتالية هندسية Gteometric sequence**، تكون النسبة بين كل حد والحد الذي يسبقه ثابتة ومختلفة عن 1. تُسمّى هذه النسبة **أساس المتتالية Common ratio** . أساس المتتالية الهندسية أعلاه هي $\frac{1}{2}$.

الدورة	1	2	3	4
العدد	128	64	32	16

النسب: $\frac{64}{128}=\frac{1}{2}$ ، $\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$ ، $\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$



تذكّر أن للدوال الأسّية نسبة مشتركة. عندما تمثِّل بيانيًّا الأزواج المرتبة (n,a_n) لمتتالية هندسية، تقع النقاط التي رسمتها على منحن أسّي، كما يُبيّن ذلك الرسم البياني المقابل. وهكذا تستطيع أن تنظر إلى المتتالية الهندسية كما لو أنّها دالّة أسّية مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية.

مثـــال 1 تمييز المتتاليات الهندسية

حدِّد إن كانت المتتالية هندسية أو لا. إذا كانت هندسية، حدِّد الأساس والحد الذي يلي آخر حد معطى.

أ 8, 12, 18, 27, ...

8 12 18 27

الفروق 4 6 9

النسب $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$

المتتالية هندسية.

الأساس $r=\frac{3}{2}$

ب 8, 16, 24, 32, ...

8 16 24 32

الفروق 8 8 8

النسب 2 $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{3}$

المتتالية حسابية.

الأساس $d=8$.

ج 6, 10, 15, 21, ...

6 10 15 21

الفروق 4 5 6

النسب $\frac{5}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{7}{5}$

المتتالية ليست حسابية ولا هندسية.



نقطة مراقبة

1. حدِّد إن كانت المتتالية هندسية أو لا. إذا كانت هندسية، حدِّد الأساس والحد الذي يلي آخر حد مُعطى.

أ $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36}, \frac{1}{108}, ...$

ب 1.7, 1.3, 0.9, 0.5, ...

ج −50, −32, −18, −8, ...

كل حد في متتالية هندسية هو ناتج ضرب الحد الذي يسبقه في الأساس، مما يُعطي التعريف المضمر لهذه المتتالية على الشكل التالي.

$$\text{الحد النوني} \longrightarrow a_n = \underbrace{a_{n-1}}_{\text{الحد السابق}} r \longleftarrow \text{الأساس}$$

يمكنك أيضًا أن تستعمل تعريفًا معلنًا لإيجاد الحد النوني لمتتالية هندسية. كل حد هو ناتج ضرب الحد الأول في قوة من قوى الأساس، كما يُبين ذلك الجدول التالي.

عدد اللاعبات في كل دورة في ويمبلدون

الدورة	1	2	3	4	n
عدد اللاعبات	128	64	32	16	a_n
القاعدة	$a_1 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$a_2 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$a_3 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$a_4 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$a_n = 128\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$



القانون العام للمتتاليات الهندسية

يُحسب الحد النوني a_n لمتتالية هندسية بالقانون

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

حيث a_1 هو الحد الأول للمتتالية، وَ r أساسها.

مثـــال 2 إيجاد الحد النوني في متتالية هندسية منشورة

جِد الحد التاسع في المتتالية الهندسية ... ,80–, 40, 20–, 10, 5–

الخطوة 1 احسب الأساس باستعمال القانون. $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{-5} = -2$

الخطوة 2 احسب الحد التاسع باستعمال القانون.

$a_n = a_1 r^{n-1}$ القانون.

$a_9 = -5(-2)^{9-1}$ عوِّض.

$a_9 = -5(256) = -1280$ بسِّط.

الحد التاسع في هذه المتتالية هو 1280–.

تحقّق أكمل المتتالية.

$a_5 = -80$

$a_6 = -80(-2) = 160$

$a_7 = 160(-2) = -320$

$a_8 = -320(-2) = 640$

$a_9 = 640(-2) = -1280$ ✓



2. جِد الحد التاسع في كل متتالية هندسية.

أ) $\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{32}, \frac{3}{64}, \ldots$

ب) $0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, \ldots$

مثـــال 3 إيجاد الحد النوني لمتتالية هندسية بمعرفة حدَّين

جِد الحد العاشر في متتالية هندسية علمًا بأن $a_5 = 96$ و $a_7 = 384$.

الخطوة 1. جِد الأساس.

$a_7 = a_5 r^{7-5}$	القانون.
$a_7 = a_5 r^2$	بسِّط.
$384 = 96r^2$	عوِّض.
$4 = r^2$	اقسم كل طرف على 96 .
$\pm 2 = r$	جِد الجذر التربيعي لكل طرف.

الخطوة 2. جِد a_1 .

ادرس كل حالة من حالتَي r على حدة.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	$a_n = a_1 r^{n-1}$	القانون.
$96 = a_1 (2)^{5-1}$	$96 = 6(-2)^{5-1}$	عوِّض.
$6 = a_1$	$6 = a_1$	بسِّط.

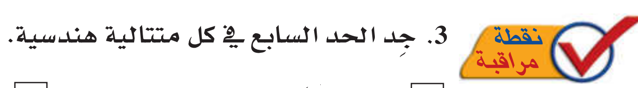
الخطوة 3. اكتب قاعدة المتتالية، واستعملها لإيجاد a_{10} .

$a_n = a_1 r^{n-1}$	$a_n = a_1 r^{n-1}$	القانون.
$a_n = 6(2)^{n-1}$	$a_n = 6(-2)^{n-1}$	عوِّض.
$a_{10} = 6(2)^{10-1}$	$a_{10} = 6(-2)^{10-1}$	عوِّض عن n بـ 10 .
$a_{10} = 3072$	$a_{10} = -3072$	بسِّط.

الحد العاشر في هذه المتتالية هو 3072 أو -3072.

انتبـه!

عندما تُعطى حدَّين من حدود المتتالية، تأكد من أن تأخذ القيمة الموجبة والقيمة السالبة لـ r إذا كان ذلك متاحًا.



نقطة مراقبة

3. جِد الحد السابع في كل متتالية هندسية.

أ) $a_4 = -8$ و $a_5 = -40$

ب) $a_2 = 768$ و $a_4 = 48$

إذا كان a، b، c ثلاثة حدود متتالية موجبة، في متتالية هندسية، فإن $b = \sqrt{ac}$

لذلك يعرّف **المتوسِّط الهندسي** لعددين موجبين x وَ y بأنه $\sqrt{xy}$.



المتوسِّط الهندسي

في كل متتالية هندسية حدودها موجبة، كل حد هو متوسِّط هندسي للحدَّين المحيطَين به.

مثـــال 4 إيجاد المتوسِّط الهندسي

جِد المتوسِّط الهندسي للعددين $\frac{1}{32}$ و $\frac{1}{2}$.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{32}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}$$



نقطة مراقبة

4. جِد المتوسِّط الهندسي للعددين 16 وَ 25 .

كما هي حال المتسلسلات الحسابية، فإن **المتسلسلة الهندسية Geometric Series** هي متسلسلة متتاليتها هندسية. يُمكنك أن تجد بسهولة قانونًا لحساب مجموع متسلسلة هندسية حتى رتبة معينّة كما يلي:

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{n-1}$$
$$-rS_n = \quad -a_1 r - a_1 r^2 - \ldots - a_1 r^{n-1} - a_1 r^n$$
$$S_n - rS_n = a_1$$
$$S_n(1-r) = a_1(1-r^n)$$
$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$



مجموع الحدود الأولى في متسلسلة هندسية

يُحسب مجموع الحدود الأولى (S_n) في متسلسلة هندسية $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ باستعمال القانون.

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right); r \neq 1$$

حيث a_1 هو الحد الأول للمتتالية وَ r أساسها.

مثـــال 5 إيجاد مجموع متسلسلة هندسية

جِد المجموع المطلوب في كل متسلسلة هندسية.

أ S_7 في المتسلسلة $3-6+12-24+\ldots$

الخطوة 1 جد النسبة المشتركة.

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{3} = -2$$

الخطوة 2 جد S_7 حيث $a_1 = 3$ وَ $r = -2$ وَ $n = 7$

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_7 = 3\left(\frac{1-(-2)^7}{1-(-2)}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1-(-128)}{3}\right) = 129$$

استعمل الحاسبة البيانية لتتحقَّق.



ب $\sum_{k=1}^{k=5}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

الخطوة 1 جِد الحد a_1.

$$a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

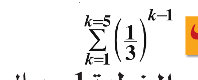
الخطوة 2 جِد S_5.

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_5 = 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right)$$

$$= \frac{1-\frac{1}{243}}{\frac{2}{3}} \approx 1.49$$

استعمل الحاسبة البيانية لتتحقَّق.



تـذكَّـرْ

هذه المجاميع جزئية، لأن كلا منها مجموع عدد منته من الحدود. سوف تتعلم في الدرس 6 - 5 كيف تجد مجموع بعض المتسلسلات الهندسية غير المنتهية.

نقطة مراقبة

5. جِد المجموع المطلوب في كل متسلسلة هندسية.

أ S_8 في المتسلسلة $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$

ب $\sum_{k=1}^{k=6} -3(2)^{k-1}$



مثـــال 6 تطبيق في الرياضة.

أجريت في ألعاب كرة المضرب في ويمبلدون 128 مباراة ، استمرت المباريات حتى بقيت فائزة واحدة. كم مباراة جرت في هذه الألعاب؟

الخطوة 1 اكتب متتالية.

اكتب $n =$ عدد الدورات

$a_k =$ عدد المباريات في الدورة k

$S_n =$ العدد الكلي للمباريات في n دورة

$a_n = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ وبما أن عدد المباريات في كل دورة هو نصف عددها في الدورة السابقة، فإن $r=\frac{1}{2}$ و $a_1=64$.

الخطوة 2 جِد عدد الدورات.

$1 = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ تتضمن الدورة الأخيرة مباراة واحدة

$\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ اعزل الجزء الأسّي من المقدار بالقسمة على 64.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ اكتب $\frac{1}{64}$ على صورة قوة من قوى $\frac{1}{2}$.

$6 = n-1$ ساوِ بين الأسّين.

$7 = n$ بسّط.

الخطوة 3 جِد العدد الكلّي للمباريات.

$S_7 = 64\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{7}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = 127$ استعمل قانون مجموع المتسلسلة الهندسية

إذن تضمَّنت الدورة 127 مباراة.



6. تدفع شركة كبرى 84 000 000 دينار سنويًّا كإيجار لمقرّها. ويزداد هذا المبلغ 8% سنويًا. كم تدفع الشركة على مدى 6 سنوات؟

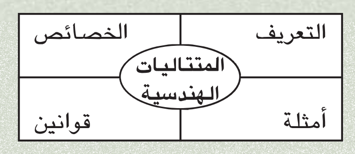
فكِّرْ وناقش

1. جِد الحدود الثلاثة التالية في المتتالية الهندسية ... ,3, 6 ثم جِد الحدود الثلاثة التالية في المتتالية الحسابية ... ,3, 6 .

2. قارن بين المتوسِّط الحسابي والمتوسِّط الهندسي للعددين 4 وَ 16.



3 **كن منظّمًا** انسخ المخطّط المقابل ثم أكمله. املأ كل إطار بحيث تُبيِّن ما فهمته عن المتتاليات الهندسية.



4-6 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** الحد الواقع بين حدَّين غير متتاليين في متتالية هندسية هو ______ (متوسط هندسي أو متسلسلة هندسية).

انظر المثال 1

حدِّد إن كانت كل متتالية هندسية أم حسابية أم غير ذلك. إذا كانت هندسية، جد الأساس والحد التالي.

2 $-10, -12, -14, -16, \ldots$

3 $\frac{1}{2}, 1, 2, 3, \ldots$

4 $-320, -80, -20, -5, \ldots$

انظر المثال 2

جِد الحد العاشر في كل متتالية هندسية.

5 $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$

6 $5000, 500, 50, 5, 0.5, \ldots$

7 $\ldots، -2 ، 1 ، -0.5 ، -0.25 ، -0.125$

انظر المثال 3

جِد الحد السادس في المتتالية الهندسية المعرّفة بحدَّين.

8 $a_4 = -12$ ، $a_5 = -4$

9 $a_2 = 4$ ، $a_5 = 108$

10 $a_3 = 3$ ، $a_5 = 12$

انظر المثال 4

جِد المتوسّط الهندسي لكلّ عددين.

11 6 و $\frac{3}{8}$

12 2 و 32

13 12 و 192

انظر المثال 5

جِد المجموع المطلوب في كل متسلسلة هندسية.

14 S_8 في المتسلسلة $2 + 0.2 + 0.02 + \ldots$

15 $\sum_{k=1}^{k=5} (-3)^{k-1}$

16 S_5 في المتسلسلة $12 - 24 + 48 - 96 + \ldots$

17 $\sum_{k=1}^{k=9} 256\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

انظر المثال 6

18 **أجور** مدرس لغة أجره في سنته الأولى 8000000 دينار. يزداد هذا الأجر بنسبة 5% سنويًا. كم سيكون أجره في عامه العشرين من الخدمة؟ كم سيكون قد تقاضى خلال تلك الفترة؟

تمارين وحلُّ مسائل

تمارين حرّة	
لحل التمارين	انظر المثال
21-19	1
25-22	2
28-26	3
31-29	4
35-32	5
36	6

حدِّد إن كانت المتتالية هندسية أم حسابية أم غير ذلكَ. إذا كانت هندسية، جد الأساس والحد التالي.

19 $-36, -49, -64, -81, \ldots$

20 $-2, -6, -18, -54, \ldots$

21 $2, 7, 12, 17, \ldots$

جِد الحد التاسع في كل متتالية هندسية.

22 $\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{250}, \frac{1}{1250}, \ldots$

23 $3, -6, 12, -24, 48, \ldots$

24 $3200, 1600, 800, 400, \ldots$

25 $8, 24, 72, 216, 648, \ldots$

جِد الحد السابع في المتتالية الهندسية المعرّفة بحدَّين.

26 $a_4 = 54$ ، $a_5 = 162$

27 $a_5 = 13.5$ ، $a_6 = 20.25$

28 $a_4 = -4$ ، $a_6 = -100$

جِد المتوسط الهندسي لكل عددين.

29 9 و $\frac{1}{9}$

30 18 و 2

31 $\frac{1}{5}$ و 45

جِد المجموع المطلوب في كل متسلسلة هندسية.

32 S_6 في المتسلسلة $... + 125 + 25 + 5 + 1$

33 S_8 في المتسلسلة $... + \frac{1}{100} + \frac{1}{10} + 1 + 10$

34 $\sum_{k=1}^{k=6} -1\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

35 $\sum_{k=1}^{k=7} 8(10)^{k-1}$

36 **أجداد** لك والدان، وجدّان وجدّتان، وأربعة جدود وأربع جدّات.

أ) ما عدد أسلافك خلال 6 أجيال قبلك؟ خلال 21 جيلا؟

ب) **ماذا لو...؟** كيف تتغيّر قاعدة حساب عدد الجدود والجدات إذا كنت أنت الجيل الأول؟

جِد لكل متتالية هندسية: تعريفها المعلن، وحدها العاشر ومجموع حدودها العشرة الأولى.

37 $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, ...$

38 $4, 0.4, 0.04, 0.004, ...$

39 $8, 16, 32, 64, ...$

40 $-22, -11, -\frac{11}{2}, -\frac{11}{4}, ...$

41 $162, -54, 18, -6, ...$

42 $12.5, 62.5, 312.5, 1562.5, ...$



على التحف



كانت سيارة الرولس رويس العائدة لمغني الروك اند رول جون لينون الأغلى، فقد بيعت بثمن قدره 2.2 مليون دولار.

43 **تحف** اشترت شاناز طابعًا بريديًّا قديمًا، ودفعت 20 000 دينار ثمنًا له . قدّرت شاناز أن ثمن هذا الطابع سيزداد 15% سنويًّا.

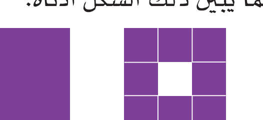
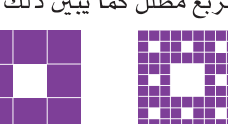
أ) كم سيصبح ثمن الطابع بعد 4 سنوات؟ بعد 6 سنوات؟ .

ب) هل ازدادت قيمة الطابع في السنوات الأربع الأولى أكثر مما زادت في السنوات الأربع الثانية أم لا ؟ أوضح ذلك.

44 **أقساط جامعية** عند ولادة شيرين قرّر جدّها وجدّتها أن يدفعا عنها أقساط الانتساب إلى الجامعة. أعطياها 50 دينارًا يوم مولدها ،قررا أن يدفعا لها في كل سنة ضعف ما دفعاه في السنة السابقة. ما المبلغ الذي تجمَّع لدى شيرين عند بلوغها 18 سنة ؟ عند بلوغها 21 سنة؟

45 **تكنولوجيا** تلقَيت بالبريد الإلكتروني رسالة تمنَّى لك فيها مرسلها الحظ السعيد، وطلب إليك أن ترسلها إلى 5 أصدقاء، طالبًا إليهم أن يرسلها كل منهم بدوره إلى 5 أصدقاء، وهكذا... ما عدد هذه الرسائل بعد 10 مستويات.

46 **فراكتال Fractals** سجادة سيربنسكي Sierpenski شكل توالدي يرتكز على مربع. يتم في كل دورة نزع قلب كل مربع مظلل كما يُبين ذلك الشكل أدناه.

أ) معتبرًا مساحة المربع الأول $1\ m^2$، اكتب متتالية تُبيّن المساحة المظلّلة الناتجة في كل دورة.

ب) في أي دورة ستقل المساحة المظللة عن $\frac{1}{2}\ m^2$ ؟

47 **ورق** يبلغ سَمْك ورقة بيضاء $0.1\ mm$. إذا طويت الورقة يتضاعف سمكها.

أ) أظهرت الدراسات أن بمقدورك طي هذه الورقة 7 مرات على الأكثر. كم سيكون سمك الورقة بعد طيها سبع مرات؟

ب) افترض أن بإمكانك الاستمرار في طيّ الورقة قدر ما تريد. بعد كم مرة يصبح سمك الورقة أكبر من ارتفاع قمة إيفرست Everest الذي يبلغ $8\,850\ m$ ؟

48 جِد متتالية حسابية وأخرى هندسية، بحيث تبدأ كل منها كما يلي: ... ,1,4 .

49 **قياس** يُبين الجدول المقابل قياسات الورق الأكثر استعمالاً في الطباعة المكتبية.

أ تفحّص طول وعرض الورقة من كل قياس، أي علاقة تكتشف؟

ب ما العلاقة التي تربط بين مساحات الأوراق من مختلف القياسات . ما اسم هذه العلاقة؟

قياسات الورق

القياس	البعدان (بالإنش)
A	$8\frac{1}{2}\times 11$
B	11×17
C	17×22
D	22×34
E	34×44

50 بلغت إيرادات أحد الأفلام السينمائية 60 مليار دينار في الأسبوع الأول من عرضه، وَ 9.6 مليار دينار في الأسبوع الثالث. افترض أن من الممكن تمثيل الإيرادات الأسبوعية بمتتالية هندسية.

أ قدّر إيرادات الفيلم في الأسبوع الثاني.

ب ما نسبة تدنّي الإيرادات من أسبوع إلى آخر؟

ج في أي أسبوع تتوقّع أن تقل الإيرادات عن مليار دينار؟

د استمر عرض الفيلم 8 أسابيع. ما مجموع إيرادات عرضه؟

51 **أحياء** نوع من البكتيريا يزداد عدده وفق متتالية هندسية. كان عدد البكتيريا 4 بعد ساعة واحدة، وأصبح 1024 بعد 5 ساعات. كم عدد هذه البكتيريا بعد ساعتين؟ بعد 3 ساعات؟ بعد 4 ساعات؟

52 **تمويل** استأجرت إحدى المؤسسات مقرًّا لها بمبلغ قدره 750 000 دينار شهريًّا خلال السنة الأولى، على أن يزداد هذا المبلغ 10% سنويًّا بعد السنة الأولى.

أ اكتب متسلسلة تمثِّل ما تدفعه المؤسسة سنويًّا على مدى 5 سنوات.

ب استعمل رمز الجمع لتمثل ما تدفعه المؤسسة سنويًّا على مدى 10 سنوات، ثم جِد قيمته.

53 **موسيقى** تُشكِّل تردُّدات بعض النوتات الموسيقية متتالية هندسية حيث C_0 هي النوتة الأضعف.

أ تُعد النوتة C_4 النوتة الوسطى في هذا النوع. ما تردُّدها؟

ب اكتب متتالية هندسية تمثِّل تردُّد النوتات من هذا النوع، معتبرًا $a_1 = C_1$.

ج لا تستطيع الأذن البشرية أن تسمع نوتات تزيد تردُّداتها على 20 000 هيرتز. ما رتبة أول نوتة من هذا النوع لا تسمعها الأذن البشرية؟

مقياس النوتات

النوتة	تردُّدها بالهيرتز
C_0	16.35
C_1	32.7
C_2	65.4
C_3	130.8
C_4	■

54 **طب** سجّل أحد المستشفيات خلال موجة من انتشار الإنفلونزا دخول 16 حالة في الأسبوع الأول، وَ 56 حالة في الأسبوع الثاني، وَ 196 حالة في الأسبوع الثالث.

أ اكتب متتالية هندسية تمثِّل أعداد حالات الإصابة بالإنفلونزا.

ب اذا استمر ازدياد حالات الإصابة على هذا المنوال، ففي أي أسبوع يبلغ مجمل عدد الحالات 10000 إصابة؟

55 **تفكير ناقد** ما تأثير أن يكون أساس متتالية هندسية r أكبر من 1 على حدودها ؟ ما تأثير أن يكون $0<r<1$؟

56 **اكتب** ما الذي يحدث لحدود متتالية هندسية لو أن حدّها الأول تضاعف 3 مرات؟ ما الذي يحدث لمجموع حدودها الأولى؟

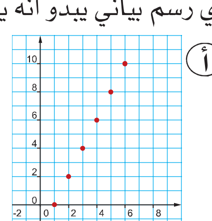
تحضير للاختبار

57 أي مما يلي مجموع الحدود الستة الأولى في المتالية الهندسية $...+36+18+9+4.5$ ؟

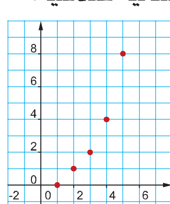
(أ) 67.5 (ب) 144 (ج) 283.5 (د) 445.5

58 أي رسم بياني يبدو أنه يمثِّل متتالية هندسية؟

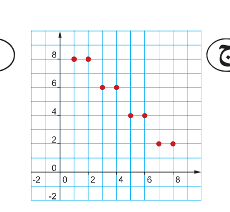
(أ)



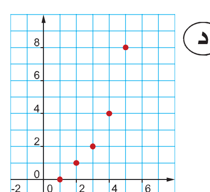
(ب)



(ج)



(د)



59 أي مما يلي الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية حيث، $a_7=-192$ وَ $a_9=-768$ ؟

(أ) $3, -6, 12$

(ب) $-3, 12, -48, ...$

(ج) $-3, 6, -12$ أو $-3, -6, -12$

(د) $3, -12, 48$ أو $-3, -12, -48$

60 أي مما يلي قيمة المتسلسلة $10-15+22.5-33.75+50.625$ ؟

(أ) $\sum_{k=1}^{k=5} 10\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ (ب) $\sum_{k=1}^{k=5} -10\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ (ج) $\sum_{k=1}^{k=5} 10\left(-\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ (د) $\sum_{k=1}^{k=5} -10\left(-\frac{3}{2}\right)^{k}$

تحدٍّ وتوسّع

حاسبة بيانية جِد في كل متتالية هندسية أول حد تتجاوز قيمته المليون.

61 $a_1=10$ ، $r=2$ **62** $r=4$ ، $a_1=\frac{1}{4}$ **63** $a_1=0.01$ ، $r=3.2$

64 مجموع 3 حدود متتالية في متتالية هندسية هو 73.5 . ما هذه الحدود علمًا بأن ناتج ضربها 2744 ؟ أوضح ذلك.

65 استعمل المتتالية الهندسية التي حدّها الأول 55 ، وأساسها $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

أ جِد الحدود الخمسة التي تلي الحد الأول، مقرّبة إلى أقرب عدد صحيح.

ب احسب مجموع كل حدّين متتالين. ماذا تلاحظ؟

ج صِغ مقولة بخصوص هذه المتتالية.

مراجعة لولبية

جد أصفار كل دالة ومقارباتها. (الصفوف السابقة)

66 $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x+1}$ **67** $f(x)=\frac{x+5}{x^2-x-6}$ **68** $f(x)=\frac{x^2-16}{4x}$

69 **تسوّق** يعرض أحد المحالّ الكبرى حسمًا نسبته 20% على بضائعه، خلال فترة شهر. ويعرض حسمًا إضافيًّا أيام الإثنين نسبته 10% . (الدرس 5–3)

أ اكتب دالّة مركّبة تُمثِّل ثمن سلعة يوم الإثنين بدلالة ثمنها الأصلي x.

ب اشترت بينا ثوبًا يوم الإثنين. كم دفعت علمًا، بأن الثمن الأصلي للثوب 275000 دينار؟

جِد الحدود العشرة الأولى في كل متتالية حسابية. (الدرس 6–3)

70 $78, 65, 52, 39, 26, ...$ **71** $1.7, 7.3, 12.9, 18.5, 24.1, ...$

72 $9.42, 9.23, 9.04, 8.85, 8.66, ...$ **73** $16.4, 26.2, 36, 45.8, 55.6, ...$

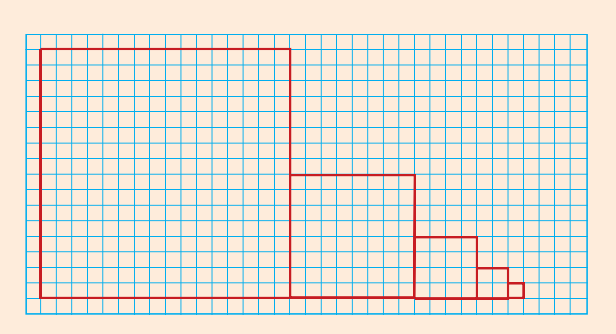


استكشاف المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

يُمكنك استكشاف المتسلسلات الهندسية غير المنتهية باستعمال متتالية مربعات.

نشاط 1

1. ارسم على ورقة مربَّعات، مربّعًا ضلعه 16 وحدة طول. لاحظ أن محيطه 64 وحدة طول.
2. انطلق من إحدى زوايا المربَّع الذي رسمته، وارسم إلى جانبه مربّعات أضلاعها على التوالي 8 و4 و 2 و 1 .



3. انسخ الجدول المقابل، وأكمل الصفوف الستة الأولى بتدوين محيطات المربَّعات في العمود الثاني، والمجموع التراكمي لهذه المحيطات في العمود الثالث.

ضلع المربع	المساحة	المجموع
16	64	64
8	32	96
4		
2		
1		
$\frac{1}{2}$		

4. استعمل رمز الجمع لكتابة متسلسلة هندسية تمثّل مجموع المحيطات.
5. استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد مجموع الحدود العشرين الأولى.
6. **اكتب مقولة** اكتب مقولة بشأن المجموع التراكمي للمحيطات إذا تابعت إنشاء المربَّعات إلى ما لا نهاية.
7. جد قيمة المقدار $\frac{64}{1-\frac{1}{2}}$ ما العلاقة بين ما وجدته وجواب السؤال 6؟

حاول

ضلع المربع	المساحة	المجموع
16		
8		
4		
2		
1		
$\frac{1}{2}$		

1. انسخ الجدول المقابل وأكمله بإيجاد مساحات المربعات والمجموع التراكمي للمساحات.
2. استعمل رمز الجمع لكتابة متسلسلة هندسية تمثّل مجموع المساحات.
3. استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد مجموع الحدود العشرة الأولى.
4. **اكتب مقولة** اكتب مقولة بشأن المجموع التراكمي للمساحات إذا تابعت إنشاء المربَّعات إلى ما لا نهاية.
5. جد قيمة المقدار $\frac{256}{1-\frac{1}{4}}$. ما العلاقة بين ما وجدته وجواب السؤال 4؟
6. **استخلص نتيجة** اكتب قانونًا لحساب قيمة متسلسلة هندسية غير منتهية، نسبتها المشتركة r تحقّق $0<r<1$.

5–6 الاستقراء الرياضي

Mathematical Induction

الأهداف

يجد قيمة متسلسلة هندسية غير منتهية.

يستعمل الاستقراء الرياضي لإثبات مقولات.

المفردات Vocabulary

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية Infinite geometric series

التوافقية Convergent

النهاية Limit

التخالفية Divergent

الاستقراء الرياضي Mathematical Induction

لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

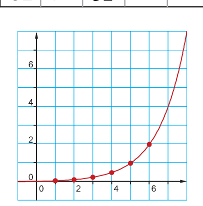
يُمكنك استعمال المتسلسلات الهندسية غير المنتهية لاستكشاف الأنماط المتكرِّرة (التمرين 58).

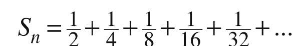
تعلّمت في الدرس السابق كيف تجد المجاميع الجزئية في متسلسلة هندسية. ستتعلّم في هذا الدرس إيجاد المجموع لمتسلسلات هندسية غير منتهية. تتألف **المتسلسلة الهندسية غير المنتهية Infinite geometric series** من عدد غير منته من الحدود. انظر إلى المتسلسلتين الهندسيتين غير المنتهيتين أدناه.

$R_n=\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\dots$

المجاميع الجزئية

n	1	2	3	4	5	6
R_n	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{32}$

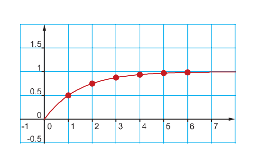




$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots$

المجاميع الجزئية

n	1	2	3	4	5	6
S_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{64}$



لاحظ أن أساس في المتسلسلة الهندسية S_n يساوي $\frac{1}{2}$ ، وأن مجاميعها الجزئية تقترب أكثر فأكثر من 1 كلما كبرت قيم n. عندما يكون $|r|<1$ تقترب المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية من عدد محدَّد كلما ازدادت قيمة n . تقول في هذه الحالة إن المتسلسلة **توافقية Convergent** وإن هذا العدد هو **نهاية Limit** المتسلسلة.

الأمر مختلف مع المتسلسلة R_n . عندما يكون $|r|\geq 1$ ، وتزداد قيم n، تزداد قيم المجاميع الجزئية وتتجاوز كل حد. تقول في هذه الحالة أن المتسلسلة **تخالفية Divergent** .

مثـــال 1 تمييز المتسلسلات الهندسية التوافقية والتخالفية

حدِّد إن كانت المتسلسلة الهندسية توافقية أو تخالفية.

أ $20+24+28.8+34.56+\dots$

$r=\frac{24}{20}=1.2$ ؛ $|r|\geq 1$

المتسلسلة تخالفية ولا مجموع لها.

ب $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\dots$

$r=\frac{1}{3}$ ؛ $|r|<1$

المتسلسلة توافقية ولها مجموع.



1. حدِّد إن كانت المتسلسلة الهندسية توافقية أو تخالفية.

أ $\frac{2}{3}+1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\dots$

ب $32+16+8+4+2+\dots$

إذا كانت المتسلسلة الهندسية توافقية، تستطيع حساب مجموعها . عد إلى المجاميع $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...$. استعمل قانون مجموع الحدود الأولى مع $a_1 = \frac{1}{2}$ وَ $r = \frac{1}{2}$.

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

مثّل بيانيًّا الدالّة $S(n)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$. لاحظ أن قيمة $S(n)$ تقترب من 1 كلما كبرت قيمة n . كلما سعى n نحو اللامنتهي الموجب $+\infty$ ، سعى $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ نحو 0، مما يؤكّد أن مجموع المتسلسلة هو 1. يمكن تعميم هذا المفهوم على جميع المتسلسلات الهندسية التوافقية وإثباته، باستعمال الحساب التفاضلي والتكاملي.



مجموع المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

إذا كان أساس المتسلسلة هندسية غير منتهية يحقّق $|r|<1$ ، فإن المتسلسلة توافقية ومجموعها يساوي

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

حيث a_1 هو الحد الأول للمتسلسلة وَ r الأساس.

مثـــال 2 إيجاد مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية

جِد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية، إذا كان لها مجموع.

أ $5+4+3.2+2.65+...$

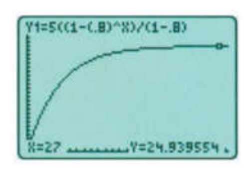
$r = 0.8$ — المتسلسلة توافقية لأن $|r|<1$.

$S = \frac{a_1}{1-r}$ — القانون.

$S = \frac{5}{1-0.8} = \frac{5}{0.2} = 25$ — عوّض.

تحقّق ارسم بيان الدالّة $y=5\left(\frac{1-(0.8)^x}{1-0.8}\right)$ باستعمال الحاسبة البيانية.

واضح أن قيمة y تسعى نحو 25.





يُمكنك تمثيل متتالية هندسية بيانيًّا باستعمال قانون مجموعها، كما ورد في الدرس السابق $S=a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$ ، بإحلال y محل S و x محل n، والتعويض عن كل من a_1 وَ r بقيمته.

ب $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}}$

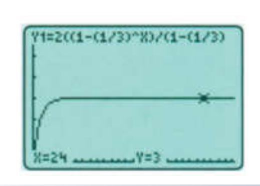
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}} = \frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+...$$

$r = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ — المتسلسلة توافقية لأن $|r|<1$.

$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = \frac{6}{2} = 3$ — القانون.

تحقّق ارسم بيان الدالّة $y=2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^x}{1-\frac{1}{3}}\right)$ باستعمال الحاسبة.

واضح أن قيمة y تسعى نحو 3.





2. جِد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية، إذا كان لها مجموع.

أ $25-5+1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+...$ **ب** $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^k$

يُمكنك استعمال المتسلسلات الهندسية غير المنتهية لكتابة عدد نسبي دوري على صورة كسر.

مثال 3 كتابة عدد نسبي دوري على صورة كسر

اكتب العدد ...0.232323 ككسر على أبسط صورة.

الخطوة 1 اكتب العدد كمتسلسلة هندسية غير منتهية.

$0.232323... = 0.23 + 0.0023 + 0.000023 + ...$ استعمل نمطًا لكتابة المتسلسلة

الخطوة 2 جِد الأساس.

$r = \frac{0.0023}{0.23} = \frac{1}{100} = 0.01$ $|r| < 1$ المتسلسلة توافقية.

الخطوة 3 جِد المجموع.

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.23}{1-0.01} = \frac{0.23}{0.99} = \frac{23}{99}$$

تحقَّق استعمل حاسبة لقسمة 23 على 99.



√

تذكَّر
تذكّر أن كل عدد دوريّ مثل ...0.232323 أو $0.\overline{23}$ هو عدد نسبي ويُمكنك أن تكتبه على صورة كسر.

نقطة مراقبة
3. اكتب العدد ...0.111 ككسر على أبسط صورة.

استعملت المتسلسلات لكي تجد المجاميع، مثل مجموع الأعداد الصحيحة من 1 الى 100. يمكن إثبات القوانين المستعملة لإيجاد مثل هذه المجاميع باستعمال إحدى طرق البرهان في الرياضيات، وهو البرهان **بالاستقراء الرياضي Mathematical induction**.



البرهان بالاستقراء الرياضي

لكي تبرهن أن مقولة صحيحة أيًّا تكن قيمة العدد الطبيعي n ، اتبع الخطوات التالية:

الخطوة 1 تحقَّق من الحالة الأولى: بيّن أن المقولة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2 افترض أن المقولة صحيحة عندما $n = k$.

الخطوة 3 أثبت أن المقولة صحيحة عندما $n = k + 1$.

مثال 4 البرهان بالاستقراء الرياضي

استعمل الاستقراء الرياضي لبرهان $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

الخطوة 1 تحقَّق من الحالة الأولى، بيّن أن المقولة صحيحة عندما $n = 1$.

$1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ المقولة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2 افترض أن المقولة صحيحة عندما $n = k$.

$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$ عوّض عن n بـ k

الخطوة 3 برهن أن المقولة تصحّ عندما $n=k+1$.

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$ أضف الحد التالي $k+1$ إلى كل طرف .

$$=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}$$ جِد المقام المشترك .

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$ اجمع البسطين.

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$ حلّل بـالعامل $k+1$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$ اكتب بدلالة $k+1$

المقولة $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ صحيحة إذن، أيًّا يكن العدد الطبيعي n.



4. استعمل الاستقراء الرياضي لبرهان أن مجموع الأعداد الطبيعية الفردية الأولى هو $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

قد تبدو بعض المقولات الرياضية صحيحة في الكثير من الحالات. غير أن ذلك لا يكفي للقول بصحّتها في كل الحالات. للبرهنة على خطأ القول بأن مقولة صحيحة في جميع الحالات، جِد مثالاً مضاداً يُبين خطأ المقولة في حالة واحدة.

مثـــــال 5 إيجاد مجموع متسلسلة هندسية

جِد مثالاً مضاداً يُبيّن عدم صحة $2^n \geq n^2$ ، حيث n عدد حقيقي.

$2^0 \geq (0)^2$	$2^1 \geq (1)^2$	$2^4 \geq (4)^2$	$2^{-1} \geq (-1)^2$
$1 \geq 0$ ✓	$2 \geq 1$ ✓	$16 \geq 16$ ✓	$\frac{1}{2} \geq 1$ ✗

إذن، $2^n \geq n^2$ خطأ. عندما $n=-1$ ، مما يُثبت أن القول بصحتها أيًّا يكن العدد الحقيقي n ، هو قول خطأ.

إضـــاءة

تذكّر أن إيجاد غالبية الأمثلة المضادة يتم باستعمال أعداد خاصة مثل 0 وَ 1 والأعداد السالبة أو الكسور.



5. جِد مثالاً مضاداً يُبيّن عدم صحة $\frac{a^2}{2} \leq 2a+1$ ، حيث a عدد حقيقي.

فكِّرْ وناقِشْ

1. كيف تحدّد إن كانت المتسلسلة الهندسية غير المنتهية توافقية أم تخالفية؟
2. كيف تحوّل العدد النسبي الدوري $0.\overline{83}$ إلى متسلسلة هندسية غير منتهية؟
3. **كن منظّمًا** انسخ الجدول أدناه ثم أكمله.لخّص مختلف أنواع المتسلسلات الهندسية غير المنتهية.



	مثال	النسبة المشتركة	المجموع
متسلسلة توافقية			
متسلسلة تخالفية			

5-6 التمارين

تمارين موجّهة

1 **مفردات** المتسلسلة الهندسية غير المنتهية التي تقترب قيم حدودها من عدد معيَّن مع تزايد قيمة n هي متسلسلة ________ (توافقية أو تخالفية).

انظر المثال 1

حدِّد إن كانت المتسلسلة الهندسية توافقية أو تخالفية.

2 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$ **3** $1-5+25-125+\ldots$ **4** $27+18+12+8+\ldots$

انظر المثال 2

جِد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية، إذا كان لها مجموع.

5 $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\ldots$ **6** $\sum_{k=1}^{\infty}4(0.25)^k$ **7** $800+200+50+\ldots$

انظر المثال 3

اكتب العدد الدوري ككسر على أبسط صورة .

8 $0.888\ldots$ **9** $0.\overline{56}$ **10** $0.131313\ldots$

انظر المثال 4

11 استعمل الاستقراء الرياضي لإثبات أن مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية الأولى تحقِّق $2+4+6+8+\ldots+2n=n(n+1)$

انظر المثال 5

جِد مثالاً مضادًا يُثبت عدم صحة أن المقولة صحيحة أيًّا يكن العدد الحقيقي n .

12 $n^4 \geq 1$ **13** $\log n > 0$ **14** $n^3 \leq 3n^2$

تمارين وحلُّ مسائل

تمارين حرّة	
لحل التمارين	انظر المثال
17-15	1
20-18	2
23-21	3
24	4
27-25	5

حدِّد إن كانت المتسلسلة الهندسية توافقية أو تخالفية.

15 $3+\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\frac{3}{125}+\ldots$ **16** $5+10+20+40+\ldots$ **17** $2-4+8-16+\ldots$

جِدْ مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية، إذا كان لها مجموع.

18 $\sum_{k=1}^{\infty}60\left(\frac{1}{10}\right)^k$ **19** $\frac{8}{5}-\frac{4}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}+\ldots$ **20** $\sum_{k=1}^{\infty}(3.5)^k$

اكتب العدد الدوري ككسر على أبسط صورة.

21 $0.\overline{6}$ **22** $0.90909\ldots$ **23** $0.541541541\ldots$

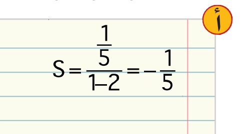
24 استعمل الاستقراء الرياضي لإثبات أن $\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

جِد مثالاً مضادًا يُثبت عدم صحة أن المقولة صحيحة أيًّا يكن العدد الحقيقي n.

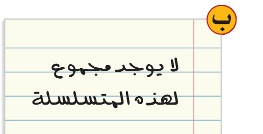
25 $n^3 \neq -n^2$ **26** $n^4 > 0$ **27** $5n^2 > 2^n$

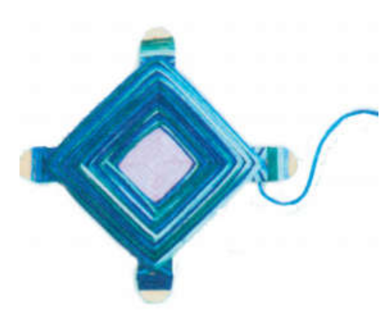
28 **خطأ في التحليل** فيما يلي جوابان عن سؤال يطلب إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\ldots$. أي الجوابين خطأ؟ بيِّن الخطأ.

أ



ب





29 **فنون** رسم أحد الفنانين جدارية عملاقة مؤلفة من مربعات يقع الواحد منها داخل الآخر. استعمل خيطًا لإنشاء المربعات. ضلع المربع الأكبر 8 m وضلع كل مربع داخلي يساوي 90% من ضلع المربع الذي يحتويه. افترض أن الفنان قادر على إضافة مربَّعات أحدها داخل الآخر إلى ما لا نهاية. كم مترًا من الخيط سيلزم الفنان؟ (مثِّل النمط بواسطة متسلسلة هندسية غير منتهية).

جِد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية، إذا كان لها مجموع.

30 $215-86+34.4-13.76+\ldots$

31 $500+400+320+\ldots$

32 $8-10+12.5-15.625+\ldots$

33 $\sum_{k=1}^{\infty}-5\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}$

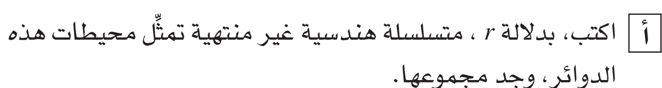
34 $\sum_{k=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

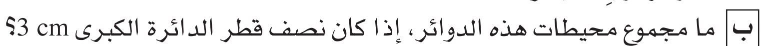
35 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}$

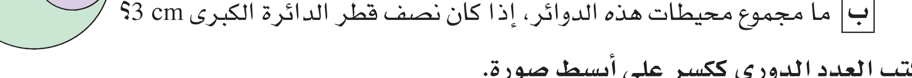
36 $-25-30-36-43.2-\ldots$

37 $\sum_{k=1}^{\infty}200(0.6)^{k-1}$

38 **هندسة** ادرس النمط المبيّن في الشكل المقابل، حيث تُرسم دوائر الواحدة داخل الأخرى، على أن يكون قطر كل دائرة نصف قطر الدائرة السابقة.







أ) اكتب، بدلالة r ، متسلسلة هندسية غير منتهية تمثِّل محيطات هذه الدوائر، وجِد مجموعها.

ب) ما مجموع محيطات هذه الدوائر، إذا كان نصف قطر الدائرة الكبرى 3 cm؟

اكتب العدد الدوري ككسر على أبسط صورة.

39 $0.\overline{4}$

40 $0.\overline{9}$

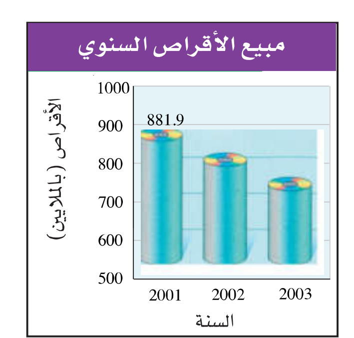
41 $0.\overline{123}$

42 $0.\overline{18}$

43 $0.\overline{5}$

44 $0.\overline{054}$

45 **موسيقى** تراجعت مبيعات أقراص الـ CD الموسيقية في السنوات الأخيرة بسبب تزايد تنزيل الملفات الموسيقية عبر الإنترنت. يُمكن تمثيل أعداد الأقراص المبيعة منذ سنة 2001 بواسطة متتالية هندسية.



أ) قدِّر عدد أقراص الـ CD التي ستباع سنة 2010 .

ب) قدِّر عدد أقراص الـCD التي ستكون قد بيعت من 2001 إلى 2010.

ج) افترض أن المتتالية الهندسية استمرت إلى ما لا نهاية. ما عدد أقراص الـ CD التي ستكون بيعت ابتداء من سنة 2001؟

استعمل الاستقراء الرياضي لإثبات كلّ مقولة.

46 $1+2+4+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$

47 $1+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

48 $1(2)+2(3)+3(4)+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

49 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

50 **سينما** بلغت إيرادات أحد الأفلام السينمائية 80 مليار دينار في الأسبوع الأول للعرض، وراحت تتناقص بنسبة 40% أسبوعيًّا في الأسابيع التالية.

أ) اكتب متتالية هندسية تمثّل إيرادات الفيلم كل أسبوع.

ب) قدّر مجموع إيرادات الفيلم خلال الأسابيع الستة الأولى من العرض.

ج) لو استمر عرض هذا الفيلم إلى ما لانهاية، فكم سيكون مجمل إيراداته؟

51 **مباريات العروض** رَبحتَ الجائزة الكبرى في إحدى مباريات العروض، وعُرض عليك أن تتسلّم جائزتك بإحدى طريقتين: أن تتقاضى مليون دينار في الشهر الأول بالإضافة إلى مبلغ شهري قيمته نصف مبلغ الشهر السابق، أو 100 000 دينار شهريًّا على مدى 20 شهرًا . أي طريقة تختار؟

جِد لكل مقولة مثالاً مضادًّا، حيث x عدد حقيقي.

52 $\frac{x^4}{x^3} \le 2x$ **53** $x^4 - 1 \ge 0$ **54** $\ln x^5 > \ln x$

55 $2x^2 \le 3x^3$ **56** $2x^2 - x \ge 0$ **57** $12x - x^2 > 25$

58 **هندسة** طول ضلع المربَّع الكبير 12 m ورؤوس كل مربَّع داخلي هي منتصفات أضلاع المربَّع السابق. افترض أن عملية إنشاء هذه المربعات استمرت إلى ما لا نهاية.



أ) جِد محيط المربع الثاني.

ب) جِد مجموع محيطات المربعات كلّها.

ج) جِد مجموع مساحات المربعات كلها.

د) اكتب، في حالة مربع ضلعه s ، مجموع المحيطات باستعمال رمز الجمع. كرر الأمر مع مجموع المساحات.

هـ) أي المتسلسلتين تتناقص أسرع: مجموع المحيطات، أم مجموع المساحات؟ كيف عرفت ذلك؟

59 **تفكير ناقد** قارن بين المجموع الجزئي S_n لمتسلسلة هندسية غير منتهية ومجموعها الكامل عندما $a_1 > 0$ وَ $r = \frac{4}{5}$. أيهما أكبر؟ هل يتغيَّر الأمر لو كان $a_1 < 0$ أوضح ذلك.

60 **اكتب** ما الفرق بين كتابة المجموع الجزئي S_n لمتسلسلة هندسية ومجموعها الكلّي؟



61 أي من المتسلسلات الهندسية غير المنتهية توافقية؟

أ) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^k$ ب) $\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{4}\right)^k$ ج) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4}(5)^k$ د) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k (5)^k$

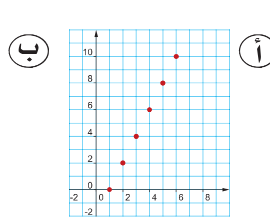
62 ما مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$ ؟

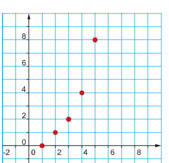
أ) 2 ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{3}$

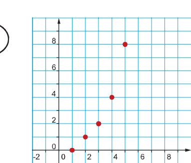
63 متسلسلة هندسية غير منتهية مجموعها 180، ونسبتها المشتركة $r = \frac{2}{3}$. ما حدّها الأول؟

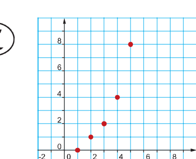
أ) 60 ب) 120 ج) 270 د) 540

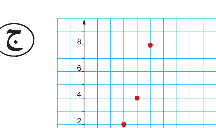
64 أي رسم بياني يمثِّل متسلسلة هندسية غير منتهية توافقية؟

أ 

ب 

ج 

د 



65 **جواب مفصل** استعمل الاستقراء لإثبات $3+5+...+(2n+1)=n(n+2)$. بيّن كل ما تقوم به.

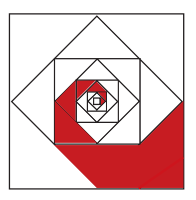
تحدٍّ وتوسّع

اكتب العدد الدوري ككسر على أبسط صورة.

66 $0.1\overline{6}$ **67** $0.41\overline{6}$ **68** $0.5\overline{286}$

69 **تفكير ناقد** هل يُمكن لمتسلسلة حسابية غير منتهية أن يسعى مجموعها إلى نهاية محدّدة، كما هي حال بعض المتسلسلات الهندسية غير المنتهية؟ أوضح جوابك.

70 **هندسة** ضلع المربَّع الكبير 12 m ، ورؤوس كل مربَّع داخلي هي منتصفات أضلاع المربع الذي يتضّمنه. افترض أن عملية إنشاء هذه المربَّعات استمرت إلى ما لا نهاية. لاحظ أن هذا الشكل يُبين خطًّا لولبيًّا بالأحمر ومساحة لولبية بالأزرق.



أ استعمل مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية لتجد طول الخط الأحمر.

ب استعمل متسلسلة هندسية غير منتهية لتجد مساحة المنطقة الزرقاء.

ج هل الجواب الذي حصلت عليه في السؤال ب معقول؟ أوضح ذلك.

مراجعة لولبية

71 **كرة قدم** يُصيب هدّاف نادي بابل لكرة القدم الهدف في 80% من الضربات الحرة. سوف يسدِّد الهدّاف خمس ضربات حرة. ما احتمال أن يصيب الهدف 4 مرات على الأقل؟ (الصفوف السابقة)

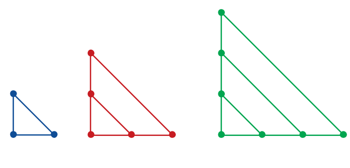
72 **هندسة** استعمل النمط المقابل. (الدرس 6–3)



أ حدِّد عدد النقاط في كل من الأشكال الثلاثة التالية.

ب اكتب قاعدة لإيجاد عدد النقاط في الشكل ذي الرتبة n .

ج ما عدد النقاط في الشكل الثاني والعشرين؟



حدِّد إن كانت المتتالية حسابية أو هندسية. جِد الفرق المشترك أو النسبة المشتركة، عندما يكون ذلك ممكنًا. (الدرس 4 –6)

73 $297, 99, 33, 11, ...$ **74** $\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, 4, \frac{16}{3}, ...$

75 $25, 100, 250, 1000, ...$ **76** $4, 4.8, 5.76, 6.912, ...$

الفصل 6

دليل الدراسة : مراجعة

جِد الحدود الخمسة الأولى في كل متتالية.

1 $a_n = n - 9$

2 $a_n = \frac{1}{2}n^2$

3 $a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

4 $a_n = a_{n-1} - 2$ و $a_1 = 55$

5 $a_n = \frac{1}{5}a_{n-1}$ و $a_1 = 200$

6 $a_n = -3a_{n-1} + 1$ و $a_1 = -3$

اكتب قاعدة للحد النوني في كل متتالية.

7 $-4, -8, -12, \ldots$

8 $5, 20, 80, 320, \ldots$

9 $-24, -19, -14, -9, \ldots$

10 $27, 18, 12, 8, \frac{16}{3}, \ldots$

11 **رياضة** رمى لاعب الكرة من ارتفاع 3.2 m . ارتفعت الكرة بعد ارتطامها بالأرض إلى ارتفاع يساوي 70% من الارتفاع السابق.أي ارتفاع تصل إليه الكرة في المرة الرابعة، لو أن الأمر تكرَّر على هذا النمط؟ في المرة التاسعة؟

انشر المتسلسلة واحسب المجموع.

12 $\sum_{k=1}^{k=4} k^2(-1)^k$

13 $\sum_{k=1}^{k=5} (0.5k + 4)$

14 $\sum_{k=1}^{k=5} (-1)^{k+1}(2k - 1)$

15 $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{5k}{k^2}$

احسب مجموع المتسلسلة.

16 $\sum_{k=1}^{k=8} (-5)$

17 $\sum_{k=1}^{k=10} k^2$

18 $\sum_{k=1}^{k=12} k$

19 **تمويل** اشترى سردار منزلاً بالتقسيط. كان القسط الشهري 1 150 000 دينار . كم سيكون قد دفع بعد سنتين؟ بعد 15 عامًا؟

جِد الحد الحادي عشر في كل متتالية حسابية.

20 $23, 19, 15, 11, \ldots$

21 $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \ldots$

22 $-9.2, -8.4, -7.6, -6.8, \ldots$

23 $a_4 = 5$ و $a_3 = 1.5$

24 $a_8 = 21$ و $a_6 = 47$

25 $a_9 = 13$ و $a_5 = -7$

جِد المجموع المطلوب في كلّ متسلسلة حسابية.

26 S_{18} في المتسلسلة $-1 - 5 - 9 - 13 - \ldots$

27 S_{12} في المتسلسلة $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{6} - \ldots$

28 $\sum_{k=1}^{k=15} (-14 + 3k)$

29 $\sum_{k=1}^{k=15} \left(\frac{3}{2}k + 10\right)$

30 **ادخار** كان مع هاوري في أول السنة 50 000 دينار. قرَّر والدُها أن يعطيها 8 000 دينار مصروفًا أسبوعيًا، قررت هي ادخار ما معها وما يُعطيها إياه والدها، لشراء معطف ثمنه 499000 دينار. اكتب متتالية حسابية لتمثيل الحالة . هل سيكون بمقدور هاورى أن تشتري المعطف في نهاية السنة؟

جِد الحد الثامن في كل متتالية هندسية.

31 $40, 4, 0.4, 0.04, \ldots$

32 $\frac{1}{18}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$

33 $-16, -8, -4, -2, \ldots$

34 $-6, -12, -24, 48, \ldots$

جِد الحد التاسع في كل متتالية هندسية.

35 $a_4 = 96$ وَ $a_3 = 24$

36 $a_2 = -\frac{4}{3}$ وَ $a_1 = \frac{2}{3}$

37 $a_6 = -4$ وَ $a_4 = -1$

38 $a_6 = 500$ وَ $a_3 = 4$

جِد المتوسط الهندسي لكل عددين.

39 10 وَ 2.5

40 8 وَ $\frac{1}{2}$

41 $\frac{\sqrt{3}}{96}$ وَ $\frac{\sqrt{3}}{6}$

42 $\frac{5}{12}$ وَ $\frac{125}{108}$

جِد المجموع المطلوب في كل متتالية هندسية.

43 S_5 في المتسلسلة $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$

44 S_6 في المتسلسلة $-\frac{4}{5} + 8 - 80 + \ldots$

45 $\sum_{k=1}^{k=8} (4)^{k-1}$

46 $\sum_{k=1}^{k=7} -2(5)^{k-1}$

47 $\sum_{k=1}^{k=6} 60\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

48 $\sum_{k=1}^{k=5} 18\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

49 **أدوات مكتبية** يبلغ ثمن آلة ناسخة حديثة 9 ملايين دينار. كم ستكون قيمة هذه الآلة في السنة السادسة، علمًا أن ثمنها في كل سنة يساوي 65% من ثمنها في السنة السابقة؟

50 **إيجارات** إيجار أحد المنازل 000 650 دينار في الشهر، وهو يزداد بنسبة 6% سنويًّا.

أ) كم سيبلغ الإيجار السنوي لهذا المنزل في السنة السادسة؟

ب) كم سيبلغ مجموع ما دفعه المستأجر في السنوات الخمس الأولى؟

جِد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية.

51 $-2\,700 + 900 - 300 + \ldots$

52 $-1.2 - 0.12 - 0.012 + \ldots$

53 $-49 - 42 - 36 - \frac{216}{7} - \ldots$

54 $4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} + \ldots$

55 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{3^k}$

56 $\sum_{k=1}^{\infty} -7\left(\frac{3}{5}\right)^k$

57 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k$

استعمل الاستقراء الرياضي لإثبات كل مما يلي.

58 $2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

59 $1 + 5 + 25 + \ldots + 5^{n-1} = \frac{5^n - 1}{4}$

60 $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \ldots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$

61 **تسلية** هبط ولد بالأرجوحة من علٍ. بلغت المسافة التي قطعها الولد في أول جيئة وذهاب 9m.

أ) اكتب متسلسلة غير منتهية تمثل المسافة الكلية التي يقطعها الولد، علمًا بأن المسافة في كل جيئة وذهاب تساوي 85% من سابقتها.

ب) كم ستبلغ المسافة التي قطعها الولد قبل أن تتوقَّف الأرجوحة؟

الفصل 6



اختبار الفصل

جِد الحدود الخمسة الأولى في كل متتالية.

1 $a_n = n^2 - 4$

2 $a_1 = 48$ وَ $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - 8$

اكتب قاعدة لكل متتالية.

3 $-4, -2, 0, 2, 4, \ldots$

4 $54, 18, 6, 2, \frac{2}{3}, \ldots$

انشر المتتالية واحسب مجموعها.

5 $\sum_{k=1}^{k=4} 5k^3$

6 $\sum_{k=1}^{k=7} (-1)^{k+1}(k)$

جِد الحد التاسع في كل متتالية حسابية.

7 $-19, -13, -7, -1, \ldots$

8 $a_2 = 11.6$ وَ $a_5 = 5$

9 جِد الحدَّين الناقصَيْن في المتتالية الحسابية

$125, \blacksquare, \blacksquare, 65$

جِد المجموع المطلوب في كلّ متسلسلة حسابية.

10 S_{20} في المتسلسلة $4+7+10+13+\ldots$

11 $\sum_{k=1}^{k=12} (-9k+8)$

12 يتألف الصف الأول في أحد المسارح من 16 مقعدًا، ويزداد عدد المقاعد في كل صف بدءًا من الثاني، مقعدين عن الذي يسبقه. كم مقعدًا في الصف الثاني عشر؟ كم عدد المقاعد في الصفوف الاثني عشر الأولى؟

جِد الحد العاشر في كل متتالية هندسية.

13 $\frac{3}{256}, \frac{3}{64}, \frac{3}{16}, \frac{3}{4}, \ldots$

14 $a_4 = 2$ وَ $a_5 = 8$

15 جِد المتوسط الهندسي للعددين 4 وَ 25.

جِد المجموع المطلوب في كلّ متسلسلة هندسية.

16 S_6 في المتسلسلة $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$

17 $\sum_{k=1}^{k=12} 250\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1}$

18 كنت تضع في حساب مصرفي مليون دينار كل سنة على مدى 10 سنوات. وكانت نسبة الفائدة السنوية 5% . كم أصبح المليون الأول في نهاية العام العاشر؟ ما المبلغ في حسابك في نهاية السنة العاشرة؟

جِد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية، إذا كان لها مجموع.

19 $200 - 100 + 50 - 25 + \ldots$

20 $\sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{7}{8}\right)^k$

استعمل الاستقراء الرياضي لإثبات

$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \ldots + \frac{2n-1}{2} = \frac{n^2}{2}$.

21 الخطوة 1:

22 الخطوة 2:

23 الخطوة 3:

الفصل 6

اختبار تراكمي

1 أي مما يلي يمثِّل المتتالية 4، 6، 4، 6، 4 مكتوبة باستعمال رمز التجميع؟

أ) $\sum 24$

ج) $\sum_{n=0}^{n=5} (-1)^n + 5$

ب) $\sum_{n=1}^{n=4} (-1)^n + 5$

د) $\sum_{n=1}^{n=5} (-1)^n + 5$



2 أي مما يلي هو نشر ثنائية الحدَّين $(2x-y)^3$.

أ) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

ب) $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

ج) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

د) $8x^3 + 12x^2y + 3xy^2 + y^3$

3 $f(x)=x^3+2x^2-5x-9$ أي من الدوال التالية هي صورة الدالَّة $f(x)$ بانعكاس حول المحور الثاني؟

أ) $g(x)=-x^3-2x^2+5x+9$

ب) $g(x)=-x^3+2x^2+5x-9$

ج) $g(x)=2x^3+4x^2-10x-18$

د) $g(x)=x^3+2x^2-5x-5$

4 أي مما يلي دالّة تراجع أسّي؟

أ) $f(x) = -5x$

ب) $f(x) = 2.3(6.7)^x$

ج) $f(x) = 0.49(7.9)^x$

د) $f(x) = 5.13(0.32)^x$

5 رُميت كرة من ارتفاع 10 m لترتطم بالأرض وتعاود الارتفاع . كانت في كل مرة تعاود الارتفاع إلى 60% من الارتفاع السابق. أي مما يلي يمثِّل ارتفاع الكرة بالأمتار في المرة n ؟

أ) $10(0.6n)$

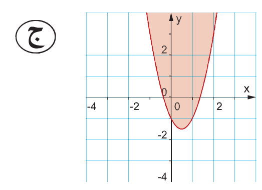
ج) $\frac{10-n}{0.6}$

ب) $10(0.6)^{n-1}$

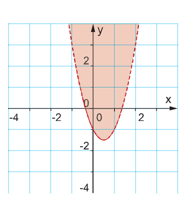
د) $10(0.6)^n$

6 أي رسم يُمثِّل الحل البياني للمتباينة التربيعية $6x+3y \geq 6x^2-3$ ؟

أ)

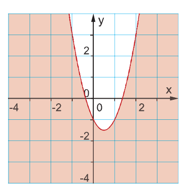


ج)



ب)

د)



7 افتتحت زيله صالونًا للتجميل. كانت أرباحها في الأسابيع الأربعة الأولى 000 000 2 دينار، 000 400 2 دينار، 000 880 2 دينار، 000 456 3 دينار، على التوالي. كم ستبلغ أرباحها في الأسبوع السادس، لو استمر تزايد أرباحها على هذا المنوال؟

أ) 000 856 3 دينار

ج) 000 147 4 دينار

ب) 000 032 4 دينار

د) 000 980 4 دينار

8 ما الحد التاسع في المتتالية $a_n = \frac{1}{2}(2^{n-1})+4$ ؟

أ) 36 ب) 68 ج) 132 د) 260

9 ما الدالّة العكسية للدالّة $f(x)=4x-5$ ؟

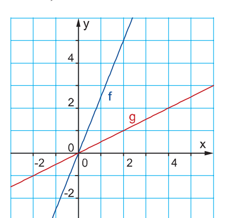
أ) $f^{-1}(x)=-4x+5$

ج) $f^{-1}(x)=\frac{x+5}{4}$

ب) $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+5$

د) $f^{-1}(x)=5x-4$

10 أي تحويل يُحوّل الدالّة $f(x)$ إلى الدالة $g(x)$ ؟



أ كبس أفقي عامله $\frac{1}{5}$.

ب مط أفقي عامله 5 .

ج كبس عمودي عامله $\frac{1}{3}$.

د مط عمودي عامله 3 .

11 أي ممّا يلي صفرا الدالّة $f(x)=2x^2+5x-12$.

أ -4 وَ $\frac{3}{2}$

ب -2 وَ 3

ج $-\frac{3}{2}$ وَ 4

د $\frac{3}{2}$ وَ 2

جواب مختصر

12 ما النسبة المشتركة للمتتالية الهندسية $125, 50, 20, 8, \ldots$ ؟

13 سُحبت ورقة من بطاقات ورق اللعب. ما احتمال أن تكون هذه الورقة 10 أو حمراء؟

14 ما مجموع المتسلسلة الحسابية $\sum_{k=1}^{k=8}(7k-3)$ ؟

15 ما الإحداثي الثاني للنقطة التي تمثِّل حل النظام

$$\begin{cases} 2y-2=4x \\ 6-x=8y \end{cases}$$ ؟

16 استعمل الدالّة $f(x)=\sqrt[3]{5x}$.

أ ما مجال هذه الدالّة؟ وما مداها؟

ب ما الدالّة العكسية للدالّة $f(x)$؟

ج ما مجال الدالّة العكسية؟ وما مداها؟

د ارسم بيان الدالّة والدالّة العكسية في المستوى الإحداثي نفسه.

17 استعمل المتسلسلة الهندسية غير المنتهية $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{4^{n-1}}$.

أ حدِّد إن كانت المتسلسلة توافقية أو تخالفية.

ب جِد مجموع المتسلسلة إذا كان لها مجموع.

18 يعرض أحد المحالّ الكبرى علب المرطبات على شكل مثلث، بحيث يكون عدد العلب 3 في الصف الأعلى ويزداد هذا العدد علبة كلما نزلنا في الصفوف.

أ هل تستعمل متتالية أم متسلسلة لتمثيل عدد العلب في الصف من الرتبة n ؟

ب ما عدد العلب في 12 صفًّا؟

ج ماذا تمثِّل المتسلسلة $\sum_{k=1}^{k=n}(k+2)$ ؟ أوضح ذلك.

جواب مفصّل

19 يجتاز المرشحون للدخول إلى مدرسة الضباط اختبارَيْن. يجتاز 60% من المرشحين الاختبار الأول بنجاح، ويجتاز 20% الاختبار الثاني بنجاح.

أ أنشئ مخطط شجرة يُبيّن الاحتمالات الممكنة لكل مرشح.

ب إذا كان على كل مرشح التقدُّم إلى الاختبارين، ما احتمال أن يجتاز مرشح الاختبارين بنجاح. كم مرشَّحًا تنتظر أن ينجح في الاختبارين لو كان عدد المرشحين 50؟

ج أيهما أكبر: احتمال أن ينجح المرشح في الاختبارين معًا، أو أن يُخفق فيهما معًا؟ أوضح ذلك.



الفصل

7

علم المثلّثات Trigonometry

الفصل الأول

الدروس

الدوّيْخة

يُمكنك استعمال بيانات الدوال المثلثية والمتطابقات المثلثية لإنشاء نماذج لحركات دائرة أو عجلة في حالات مختلفة.

هل أنت مستعد؟

المُفْرَدات

اربط المفردة بتعريفها الوارد إلى اليسار.

1 ساين الزاوية
2 كوساين الزاوية
3 وتر المثلث القائم
4 تانجانت الزاوية

أ نسبة طول الضلع المقابل للزاوية إلى طول الضلع المجاور لها.
ب نسبة طول الضلع المجاور للزاوية إلى طول الوتر.
ج نسبة طول الوتر إلى طول الضلع المقابل للزاوية.
د نسبة طول الضلع المقابل للزاوية إلى طول الوتر.
هـ الضلع المقابل للزاوية القائمة.

قسمة الكسور

اقسم.

5 $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{2}}$

6 $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$

7 $\frac{-\frac{3}{8}}{\frac{1}{8}}$

8 $\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{7}{4}}$

تبسيط المقادير الجذرية

اكتب المقدار على أبسط صورة.

9 $\sqrt{6}\times\sqrt{2}$

10 $\sqrt{100-64}$

11 $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{36}}$

12 $\sqrt{\frac{4}{25}}$

ضرب ثنائيات الحدود

اضرب.

13 $(x+11)(x+7)$

14 $(y-4)(y-9)$

15 $(2x-3)(x+5)$

16 $(k+3)(3k-3)$

17 $(4z-4)(z+1)$

18 $(y+0.5)(y-1)$

المتطابقات الخاصة

اضرب.

19 $(2x+5)^2$

20 $(3y-2)^2$

21 $(4x-6)(4x+6)$

22 $(2m+1)(2m-1)$

23 $(s+7)^2$

24 $(-p+4)(-p-4)$

الفصل 7

دليل الدراسة : نظرة إلى الفصل

فـي المـاضـي

درست سابقًا

- حل مسائل تتضمن مثلثات ونسبًا مثلثية.
- استعمال التحليل لحل معادلة تربيعية.
- استعمال الدوال التي تشكّل نماذج لحل مسائل من الحياة.
- حل معادلات جبريًّا وبيانيًّا.

فـي هذا الفصل

سوف تتعلّم

- حل مسائل تتضمن الدوال المثلثية.
- استعمال الدوال المثلثية لإنشاء نماذج تمثّل حالات من الواقع.

فـي المستقبـل

يُمكنك استعمال مهارات هذا الفصل

- في صفوف أعلى عند دراسة الحساب التفاضلي والتكاملي.
- في دروس المواد الأخرى، كالفيزياء والأحياء والاقتصاد.
- خارج المدرسة لدراسة الظواهر الدورية.

المفردات Vocabulary

المفردات	Vocabulary
السعة	Amplitude
الدورة	Cycle
التكرار	Frequency
الزمن الدوري	Period
الدوال الدورية	Periodic functions
انحراف الطور	Phase shift
مصفوفة الدوران	Rotation matrix

نافذة على المفردات

لكي تألف بعض المفردات الواردة في هذا الفصل، تابع الخطوات التالية:

1. ماذا تعني كلمة **سعة** في الحياة اليومية؟ ما تعنيه سعة رقاص الساعة؟
2. ماذا تعني كلمة **دورة** في الحياة اليومية؟أعطِ أمثلة على ظواهر دورية.
3. أعطِ مثالاً على أمر يحدث تكرارًا. كم يتكرر أمر ما كتنظيف أسنانك يوميًّا، تقول «أنظف أسناني مرتين في اليوم». صِف **تكرار** المثل الذي أعطيته.
4. قد يندر استعمال عبارة **الزمن الدوري** في الحياة اليومية. بمَ توحي إليك هذه العبارة؟ بمَ توحي إليك عبارة **دالة دورية**؟
5. ما النتيجة التي تتوقع أن تحصل عليها عند استعمال **مصفوفة دوران**؟





استراتيجية للدرس: الاستعداد للامتحان النهائي

الرياضيات مادة تراكمية. لذا قد يشمل الامتحان النهائي لهذه المادة كل ما تعلّمته فيها منذ بداية العام الدراسي. من هنا تنشأ ضرورة الاستعداد لاجتياز هذا الامتحان بنجاح. قد يكون مفيدًا لك أن تخطّط لتحضير هذا الامتحان كما هو وارد أدناه.

أسبوعان قبل الامتحان

- راجع الامتحانات السابقة ومسائل الواجب المنزلي لتحديد الموضوعات التي تتطلب تركيزًا، وحُلّ من جديد التمارين التي كان حلّها خطأ أو منقوصًا.
- أنشئ لائحة بالقوانين والمبرهنات التي عليك معرفتها يوم الامتحان.
- ركّب اختبارًا تجريبيًا من مسائل تشبه مسائل الامتحانات السابقة.

أسبوع قبل الامتحان

- حُلّ الامتحان التجريبي الذي ركّبته، وتحقّق من صحة إجاباتك. إذا أخفقت في حل أحد التمارين، ابحث عن تمرينين أو ثلاثة تشبهه، وتمرّن على حلها.
- اعمل مع زميل لك في الصف، على أن يسأل كل منكما الآخر عن القوانين والمبرهنات الواردة في اللائحة التي تم تحضيرها سابقًا.

اليوم السابق للامتحان

- تحقّق من أنك حضرت لوازم الامتحان من أقلام ومسطرة وحاسبة (تحقّق من صلاحية بطارية الحاسبة).



يوم الامتحان

حاول

1. أنشئ مخططًا زمنيًا لتحضير الامتحان النهائي.

1–7 قانون الساين والكوساين

Law of sines and Low of cosines

الأهداف

يستعمل قانون الساين وقانون الكوساين لحل المثلثات.

من يستعمل هذا الأمر؟

يمكن للمهندسين أن يستعملوا قانون الساين وقانون الكوساين لحل مسائل البناء.

منذ إنشاء برج بيزا في إيطاليا سنة 1370 م، والمهندسون يتقدّمون باقتراحات لتقليل انحنائه. الزاوية التي يُقيمها هذا البرج مع الأرض ليست قائمة كما هي حال العمارات بصورة عامة. لذلك، كان على المهندسين العمل على مثلثات غير قائمة.

تعلّمت في الصف العاشر كيف تستعمل النسب المثلثية لإيجاد قياسات زاويا المثلث القائم وأضلاعه بمعرفة بعضها. تُسمّى هذه العملية **حل المثلث القائم.** سوف تتعلم في هذا الدرس حل المثلث مهما يكن نوعه. تحتاج، للقيام بذلك، أن تحسب النسب المثلثية لزوايا يصل قياسها حتى $180°$. يُمكنك استعمال الحاسبة لإيجاد تلك القيم.

مثـــال 1 إيجاد النسب المثلثية للزوايا المنفرجة

استعمل الحاسبة لإيجاد كل نسبة مثلثيّة. قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

أ $\sin 135°$ ب $\tan 98°$ ج $\cos 108°$

sin(135) .7071067812 — tan(98) -7.115369722 — cos(108) -.3090169944

$\sin 135° \approx 0.71$ $\tan 98° \approx -7.12$ $\cos 108° \approx -0.31$



1. استعمل الحاسبة لإيجاد كل نسبة مثلثية. قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

أ $\tan 175°$ ب $\cos 92°$ ج $\sin 160°$

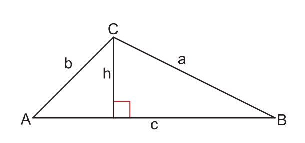
يُمكنك استعمال ارتفاع مثلث لإيجاد علاقة تربط بين أطوال أضلاعه. أنشىء الارتفاع العائد إلى الضلع $\overline{AB}$ والذي يمر في الرأس C. استنادًا إلى الرسم المقابل، يُمكنك أن تكتب:

$\sin\hat{A} = \frac{h}{b}$ $\sin\hat{B} = \frac{h}{a}$

$h = b\sin\hat{A}$ $h = a\sin\hat{B}$

ينتج من ذلك $a\sin\hat{B} = b\sin\hat{A}$

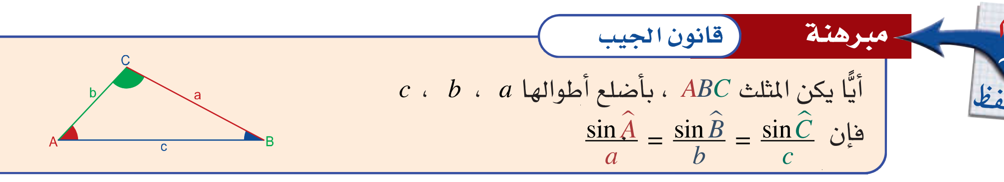
وبالتالي $\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b}$.



يُمكنك استعمال ارتفاع آخر من ارتفاعات المثلث لتُبيّن أن النسبتين المتساويتين السابقتين تساويان أيضًا النسبة $\frac{\sin\hat{C}}{c}$.

اعلم و احفظ

مبرهنة قانون الجيب



أيًّا يكن المثلث ABC ، بأضلع أطوالها a ، b ، c

فإن $\frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{A}}{a}$

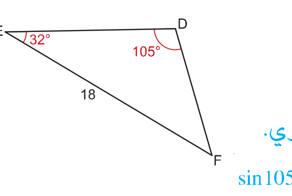
يُمكنك استعمال قانون الساين لحل مثلث إذا عرفت:

- قياس زاويتين من زواياه وطول أحد أضلاعه.
- طولَ ضلعَين من أضلاعه وقياس الزاوية غير الواقعة بينهما

مثـــال 2 استعمال قانون ساين

جِد القياس المطلوب. قرّب كل طول إلى أقرب عُشر، وقياس كل زاوية إلى أقرب درجة.

أ DF



$\frac{\sin D}{EF} = \frac{\sin E}{DF}$ قانون الساين.

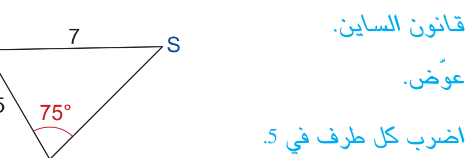


$\frac{\sin 105}{18} = \frac{\sin 32}{DF}$ عوّض.

$DF \times \sin 105 = 18 \times \sin 32$ خاصية الضرب القطري.

$DF = \frac{18 \times \sin 32}{\sin 105} \approx \frac{18(0.53)}{0.96} \approx 9.9$ اقسم كل طرف على $\sin 105°$

ب $m\hat{S}$



$\frac{\sin \hat{T}}{RS} = \frac{\sin \hat{S}}{RT}$ قانون الساين.



$\frac{\sin 75°}{7} = \frac{\sin \hat{S}}{5}$ عوّض.

$\sin \hat{S} = \frac{5 \times \sin 75°}{7}$ اضرب كل طرف في 5.

$m\hat{S} = \sin^{-1}\left(\frac{5 \times \sin 75°}{7}\right) \approx 44°$ استعمل المفتاح $\sin^{-1}$ لحساب قياس $\hat{S}$

استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد قياس $\hat{S}$ بعد تحويل الحاسبة، لكي تعمل بالدرجة عوضًا عن الراديان. لهذا الهدف، اضغط MODE ، ثم حرّك المستطيل الذي يومض حتى يصل إلى Degree، ثم اضغط ENTER. لحساب $m\hat{S}$ ، اضغط على التوالي 2^{nd} ، SIN، 5، ×، SIN، 7، 5،)، ÷، 7،)، ENTER.

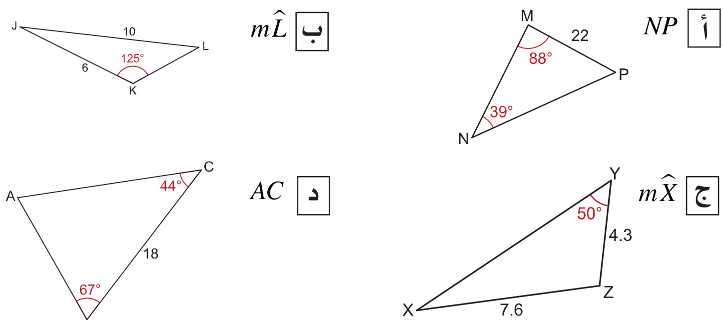


نقطة مراقبة

2. جِد القياس المطلوب. قرّب كل طول إلى أقرب عُشر، وقياس كل زاوية إلى أقرب درجة.

أ NP ب $m\hat{L}$

ج $m\hat{X}$ د AC



لا يسمح قانون الساين بحل كل المثلثات. مثلاً، إذا عُرف طول ضلعَين وقياس الزاوية الواقعة بينهما، أو إذا عُرف طولُ الأضلاع الثلاثة، فهذه حالات، ينبغي أن تستعمل فيها الكوساين التمام.

تربيط الأقواس والزوايا

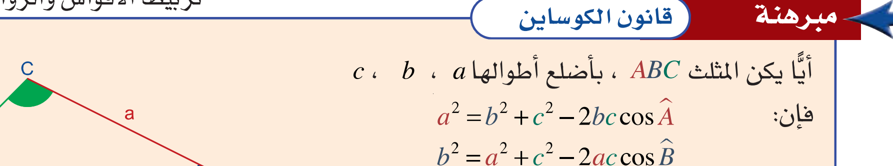
اعلم و احفظ

مبرهنة قانون الكوسايين

أيًّا يكن المثلث ABC ، بأضلع أطوالها a ، b ، c

فإن:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$



مُساعدَة

في قانون الكوسايين،الزاوية المستعملة في كل مساواة هي الزاوية التي تواجه الضلع الوارد في الطرف الأول من المساواة.

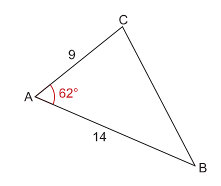
يُمكنك استعمال قانون الكوسايين لحل مثلث إذا عرفت:

- طولَ ضلعَين وقياس الزاوية بينهما.
- طولَ أضلاعه الثلاثة.

مثال 3 استعمال قانون الكوسايين

جِد القياس المطلوب. قرّب كل طول إلى أقرب عُشر، وقياس كل زاوية إلى أقرب درجة.

أ BC



$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC)\cos\hat{A}$ قانون الكوسايين.

$= 14^2 + 9^2 - 2(14)(9)\cos 62°$ عوِّض.

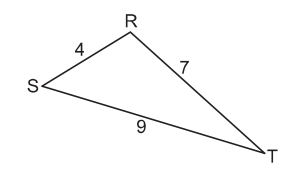
بسِّط.

$BC^2 \approx 158.6932$

$BC \approx 12.6$ جِد الجذر التربيعي.

طول BC هو 12.6 تقريبًا.

ب $m\hat{R}$



$ST^2 = RS^2 + RT^2 - 2(RS)(RT)\cos\hat{R}$ قانون الكوسايين.

$9^2 = 4^2 + 7^2 - 2(4)(7)\cos\hat{R}$ عوِّض.

$81 = 65 - 56\cos\hat{R}$ بسِّط

$16 = -56\cos\hat{R}$

$\cos\hat{R} = -\frac{16}{56}$ حُلّ.

$m\hat{R} = \cos^{-1}\left(-\frac{16}{56}\right) \approx 107°$

قياس $\hat{R}$ هو $107°$ تقريبًا.

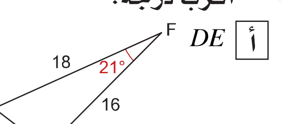




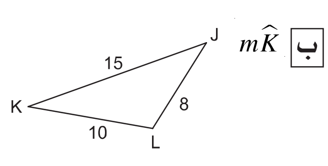
نقطة مراقبة

3. **جِد القياس المطلوب. قرّب كل طول إلى أقرب عُشر، وقياس كل زاوية إلى أقرب درجة.**

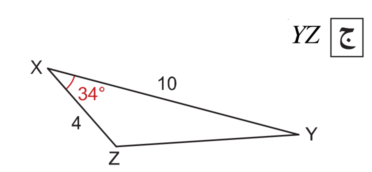
أ DE



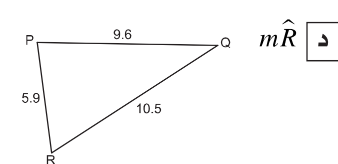
ب $m\hat{K}$



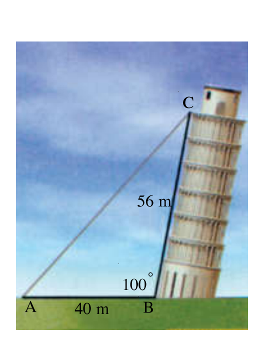
ج YZ



د $m\hat{R}$



مثـــال 4 تطبيق على الهندسة المدنية



يبلغ ارتفاع برج بيزا في ايطاليا $56m$. بلغت زاوية البرج مع مستوى الأرض $100°$ سنة 1999 م. اقترح أحد المهندسين، لمنع البرج من الوقوع، أن يتم ربطه بسلك معدني قوي يربط رأس البرج بنقطة تبعد $40m$ عن قاعدته. كم سيكون طول هذا السلك وقياس زاويته مع مستوى الأرض؟ أعطِ الجواب مقرّبًا الطول إلى أقرب عُشر من المتر، وقياس الزاوية إلى أقرب درجة.

الخطوة 1 جِد طول السلك.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos\hat{B}$ قانون الكوساين.

$= 40^2 + 56^2 - 2(40)(56)\cos 100°$ عوّض.

$AC^2 = 5513.9438$ بسّط.

$AC = 74.3$ جِد الجذر التربيعي.

الخطوة 2 جِد قياس زاوية السلك مع مستوى الأرض.

$\frac{\sin\hat{A}}{BC} = \frac{\sin\hat{B}}{AC}$ قانون الساين.

$\frac{\sin\hat{A}}{56} = \frac{\sin 100°}{74.2559}$ عوّض.

$\sin\hat{A} = \frac{56 \times \sin 100°}{74.2559}$ بسّط.

$m\hat{A} = \sin^{-1}\left(\frac{56 \times \sin 100°}{74.2559}\right) \approx 48°$ استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد $m\hat{A}$.

زاوية السلك مع الأرض هي $48°$ تقريبًا.

انتبــه!

لا تقرّب الإجابات قبل أن تصل إلى الجواب النهائي. إذا كانت المسألة من عدة خطوات، احفظ الإجابات المرحلية في ذاكرة الحاسبة.

نقطة مراقبة

4. **ماذا لو...** اقترح مهندس آخر أن يُربط سلكٌ بين رأس البرج ونقطة تبعد 31m عن قاعدة البرج. كم سيكون طول هذا السلك وقياس زاويته مع مستوى الأرض؟ أعطِ الجواب مقرّبًا الطول إلى أقرب عُشر من المتر، وقياس الزاوية إلى أقرب درجة.

فكِّرْ وناقِش



1. هل تحتاج إلى معلومات إضافية لكي تحسب BC باستعمال قانون الساين؟ إذا كان الجواب نعم، فما هي؟

2. **كن منظّمًا** انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. حدِّد أي قانون تستعمل لحل كل مثلث مُعطى، ثم ارسم مثالاً عليه.



المُعطى في المثلث	القانون	المثال
قياس زاويتين وطول ضلع		
طول ضلعين وقياس زاوية غير التي بينهما		
طول ضلعين وقياس الزاوية بينهما		
طول 3 أضلاع		

1-7 التمـاريـن

تمــارين موجّهــة

انظر المثال 1

استعملْ حاسبة لإيجاد كل نسبة مثلّثية مقرّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة.

1 $\sin 100^\circ$ **2** $\sin 167^\circ$ **3** $\tan 92^\circ$

4 $\tan 141^\circ$ **5** $\cos 133^\circ$ **6** $\sin 150^\circ$

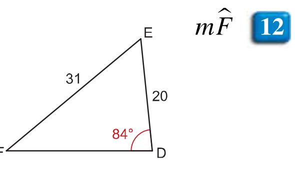
7 $\sin 147^\circ$ **8** $\tan 164^\circ$ **9** $\cos 156^\circ$

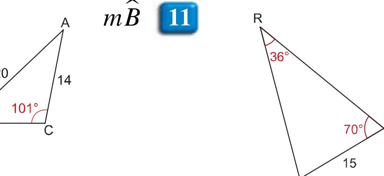
انظر المثال 2

جِد كل قياس. قرّب كل طول إلى أقرب عُشر، وقياس كل زاوية إلى أقرب درجة.

10 RT **11** $m\hat{B}$ **12** $m\hat{F}$





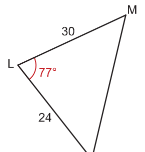


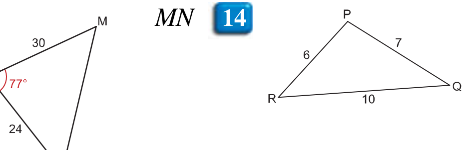
انظر المثال 3

جِد كل قياس. قرّب كل طول إلى أقرب عُشر، وقياس كل زاوية إلى أقرب درجة.

13 $m\hat{Q}$ **14** MN **15** AB







انظر المثال 4

16 **نجارة** صنع النجار إطارًا خشبيًا من ثلاث قطع أطوالها $20cm$ وَ $24cm$ وَ $30cm$. ما قياس كل زاوية من زوايا هذا المثلث؟ قرّب الإجابات إلى أقرب درجة.

تمــارين وحلُّ مســائـل

تمارين حرّة	
لحل التمارين	انظر المثال
25-17	1
31-26	2
37-32	3
38	4

استعملْ حاسبة لإيجاد كل نسبة مثلثية، مقرّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة.

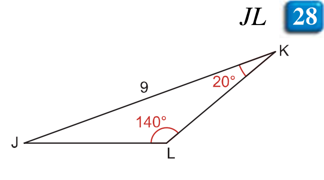
17 $\cos 95^\circ$ **18** $\tan 178^\circ$ **19** $\tan 118^\circ$

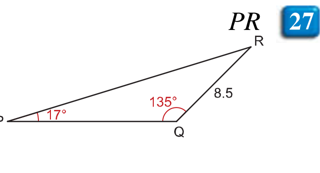
20 $\sin 132^\circ$ **21** $\sin 98^\circ$ **22** $\cos 124^\circ$

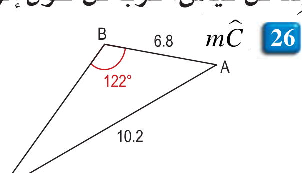
23 $\tan 139^\circ$ **24** $\cos 145^\circ$ **25** $\sin 128^\circ$

جِد كل قياس. قرّب كل طول إلى أقرب عُشر، وقياس كل زاوية إلى أقرب درجة.

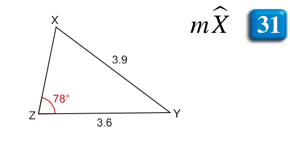
26 $m\hat{C}$ **27** PR **28** JL

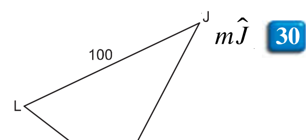


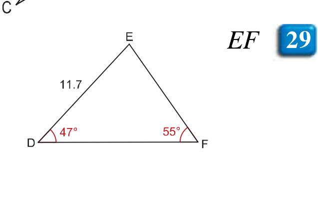




29 EF **30** $m\hat{J}$ **31** $m\hat{X}$

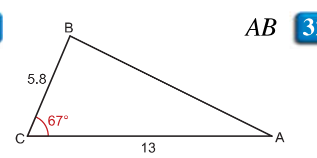




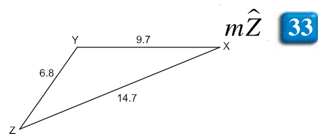


جِد كل قياس. قرّب كل طول إلى أقرب عُشر، وقياس كل زاوية إلى أقرب درجة.

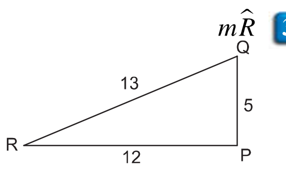
32 AB



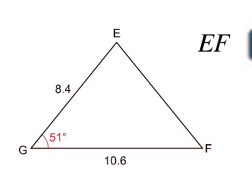
33 $m\hat{Z}$



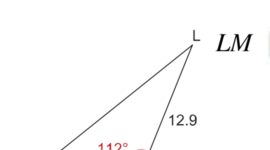
34 $m\hat{R}$



35 EF

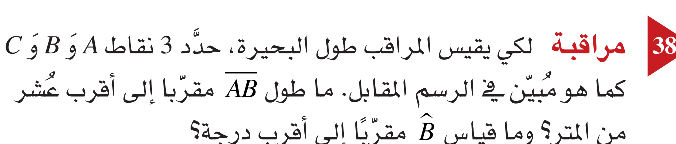


36 LM



37 $m\hat{G}$

H
5
13
J
14
G



38 **مراقبة** لكي يقيس المراقب طول البحيرة، حدَّد 3 نقاط A وَ B وَ C كما هو مُبيّن في الرسم المقابل. ما طول $\overline{AB}$ مقرّبا إلى أقرب عُشر من المتر؟ وما قياس $\hat{B}$ مقرّبًا إلى أقرب درجة؟

A
55 m
59°
C
108 m
B

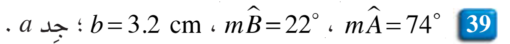
نافذة على نظام المراقبة



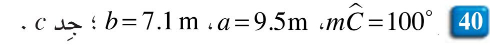
تتم أغلب عمليات المراقبة اليوم بواسطة نظام المواقع العالمي GPS.
يستعمل هذا النظام مجموعة من الأقمار الاصطناعية كمعالم لتحديد المواقع.

استعمل المثلث المقابل لحل التمارين من 39 إلى 42. قرّب الأطوال إلى أقرب عُشر، والزوايا إلى أقرب درجة.

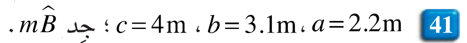
C
b
a
A
c
B



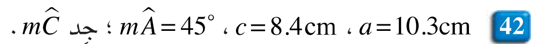
39 $m\hat{A}=74°$ ، $m\hat{B}=22°$ ، $b=3.2$ cm ؛ جِد a .



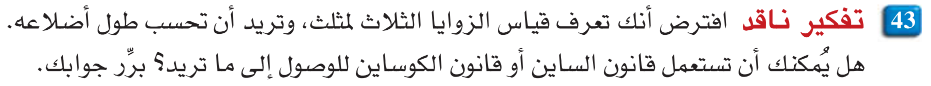
40 $m\hat{C}=100°$، $a=9.5$m ، $b=7.1$ m ؛ جِد c .



41 $a=2.2$m، $b=3.1$m ، $c=4$m ؛ جِد $m\hat{B}$.



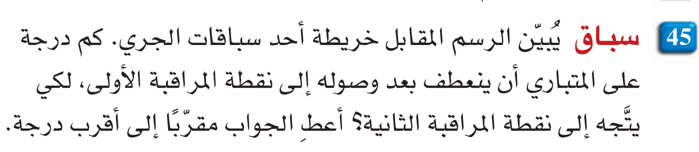
42 $a=10.3$cm ، $c=8.4$cm ، $m\hat{A}=45°$ ؛ جِد $m\hat{C}$.



43 **تفكير ناقد** افترض أنك تعرف قياس الزوايا الثلاث لمثلث، وتريد أن تحسب طول أضلاعه. هل يُمكنك أن تستعمل قانون الساين أو قانون الكوساين للوصول إلى ما تريد؟ برِّر جوابك.



44 **ماذا لو...؟** إلامَ يتحوّل قانون الكوساين لو كانت الزاوية قائمة؟

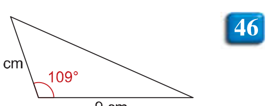


45 **سباق** يُبيّن الرسم المقابل خريطة أحد سباقات الجري. كم درجة على المتباري أن ينعطف بعد وصوله إلى نقطة المراقبة الأولى، لكي يتّجه إلى نقطة المراقبة الثانية؟ أعطِ الجواب مقرّبًا إلى أقرب درجة.

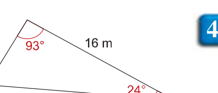
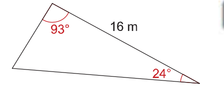


خطوات متعددة **احسب محيط كل مثلث. قرّب الجواب إلى أقرب عُشر.**

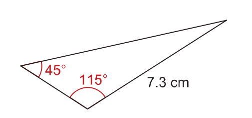
46



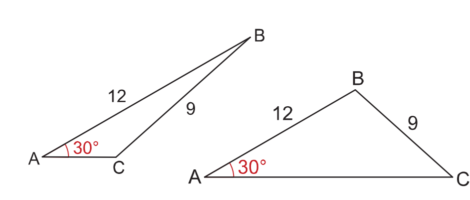
47

48

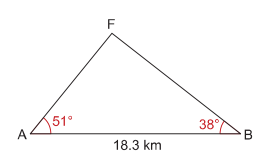


49 هناك حالة ملتبسة من حالات تطبيق قانون الساين. إنها حالة مثلث عُلم قياس إحدى زواياه وطول الضلع المقابل وطول ضلع آخر، غير أن طول الضلع المقابل أقل من طول الضلع الآخر. هناك حالتان لمثل هذه المثلث.



جِد قيمَتين ممكنتين لـ $m\hat{C}$، وقرّب الجواب إلى أقرب درجة. (مساعدة: عندما تستعمل الحاسبة البيانية لإيجاد قياس زاوية عُلم جيبها، فإن الحاسبة تُعطيك قياس الزاوية الحادة التي تلبي الشرط. خُذ في الاعتبار هذه الزاوية والزاوية المتكاملة معها).

50 تلقّت فرقتان من فرق الدفاع المدني موجودتان في النقطتين A وَ B، اتصالات تُفيد أن حريقًا شب في النقطة F.



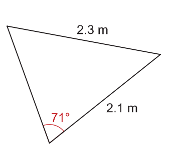
أ جِد $m\widehat{AFB}$.

ب احسب المسافة بين كل فريق ومكان النار. قرّب إلى أقرب كيلومتر.

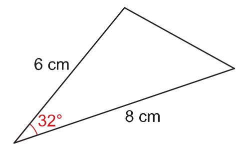
ج تطير مروحية الإطفاء بسرعة $150\,\text{km/h}$. ما الزمن الذي تربحه مكافحة النيران بانطلاق المروحية من النقطة A عوضًا عن النقطة B ؟

حدّد إن كان عليك استعمال قانون الساين أو قانون الكوساين كخطوة أولى، عند حل كل مثلث.

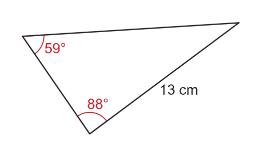
51



52



53



54 إحداثيات رؤوس المثلث ABC هي $A(0, 3)$ ، $B(3, 1)$، $C(-3, -1)$.

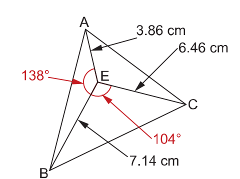


أ احسب AB، BC، CA.

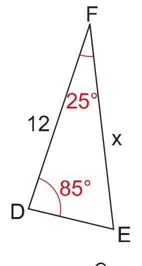
ب أي من زوايا المثلث لها القياس الأكبر؟

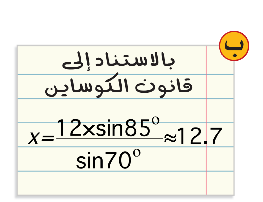
ج جِد قياس هذه الزاوية.

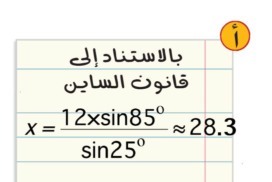
55 **فنون** أنشأت كلارا نمطًا لتلوين الزجاج مبيّنًا في المقابل. احسب BC وَ AB ثم $m\widehat{ABC}$. قرّب الأطوال إلى أقرب جزء من مئة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



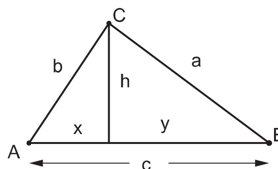
56 **خطأ في التحليل** طُلب إلى متعلِّمَين إيجاد الطول x في المثلث المقابل. أي من الحلين خطأ؟ أوضح الخطأ.







57 فيما يلي برهان قانون الكوساين في حالة مثلث حاد الزوايا.



المُعطى: ABC مثلث جميع زواياه حادة وَطول أضلاعه a، b، c.

المطلوب برهنته: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.

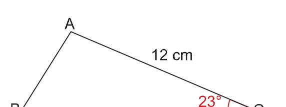
البرهان: ارسم الارتفاع النازل من C على $\overline{AB}$. ارمز بـ h إلى طول هذا الارتفاع.
يقسم هذا الارتفاع الضلع $\overline{AB}$ إلى قطعتين مستقيمتين طول الأولى x، وَ طول الثانية y.
يُمكنك أن تكتب، بالاستناد إلى مبرهنة فيثاغورس، أ) ——— $= a^2$ وَ ب) ——— $= h^2 + x^2$.
عوّض عن y في المعادلة الأولى بقيمتها $c - x$ لتحصل على ج) ——— . أعد تجميع الحدود لكي تحصل على $a^2 = (h^2 + x^2) + c^2 - 2cx$. عوّض عن $h^2 + x^2$ بقيمتها لتحصل على د) ——— .
يمكنك أن تكتب، بالاستناد إلى رسم المثلث، $\cos\widehat{A} = \frac{x}{b}$ مما يستتبع هـ) ——— $= x$. ينتج عما سبق $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.

58 **اكتب** هل تستطيع استعمال قانون الساين لحل المثلث المقابل؟ أوضح جوابك وبرِّره.

تحضير للاختبار

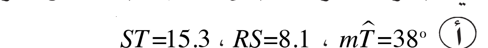


59 أي مما يلي هو الأقرب إلى طول الضلع $\overline{AB}$ ؟

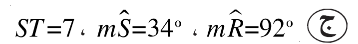


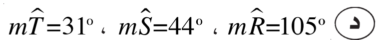
(أ) 5.5cm (ب) 14.4cm (ج) 7.5cm (د) 22.2cm

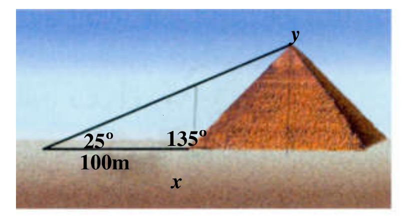
60 أي مجموعة معلومات تجعل حساب x باستعمال قانون الساين ممكنًا؟


(أ) $ST=15.3$ ، $RS=8.1$ ، $m\hat{T}=38°$


(ب) $ST=9$ ، $m\hat{S}=40°$ ، $RS=4$


(ج) $ST=7$ ، $m\hat{S}=34°$ ، $m\hat{R}=92°$


(د) $m\hat{T}=31°$ ، $m\hat{S}=44°$ ، $m\hat{R}=105°$

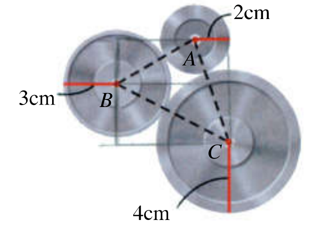


61 وجد أحد المهندسين أن وجه الهرم يُقيم زاوية قياسها 135° مع مستوي الأرض. كما وجد أن زاوية الارتفاع لرأس الهرم من نقطة تبعد 100m عن قاعدته تساوي 25° . ما طول الضلع الجانبي $\overline{XY}$ ؟

(أ) 48m (ب) 81m (ج) 124m (د) 160m



تحدٍّ وتوسّع



62 **خطوات متعددة** وضعت ثلاثة أقراص متلاصقة كما يُبيّن الشكل المقابل. أنصاف أقطار الأقراص هي 2cm و 3cm و 4cm . جِد $m\widehat{ACB}$ في المثلث ABC. قرّب الجواب إلى أقرب درجة.

63 يمر المستقيم l في النقطتين $(-1, 1)$ و $(1, 3)$. كما يمر المستقيم m في النقطتين $(-1, 1)$ و $(3, 2)$. احسب، مقرّبًا إلى أقرب درجة، قياس الزاوية الحادة التي يشكِّلها المستقيمان.

64 **ملاحة** يقع الميناء B على مسافة 5km جنوب الميناء A . انطلق مركب من الميناء A باتجاه شمال $-32°-$ شرق، وسار بسرعة 6km/h . كم يبعد هذا المركب عن الميناء B بعد 45 دقيقة؟ قرّب الجواب إلى أقرب عُشر من الكيلومتر.

مراجعة لولبية

اكتب العدد ذا الرتبة n في كل نمط. (الصفوف السابقة)

65 $3, 6, 9, 12, 15, \ldots$ **66** $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$  **67** $4, 6, 8, 10, 12, \ldots$

استعمل النسبة المثلثية لتُحدد، في كل مرة، أي زاوية هي $\hat{A}$. (الصفوف السابقة)



68 $\cos\hat{A}=\frac{15}{17}$ **69** $\sin\hat{A}=\frac{15}{17}$ **70** $\tan\hat{A}=1.875$

استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد قياس الزاوية الحادة A. في كل تمرين. أعطِ الجواب مقرّبًا إلى أقرب جزء من ألف. (الصفوف السابقة)

71 $\sin\hat{A}=0.89$ **72** $\cos\hat{A}=0.89$ **73** $\tan\hat{A}=2.05$

7-2 الدوال المثلثية

Trigonometric Functions

الأهداف

يميّز الدوال الدورية.

يُميّز الدوال المثلثية ويرسم بياناتها.

المفردات Vocabulary

الدالّة الدورية Periodic function

الدالّة المثلّثية Trigonometric function



الدورة Cycle

الزمن الدوري Period

السعة Amplitude

التردد Frequency

انحراف الطور Phase shift

لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

يُمكن تمثيل الظواهر الدورية، مثل الأمواج الصوتية، باستعمال الدوال المثلثية. (انظر مثال 3).

الدالة المثلثية Trigonometric function دالّة قاعدتها مقدار مثلثي. الدوال المثلثية الأساسية ثلاث: **دالّة الساين Sine function** $f(x) = \sin x$ **ودالّة الكوساين Cosine function** $f(x) = \cos x$ **ودالّة التانجانت Tangent function** $f(x) = \tan x$ حيث يُمثّل x قياس زاوية بالراديان. تتميّز الدوال المثلّثية بأنّ قيمها تتكرَّر بشكل دوري. فدالّة الساين تحقّق $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ما يعني أن هذه الدالّة تأخذ القيم نفسها عندما ينتمي x إلى الفترات $[0, 2\pi]$، $[2\pi, 4\pi]$... تعبّر عن ذلك بالقول إن دالّة الساين **دورية**، وأن **زمنها الدوري** هو 2π .

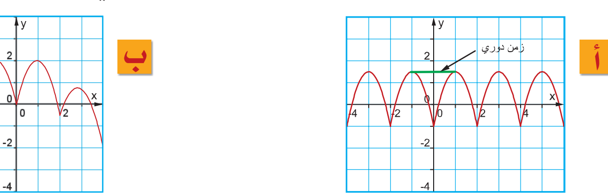
الدالّة الدورية Periodic function دالّة تتكرّر قيمها في فترات منتظمة، تُسمى **دورات Cycles**. لجميع الدورات طول واحد يُسمّى **الزمن الدوري Period**.

تفحّص بيانات دوال دورية وأخرى غير دورية. لاحظ أن بإمكان الدورة أن تبدأ عند أي نقطة من بيان الدالّة.

دالة دورية	دالة غير دورية
(بيان)	(بيان)

مثـــال 1 تمييز الدوال الدورية

حدِّد إن كانت الدالة دورية أم لا. حدِّد زمنها الدوري إذا كانت دورية.



أ هناك نمط يتكرّر بشكل مضبوط، ما يدل على أن الدالّة دورية.
الدالّة دورية وزمنها الدوري 2.

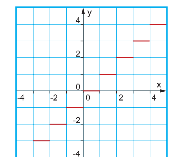
ب لا يوجد نمط يتكرر بشكل مضبوط، بالرغم من تمتُّع البيان ببعض التناظر.
الدالّة ليست دورية.



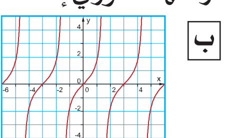
نقطة مراقبة

1. حدِّد إن كانت الدالة دورية أم لا. حدِّد زمنها الدوري إذا كانت دورية.

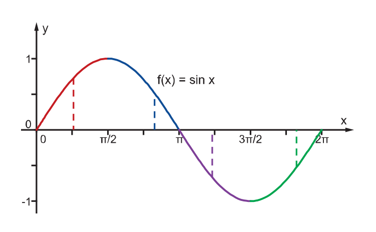
أ



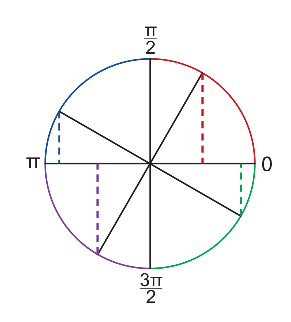
ب



الدوال المثلثية الأساسية دورية. يمكنك رسم بيان الدالّة $f(x)=\sin x$ في المستوي الإحداثي باستعمال الإحداثي y لنقاط تقع على دائرة الوحدة، حيث يمثّل x الزاوية θ في الوضع المثالي.



$x(=\theta)$	y
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$



يُمكنك رسم بيان $f(x)=\cos x$ باستعمال الإحداثي x لنقاط على دائرة الوحدة.

سعة Amplitude الدالّة الدورية هي نصف الفرق بين قيمتها الكبرى وقيمتها الصغرى.

السعة عدد موجب دائمًا. سعة كل من دالّتي الجيب وجيب التمام هي $1=\frac{1-(-1)}{2}$. أما سعة دالّة الظل فهي غير معرّفة.



خصائص بيانات الدوال المثلثية

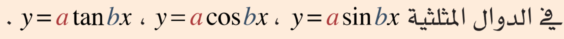
الدالة	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
البيان			
المجال	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\left\{x / x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
المدى	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	
الزمن الدوري	2π	2π	π
السعة	1	1	غير معرفة

إضــاءة

يمر بيانا دالة الساين ودالّة التانجانت في نقطة الأصل، في حين أن التقاطع العمودي لبيان دالّة الكوساين هو 1.

يُمكنك استعمال بيانات الدوال الأم لرسم بيانات الدوال $y=a\sin bx$ ، $y=a\cos bx$ ، $y=a\tan bx$. تذكّر أن a تدل على مط عمودي $(|a|>1)$ أو كبس عمودي $(0<|a|<1)$ مما يُغيّر السعة. إذا كان a سالبًا، يجب تحويل البيان بانعكاس حول المحور الأول. من ناحيته، يدل b على مط أو كبس أفقيين مما يُغيّر الزمن الدوري.





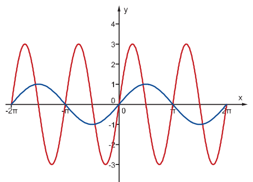
تحويلات بيانات الدوال المثلثية

في الدوال المثلثية $y=a\sin bx$ ، $y=a\cos bx$ ، $y=a\tan bx$.

الدالّة	السعة	الزمن الدوري	المحاذيات
$y=a\sin bx$	$\lvert a\rvert$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	لامحاذيات
$y=a\cos bx$	$\lvert a\rvert$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	لامحاذيات
$y=a\tan bx$	غير معرّفة	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$	محاذيات عمودية عند $x=\frac{\pi}{2\lvert b\rvert}+\frac{k\pi}{\lvert b\rvert}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

مثـــال 2 تحويل الدوال المثلّثية

أ استعمل بيان دالّة السائن لرسم بيان الدالّة $g(x) = 3\sin 2x$. حدّد سعة هذه الدالة وزمنها الدوري.



الخطوة 1 حدِّد السعة والزمن الدوري.

بما أن $a = 3$ فإن السعة هي $|a| = |3| = 3$.

بما أن $b = 2$ فإن الزمن الدوري هو $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

الخطوة 2 ارسم البيان.

عليك مط بيان الدالّة الأم عموديًّا بعامل 3 ، وكبسه أفقيًا بعامل $\frac{1}{2}$.

تقع التقاطعات الأفقية للدالّة الأم عند مضاعفات π ، بينما تقع التقاطعات الأفقية للدالّة g عند مضاعفات $\frac{\pi}{2}$.

القيمة الكبرى للدالّة g هي 3 في حين أن قيمتها الصغرى هي -3.

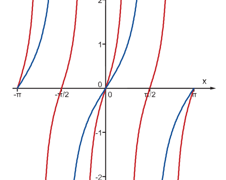
ب استعمل بيان دالّة التانجانت لرسم بيان الدالة $h(x) = \tan 2x$. حدّد الزمن الدوري لهذه الدالّة وتقاطعاتها الأفقية ومقارباتها.

الخطوة 1 حدِّد الزمن الدوري.

بما أن $b = 2$ فإن الزمن الدوري هو $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$.

الخطوة 2 حدِّد التقاطعات الأفقية.

أول هذه التقاطعات عند $x = 0$. بما أن الزمن الدوري للدالة هو $\frac{\pi}{2}$ فإن التقاطعات الأفقية تقع عند $x = k\frac{\pi}{2}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.



الخطوة 3 حدِّد المحاذيات.



بما أن $b=2$ فإن للدالّة محاذيات عمودية عند $x = \frac{\pi}{2|2|} + \frac{k\pi}{|2|}$ أو $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

الخطوة 4 ارسم بيان الدالّة h بالاستناد إلى كل تلك المعلومات.



نقطة مراقبة

2. أ استعمل بيان دالّة الكوساين لرسم بيان الدالة $g(x)=\frac{1}{3}\cos 2x$. حدِّد سعة هذه الدالّة وزمنها الدوري.

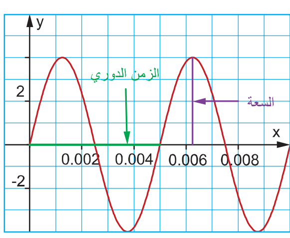
ب استعمل بيان دالّة التانجانت لرسم بيان الدالة $h(x)=3\tan\frac{1}{2}x$. حدِّد الزمن الدوري لهذه الدالّة وتقاطعاتها الأفقية ومحاذياتها.

يُمكنك استعمال دالّتي السائن والكوساين كنماذج لدراسة ظواهر واقعية، مثل موجات الصوت. فالأصوات المختلفة تُنتج موجات مختلفة. تُستعمل **الترددات** عادة للتمييز بين الأصوات. **التردد Frequency** هو عدد الدورات في وحدة زمن محدَّدة، مما يجعلها مقلوب الزمن الدوري. يُستعمل الهيرتز Hz لقياس الترددات. يُمثل الهيرتز الواحد دورة واحدة في الثانية. فعندما تقول عن صوت أنه بتردُّد 440 هيرتز مثلاً، هذا يعني أن موجة الصوت تتكرّر 440 مرة في الثانية.



مثـــــال 3 تطبيق على علم الأصوات

استعمل دالّة الساين لرسم موجة صوت زمنه الدوري 0.005 S وسعته 4 cm. جِد تردُّد هذه الموجة.



رقّم المحور الأفقي بحيث تمثّل وحدته 0.001 من الثانية. يُفيدك الزمن الدوري بأن الموجة يلزمها 0.005 ثانية لتتم دورة كاملة. أما القيمتان الكبرى والصغرى فتتحددان بالسعة. بما أن التردد يساوي مقلوب الزمن الدوري، فإن قيمته هي $\frac{1}{0.005} = 200Hz$

تردُّد الصوت هو 200 هيرتز.



3. استعمل دالّة الساين لكي ترسم موجة صوت زمنه الدوري 0.004 s، وسعته 3 cm . جِد تردُّد موجة هذا الصوت.

من الممكن أيضًا تحويل دالتي الساين والكوساين بالسحب للحصول على $y=\sin(x-h)+k$ أو $y=\cos(x-h)+k$. تذكّر أن سحب بيان عموديًّا k وحدة، يكون إلى أعلى إذا كان k موجبًا وإلى أسفل إذا كان سالبًا.

انحراف الطور Phase Shitf لدالّة دورية هو سحب أفقي لبيانها. يسحب انحراف الطور h البيان إلى اليمين، إذا كان h موجبًا، وإلى اليسار إذا كان سالبًا.

مثـــــال 4 تحديد انحراف الطور لدالّتَي الساين والكوساين

استعمل بيان الدالة $f(x)=\sin x$ لكي ترسم بيان الدالة $g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. حدد التقاطعات الأفقية وانحراف الطور.

الخطوة 1 حدِّد السعة والزمن الدوري.

بما أن $a=1$ فإن السعة هي $|a|=|1|=1$.

بما أن $b=1$ فإن الزمن الدوري هو $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|1|}=2\pi$.

الخطوة 2 حدِّد انحراف الطور.

$x+\frac{\pi}{2}=x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ حدِّد h

بما أن $h=-\frac{\pi}{2}$ فإن انحراف الطور هو $\frac{\pi}{2}$ نحو اليسار. ينتج من ذلك سحب جميع التقاطعات الأفقية للبيان $\frac{\pi}{2}$ وحدة إلى اليسار.

الخطوة 3 حدِّد التقاطعات الأفقية.

بما أن التقاطعات الأفقية لبيان الدالّة الأم تقع عند $x=k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$، فإن التقاطعات الأفقية للدالّة تقع عند $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

الخطوة 4 حدِّد القيم الكبرى والقيم الصغرى.

تتّخذ الدالة قيمتها الكبرى أو قيمتها الصغرى عندما يكون x في الوسط بين تقاطعين أفقيين.

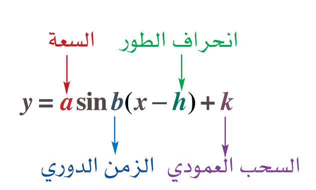
تتّخذ الدالة قيمتها الكبرى وهي تساوي 1 عند $x=2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$، وتتّخذ قيمتها الصغرى وهي تساوي -1 عند $x=\pi+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

الخطوة 5 أرسم بيان الدالة بالاستناد إلى المعلومات.

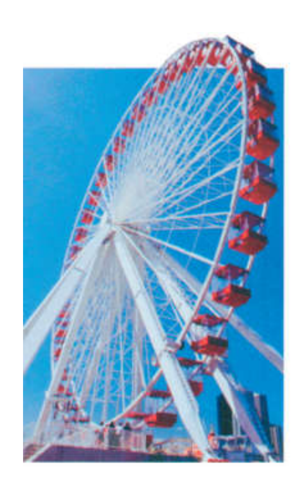
نقطة مراقبة

4. استعمل بيان الدالة $f(x)=\cos x$ لكي ترسم بيان الدالّة $g(x)=\cos(x-\pi)$. حدِّد التقاطعات الأفقية وانحراف الطور.

يُمكنك دمج التحويلات لدالّتَي الساين والكوساين.
استعمل قيم a، b، h، k لتحديد مميزات دالّة الساين والكوساين.



مثــــال 5 تطبيق



دولاب دوّار ضخم يُتم دورة كاملة كل 7 دقائق. يُمكن اعتماد الدالّة $H(t)=21\sin\frac{2\pi}{7}(t-1.75)+24$ نموذجًا لحساب الارتفاع عن الأرض (بالأمتار) لإحدى مقصورات الركاب، بدلالة الزمن (بالدقائق).

أ **ارسم بيانًا لدالّة ارتفاع المقصورة على مدى دورتين.**

$H(t)=21\sin\frac{2\pi}{7}(t-1.75)+24$ $\quad a=21$ ، $b=\frac{2\pi}{7}$ ، $h=1.75$ ، $k=24$

الخطوة 1 حدِّد المميزات الأساسية للدالّة.

السعة 21؛ الزمن الدوري $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\left|\frac{2\pi}{7}\right|}=7$

الزمن الدوري هو ما يستغرقه الدولاب ليتم دورة كاملة: يبلغ 7 دقائق.

انزياح الطور: 1.75 دقيقة إلى اليمين؛

السحب العمودي: 24 m إلى أعلى.

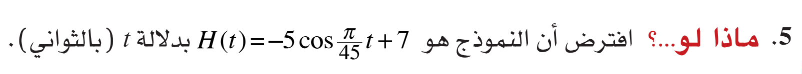
ليس للبيان تقاطعات أفقية.

القيمة الكبرى: $24+21=45$ وتتَّخذها الدالّة عند $t=3.5$ وَ $t=10.5$.

القيمة الصغرى: $24-21=3$ وتتَّخذها الدالّة عند $t=0$ وَ $t=7$ وَ $t=14$.

ب **ما أعلى ارتفاع تبلغه مقصورة.**

أعلى ارتفاع تبلغه مقصورة هو 45m $(24+21)$.



نقطة مراقبة

5. **ماذا لو...؟** افترض أن النموذج هو $H(t)=-5\cos\frac{\pi}{45}t+7$ بدلالة t (بالثواني).

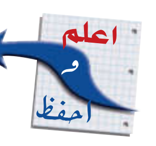
أ ارسم بيان ارتفاع مقصورة على مدى دورتين.

ب ما أعلى ارتفاع تبلغه مقصورة؟

فكِّرْ وناقِش

1. ما العلاقة بين تردُّد دالّة دورية وزمنها الدوري؟ كيف يُطبّق ذلك على دالّة الكوساين؟

2. ما العلاقة التي تربط بين القيم الكبرى والقيم الصغرى والسعة والزمن الدوري لدالّتَي الساين والكوساين؟



3. **كن منظّمًا** انسخ المخطط المقابل ثم أكمله. أعطِ مثالاً على كل تحويل، واذكر الزمن الدوري.

مط أفقي	كبس عمودي
دالتا ساين وكوساين	
انحراف الطور	انعكاس

2-7 التمـــاريـــن

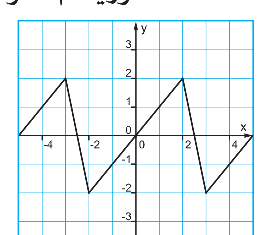
تمــارين موجّهــة

1 **مـفـردات** تتكرَّر قيم الدالة الدورية في فترات منتظمة تُسمى ______ . (دورة أو زمن دوري)

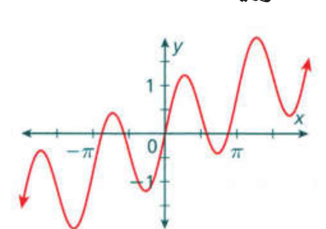
انظر المثال 1

حدِّد إن كانت الدالة دورية أم لا، وحدَّد زمنها الدوري إذا كانت دورية.

2



3



انظر المثال 2

استعمل بيان الدالّة الأم لرسم بيان كل دالّة. حدّد السعة والزمن الدوري.

4 $f(x)=\sin\frac{1}{2}x$ **5** $h(x)=\frac{1}{4}\cos x$ **6** $k(x)=\sin\pi x$

استعمل بيان الدالّة الأم لرسم بيان كل دالّة. حدّد الزمن الدوري والتقاطعات الأفقية والمحاذيات.

7 $f(x)=2\tan 3x$ **8** $h(x)=\tan\frac{1}{4}x$ **9** $k(x)=\tan 2\pi x$

انظر المثال 3

10 **صوت** استعمل دالة الساين لكي ترسم موجة صوت زمنها الدوري 0.01 ثانية وسعتها 6 سنتيمترات. جِد تردد هذه الموجة.

انظر المثال 4

استعمل بيان الدالّة الأم لرسم بيان كل دالّة. حدّد التقاطعات الأفقية وانحراف الطور.

11 $f(x)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$ **12** $h(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ **13** $k(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

انظر المثال 5

14 **تسلية** يُمكن اعتماد الدالّة $H(\theta)=-4\cos\theta+6$ لحساب ارتفاع راكب الأرجوحة (بالأقدام) بدلالة الزاوية θ التي تُشكِّلها الأرجوحة مع مستقيم عمودي يمر في رأسها. ارسم بيانًا يُمثِّل ارتفاع الراكب حيث $0^\circ\le\theta\le 90^\circ$. ما ارتفاع الراكب عندما $\theta=60^\circ$ ؟

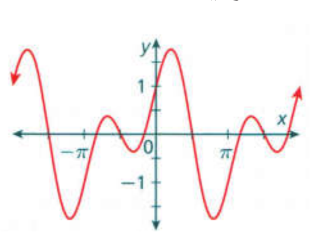
تمــارين وحلُّ مســائل

تمارين حرّة	
لحل التمارين	أنظر المثال
16–15	1
20–17	2
21	3
28–22	4
29	5

حدد إن كانت الدالّة دورية أم لا. وحدّد زمنها الدوري إذا كانت دورية.

15

16



استعمل بيان الدالّة الأم لرسم بيان كل دالّة. حدّد السعة والزمن الدوري.

17 $f(x)=4\cos x$ **18** $h(x)=\frac{3}{2}\sin x$ **19** $k(x)=-\cos 4x$ **20** $\ell(x)=6\sin\frac{1}{3}x$

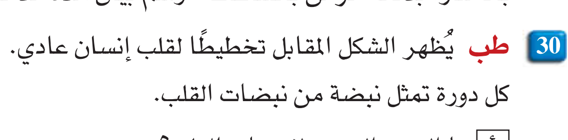
21 **صوت** استعمل دالّة الساين لكي ترسم موجة صوت زمنها الدوري 0.025 ثانية وسعتها 5 cm . جِد تردُّد هذه الموجة.

استعمل بيان الدالّة الأم لرسم بيان كل دالّة. جد الزمن الدوري والتقاطعات الأفقية والمحاذيات.

22 $f(x)=\tan\frac{3}{2}x$ **23** $h(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ **24** $k(x)=-2\tan\frac{\pi}{2}x$

25 $f(x)=\sin(x+\pi)$ **26** $h(x)=\cos(x-3\pi)$

27 $k(x)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$ **28** $g(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$



29 **علوم البحار** يُمكن اعتماد الدالّة $d(t)=\frac{3}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{31}t\right)+23$ نموذجًا لحساب عمق مياه أحد الخلجان بالأمتار، بدلالة الزمن بالساعات. ارسم بيان هذه الدالّة، وحدِّد العمق الأكبر والعمق الأصغر.

نافذة على الطب

تُستعمل آلة تخطيط القلب لقياس التيار الكهربائي الذي يتحكم بنبضات قلب الإنسان بغية تشخيص أمرض القلب.

30 **طب** يُظهر الشكل المقابل تخطيطًا لقلب إنسان عادي. كل دورة تمثل نبضة من نبضات القلب.

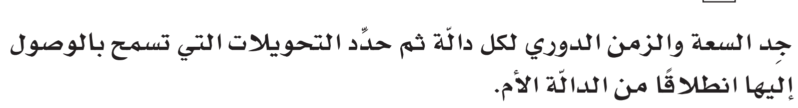
0.2s

أ ما الزمن الدوري لنبضات القلب؟

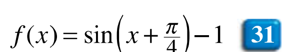
ب معدَّل نبضات القلب هو عددها في الدقيقة الواحدة. ما معدَّل نبضات القلب الذي يُبيّنه التخطيط المقابل؟

ج ما هو تردُّد هذا التخطيط؟

د ما العلاقة بين تردُّد التخطيط ومعدل نبضات القلب؟



جِد السعة والزمن الدوري لكل دالّة ثم حدِّد التحويلات التي تسمح بالوصول إليها انطلاقًا من الدالّة الأم.



31 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$ **32** $g(x)=\frac{3}{4}\cos\frac{\pi}{4}x$

33 $k(x)=\cos(2\pi x)-2$ **34** $\ell(x)=-3\sin 3x$

تقدير **استعمل بيان دالّة الساين أو الكوساين لتقدير قيمة كل مقدار.**

35 $\sin 160°$ **36** $\cos 50°$ **37** $\sin 15°$ **38** $\cos 95°$

اكتب دالّة ساين ودالّة كوساين لتمثيل ما هو محدَّد.

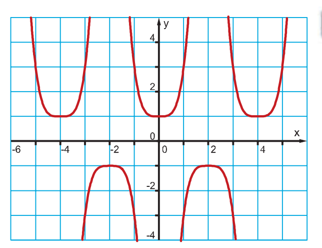
39 السعة 6 والزمن الدوري π **40** السعة $\frac{1}{4}$ وانحراف الطور $\frac{3}{2}\pi$ إلى اليسار

اكتب دالّة ساين ودالّة كوساين يُمكن أن تتمثل بالبيان.

41

y
4
2
0
-2
-4
x
-π
-π/2
0
π/2
π

42



43 يبلغ الحد الأعلى لارتفاع المد في أحد الخلجان 3 m ، والحد الأدنى 0. يستغرق المد 6.1 ساعات لينحسر، وَ 6.1 ساعات ليعود. يُمكن تمثيل ارتفاع المد بدالة h بدلالة الزمن t .

أ ما سعة هذه الدالّة؟ وما زمنها الدوري؟ ما قيمتها الكبرى؟ وما قيمتها الصغرى؟

ب افترض أن المد بلغ حده الأعلى عند $t=0$. ما قيمة $h(0)$؟ وما قيمة $h(6.1)$؟

ج اكتب الدالّة h على صورة $h(t)=a\cos bt+k$.

44 **تفكير ناقد** إذا عرفت سعة دالّة ساين وزمنها الدوري، فهل تستطيع أن تجد قيمتها الكبرى وقيمتها الصغرى، وأن تحدِّد قيم x حيث تتخذ الدالة هذه القيم القصوى؟ إذا لم يكن ذلك ممكنًا، فماذا ينقصك من معلومات لتقوم بذلك؟ وكيف تستعملها؟



45 **اكتب** ماذا يحدث للزمن الدوري للدالّة $f(x)=\sin bx$ إذا كان $b>1$ ؟ $b<1$ ؟



46 أي دالّة مثلثية تناسب الرسم البياني المقابل؟

(أ) $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$ (ب) $f(x)=2\sin x$

(ج) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ (د) $f(x)=2\sin\frac{1}{2}x$

47 ما سعة الدالّة $f(x)=-4\cos 3\pi x$ ؟

(أ) -4 (ب) 3 (ج) 4 (د) 3π

48 استعمل الرسم البياني المقابل لتحديد العلاقة بين f وَ g.

(أ) سعة f ضعف سعة g

(ب) تردد f ضعف تردد g

(ج) الزمن الدوري لـ f ضعف الزمن الدوري لـ g

(د) دورة f ضعف دورة g

49 **جواب مختصر** استعمل بيان الدالّة $f(x)=\sin x$ لكي ترسم بيان الدالّة $g(x)=-4\sin 2(x-\pi)$ على الفترة $[0, 2\pi]$ ، وحدِّد التحويلات التي تستعملها.

تحدٍّ وتوسّع

استعمل الدالّتين $f(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta$ وَ $g(\theta)=2\cos\theta$ حيث $0^\circ\le\theta\le 360^\circ$.

50 ارسم بيان الدالّتين في المستوي الإحداثي نفسه.

51 جِد قيمة تقريبية لإحداثيي كل نقطة تقاطع بين البيانين.

52 متى يتحقّق التباين $f(\theta)>g(\theta)$ ؟

مراجعة لولبية

اكتب كل مجموعة أعداد على صورة فترة. (الصفوف السابقة)

53 $-7<x\le 5$ **54** $x\le -2$ أو $1\le x\le 13$ **55** $0\le x\le 9$

56 **أزهار** مع لافين 100 000 دينار لشراء مجموعة من باقات الورد والزنبق والقرنفل. ثمن باقة الورد 6000 دينار وثمن باقة الزنبق 2000 دينار وثمن باقة القرنفل الواحدة 4000 دينار. (الدرس 2)

أ اكتب معادلة خطّية بثلاثة مجاهيل لتمثيل الحالة.

ب أكمل الجدول المقابل.

ورد	6		3	7
زنبق		8	5	
قرنفل	11	15		13

استعمل المعطيات لحل المثلث ABC. (الدرس 7-1)

57 $b=20$ ، $c=11$ ، $m\hat{A}=165^\circ$ **58** $a=9.2$ ، $b=11.4$ ، $c=20.2$





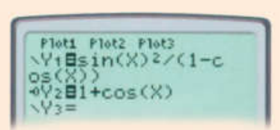
المتطابقات المثلثية بيانيًا

يُمكنك استعمال الحاسبة البيانية للمقارنة بين الرسوم البيانية وصياغة مقولات حول المتطابقات المثلثية.

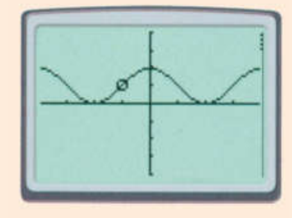
نشاط

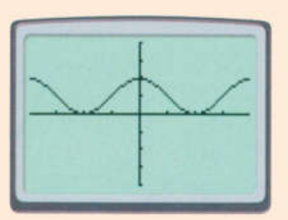
حدِّد إن كانت المعادلة $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = 1+\cos x$ متطابقة مثلثية أم لا.

إذا كانت المعادلة متطابقة، فلن توجد فروق بين بيان الدالّة التي قاعدتها الطرف الأول وبيان الدالّة التي قاعدتها الطرف الثاني.









1. أدخل $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ أمام **Y1** وَ $1+\cos x$ أمام **Y2** . اختر لرسم بيان الدالّة الثانية طريقة 0 مع خط يخترقه. فذلك يسمح لك بتتبع رسم البيان.
2. حدِّد شاشة الرسم باختيار 7:ZTrig من خيارات ZOOM.
3. حدِّق إلى الحاسبة وهي ترسم البيانات. عند قيامها برسم بيان الدالّة الثانية، سوف تشاهد دائرة صغيرة تتحرّك على بيان الدالّة الأولى، مما يعني أن بيان الدالّة الثانية يُرسم فوق بيان الدالة الأولى.
4. عندما تنتهي الدائرة الصغيرة من رسم بيان الدالّة الثانية سوف تتحقَّق من أن البيانين متطابقان، مما يوحي بأن المعادلة هي في الأغلب متطابقة. عندها تعمل على التحقُّق من ذلك جبريًّا.

حاول

1. **اكتب مقولة** انظر إن كانت المعادلة $\cos x = \tan x \sin x - \frac{1}{\cos x}$ تبدو متطابقة مثلثية.
2. أثبت جبريًّا صحَّة جوابك أو خطأه في التمرين السابق.
3. **اكتب مقولة** انظر إن كانت المعادلة $\tan x = \frac{1+\tan x}{1+\frac{1}{\tan x}}$ تبدو متطابقة مثلثية.
4. أثبت جبريًّا صحَّة جوابك أو خطأه في التمرين السابق.

3–7 المتطابقات المثلثية الأساسية

Fundamental Trigonometric Identities



الأهداف

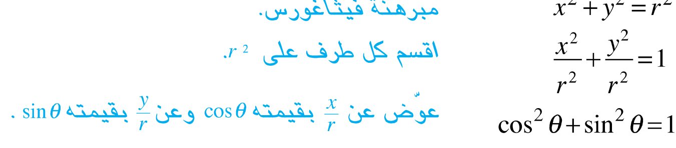
يستعمل المتطابقات المثلثية الأساسية لتبسيط المقادير المثلثية، وإعادة كتابتها، وللتحقُّق من صحة متطابقات أخرى.

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل مصنّعو لوازم التزلُّج المتطابقات المثلثية لتحديد نوع الشمع الذي ينبغي لهم تشميع المزلاج به. (مثال 3).

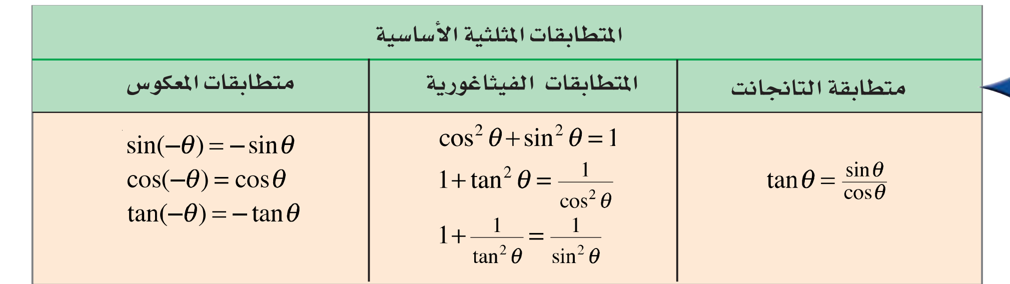
يُمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لتبسيط المقادير المثلثية. تذكَّر أن المتطابقة في الرياضيات هي علاقة تصح أيًّا تكن القيم التي تتخذها المتغيِّرات الواردة في العلاقة.

فيما يلي استخلاص لمتطابقة مثلثية انطلاقًا من مبرهنة فيثاغورس.



$x^2+y^2=r^2$	مبرهنة فيثاغورس.
$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$	اقسم كل طرف على r^2.
$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$	عوّض عن $\frac{x}{r}$ بقيمته $\cos\theta$ وعن $\frac{y}{r}$ بقيمته $\sin\theta$.





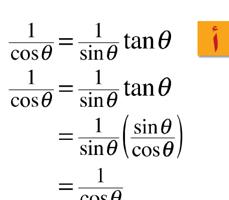
المتطابقات المثلثية الأساسية		
متطابقة التانجانات	المتطابقات الفيثاغورية	متطابقات المعكوس
$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ $1+\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

لكي تُبرهن أن معادلة تشكِّل متطابقة، غيِّر أحد طرفيها عدة مرات، حتى يُصبح كالطرف الآخر. برر خطواتك باستعمال المتطابقات الأساسية.

مثال 1 إثبات متطابقات مثلّثية

أثبت المتطابقة المثلّثية.

أ $\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\tan\theta$



$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\tan\theta$	اختر الطرف الذي سوف تُغيِّره.
$=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$	استعمل متطابقة التانجانات.
$=\frac{1}{\cos\theta}$	بسّط.

ب $\frac{1}{\sin(-\theta)}=-\frac{1}{\sin\theta}$

$\frac{1}{\sin(-\theta)}=$	اختر الطرف الذي سوف تُغيِّره.
$\frac{1}{-\sin\theta}$	استعمل متطابقة المعكوس.
$-\frac{1}{\sin\theta}=-\frac{1}{\sin\theta}$	بسّط.

إضاءة

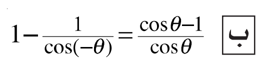
يُمكنك تغيير أي من الطرفين. إلاّ أن الأسهل يكون بتغيير الطرف الأعقد وتبسيطه وصولاً إلى الطرف الثاني.



نقطة مراقبة

1. أثبت المتطابقة المثلّثية.

أ $\sin\theta \dfrac{1}{\tan\theta} = \cos\theta$



ب $1 - \dfrac{1}{\cos(-\theta)} = \dfrac{\cos\theta - 1}{\cos\theta}$

يُمكنك استعمال المتطابقات المثلّثية الأساسية لتبسيط المقادير المثلثية.

مثـــال 2 استعمال المتطابقات المثلّثية الأساسية لتبسيط المقادير المثلثية.

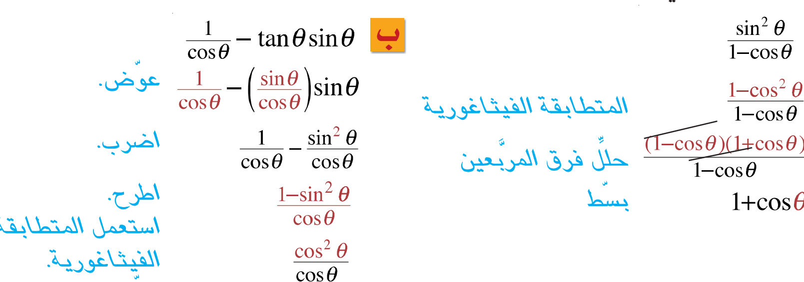
اكتب المقدار المثلثي بدلالة $\cos\theta$ فقط، وعلى أبسط صورة.

أ $\dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$

$\dfrac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}$ المتطابقة الفيثاغورية

$\dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{1-\cos\theta}$ حلِّل فرق المربَّعين

$1+\cos\theta$ بسِّط



ب $\dfrac{1}{\cos\theta} - \tan\theta\sin\theta$

$\dfrac{1}{\cos\theta} - \left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\sin\theta$ عوِّض.

$\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ اضرب.

$\dfrac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}$ اطرح.

$\dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$ استعمل المتطابقة الفيثاغورية.

$\cos\theta$ بسِّط.

إضـــاءة

إذا لم تعرف كيف تبسّط متطابقة مثلثية، حاول أن تحوّل كل نسبة مثلثية إلى جيب أو جيب تمام.



نقطة مراقبة

2. اكتب المقدار المثلثي بدلالة $\sin\theta$ فقط، وعلى ابسط صورة.

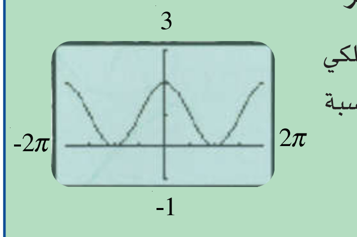
أ $\dfrac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$



ب $\dfrac{1}{\tan^2\theta}$

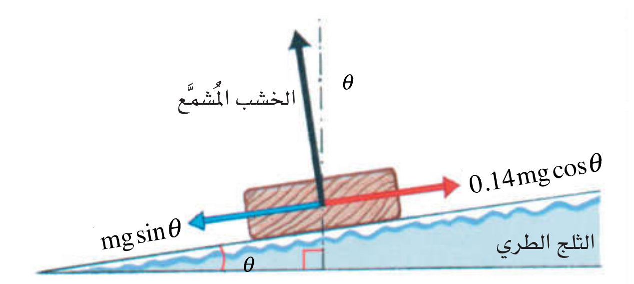
من طالب إلى طالب تحقَّق بيانيًا من تكافؤ المقادير

أحب استعمال الحاسبة البيانية لأتحقق من تكافؤ مقدارين. فلكي أتحقق من تكافؤ المقدارين $\dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ وَ $1+\cos\theta$، أطلب إلى الحاسبة رسم بيانيَ الدالَّتين $y = \dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ وَ $y = 1+\cos\theta$ على الشاشة نفسها. بما أن البيانين يبدوان متطابقين، يمكنني استنتاج تكافؤهما.



مثـــال 3 تطبيق صناعي

تختبر إحدى الشركات التي تُصنّع لوازم التزلج، احتكاك نوع جديد من الشمع الذي تشمَّع به المزالج، عن طريق وضع شبه مكعب خشبي تم تشميعه بهذا النوع من الشمع على مستو مائل من الثلج الطري. يتم رفع مستوي الثلج ببطء حتى تبدأ قطعة الخشب بالانزلاق.



عندما تبدأ قطعة الخشب الانزلاق، يتساوى مكوّن الكتلة الموازي لسطح الثلج، $mg\ \sin\theta$ **مع مقاومة الانزلاق** $\mu mg\cos\theta$ **الناتجة من الاحتكاك، حيث يُمثل** μ **معامل الاحتكاك. حدّد زاوية الانزلاق** θ **، أي الزاوية التي يُشكّلها مستوي الثلج مع مستوٍ أفقي، عند بدء الانزلاق، علمًا أنّ** $\mu=0.14$.

$mg\ \sin\theta=\mu mg\cos\theta$ اكتب أنّ المكوّن الأفقي للكتلة يساوي قوة الاحتكاك.

$\sin\theta=\mu\cos\theta$ اقسم كل طرف على mg .

$\sin\theta=0.14\cos\theta$ عوّض

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=0.14$ اقسم كل طرف على $\cos\theta$.

$\tan\theta=0.14$ متطابقة الظل.

$\theta\approx 8^\circ$ استعمل $\tan^{-1}$

تبدأ قطعة الخشب بالانزلاق عندما يصبح قياس الزاوية θ ، 8 درجات تقريبًا.

قـراءة

اقرأ الحرف اليوناني μ كما يلي: ميو.



3. استعمل المعادلة $mg\sin\theta=\mu mg\cos\theta$ لإيجاد زاوية الانزلاق، عندما يكون معامل الاحتكاك $\mu=0.4$.

فكِّرْ وناقش

1. **صف** كيف تثبت أن معادلة هي في الحقيقة متطابقة.
2. **أوضِح** أي متطابقة تستعمل لإثبات $(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)=\sin^2\theta$.
3. **كن منظّمًا** انسخ المخطّط المقابل، ثم أكمله بكتابة المتطابقات الفيثاغورية.

المتطابقات الفيثاغورية

اعلم واحفظ

3-7 التمارين

تمارين موجّهة

انظر المثال 1 أثبت المتطابقة المثلثة.

1 $\sin\theta\frac{1}{\cos\theta}=\tan\theta$

2 $\frac{1}{\tan(-\theta)}=-\frac{1}{\tan\theta}$

3 $\cos^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)=\sin^2\theta$

انظر المثال 2 اكتب المقدار بدلالة $\cos\theta$ على أبسط صورة.

4 $\frac{1}{\sin\theta}\tan\theta$

5 $\left(1+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)(1-\sin^2\theta)$

6 $\sin^2\theta+\cos^2\theta+\tan^2\theta$

7 **فيزياء** استعمل المعادلة $mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$ لإيجاد زاوية الانزلاق لشبه مكعب من الزجاج موضوع على طاولة سطحها زجاجي، عندما تميل الطاولة ويبدأ المكعب بالانزلاق، علمًا بأنّ معامل الاحتكاك يساوي $\mu = 0.94$.

انظر المثال 3

تمارين وحلُّ مسائل

أثبت المتطابقة المثلّثية.

8 $\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta}$

9 $\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta} = 1 - \frac{1}{\tan\theta}$

10 $\tan\theta\sin\theta = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta$

11 $\frac{1}{\cos^2\theta}(1-\cos^2\theta) = \tan^2\theta$

اكتب المقدار بدلالة $\sin\theta$ على أبسط صورة.

12 $\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}$

13 $\tan^2\theta$

14 $\cos\theta\frac{1}{\tan\theta} + \sin\theta$

15 $\frac{\frac{1}{\cos^2\theta} - 1}{1+\tan^2\theta}$



16 **فيزياء** استعمل المعادلة $mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$ لإيجاد أعلى ميل ممكن لطريق يسمح لسيارة دواليبها من المطاط أن تقف من دون أن تنزلق.

خطوات متعددة اكتب كل مقدار مثلّثي بدلالة دالّة مثلثية واحدة.

17 $\frac{1}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

18 $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tan\theta$

19 $\cos\theta + \sin\theta\tan\theta$

20 $\sin\theta\frac{1}{\sin\theta} - \cos^2\theta$

21 $\cos^2\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\cos\theta}$

22 $\cos\theta(\tan^2\theta + 1)$

23 $\sin\theta\cos\theta\tan\theta$

24 $1 - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\tan\theta}$

25 $\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}$

26 $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}$

27 $\tan\theta\left(\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right)$

28 $\cos\theta\left(\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right)$

29 $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$

30 $\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \cos^2\theta\right)$

31 $\sin\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\right)$

تحقّق من كل متطابقة.

32 $\frac{\cos\theta - 1}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos^2\theta}$

33 $\sin^2\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - 1\right) = \cos^2\theta$

34 $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\cos\theta}$

35 $\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$

36 $\frac{1-\cos^2\theta}{\tan\theta} = \sin\theta\cos\theta$

37 $\frac{1}{\sin^2\theta(1+\tan^2\theta)} = \frac{1}{\tan^2\theta}$

تمارين حرّة

لحل التمارين	انظر المثال
11–8	1
15–12	2
16	3

أثبت المتطابقة الأساسية من دون استعمال أي متطابقة أساسية أخرى (استعمل النسب المثلّثية مع x ، y ، r).

38 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

39 $\frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

40 $1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$

41 $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

42 يُمكن اعتماد الدالة $y(t) = 5\sin t$ نموذجًا لحساب تمدُّد نابض تحت تأثير جسم معلَّق به، بدلالة الزمن t بالثواني. وتشكِّل الدالّة $z(t) = 2.6\cos t$ نموذجًا لحساب تمدُّد نابض آخر تحت تأثير جسم معلق به.

أ تم تعليق الجسمين بالنابضين في اللحظة نفسها $(t = 0)$. بعد كم ثانية يتساوى تمدُّد النابضين للمرة الأولى؟

ب كم كان التمدد في هذه اللحظة؟

ج في أي أوقات يتساوى تمدد النابضين؟

حاسبة بيانية **استعمل الحاسبة البيانية لتقرِّر ان كان كل مما يلي متطابقة أم لا.**

43 $\left(\frac{1}{\sin\theta} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin\theta} + 1\right) = \tan^2\theta$

44 $\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \sin\theta$

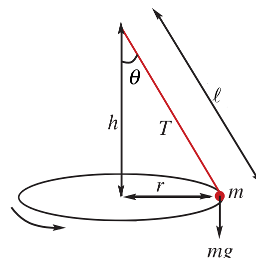
45 $\cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta\frac{1}{\sin^2\theta}\right) = \frac{1}{\sin^2\theta}$

46 $\frac{1}{\tan\theta}(\cos\theta + \sin\theta\tan\theta) = \frac{1}{\sin\theta}$

47 $\cos\theta = 0.99\cos\theta$

48 $\sin\theta\cos\theta = \tan\theta - \tan\theta\sin^2\theta$

49 **فيزياء** يتشكَّل البندول المخروطي عندما يتحرَّك بندول على دائرة عوضًا عن تحرُّكه من جهة إلى الجهة المقابلة، ويرسم في تحرُّكه مخروطًا قاعدته دائرة الحركة. يُمكن استعمال القانون $r = \frac{g\tan\theta}{\omega^2}$ لحساب نصف قطر قاعدة المخروط r ، حيث يرمز g إلى قوة الجاذبية ويرمز ω إلى السرعة الزاوية للبندول.



أ استعمل $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\theta}}$ والمتطابقات المثلّثية الأساسية لإعادة كتابة قانون حساب نصف القطر.

ب جد قاعدة لحساب ℓ بدلالة g وَ ω وَ دالّة مثلّثية واحدة.

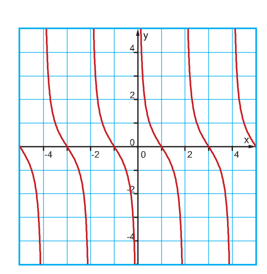
تفكير ناقد **تقول عن دالّة أنها فردية إذا كان $f(-x) = -f(x)$ ، وأنها زوجية إذا كان $f(-x) = f(x)$.**

50 صنّف الدوال المثلّثية الأساسية الثلاث بين فردية وزوجية.

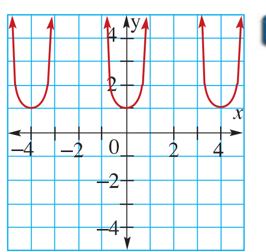
51 ما الذي يميّز بيان دالّة فردية عن بيان دالّة زوجية وبيانات غيرها من الدوالّ؟

حدّد إن كانت كل دالّة مما يلي فردية أو زوجية.

52



53



54 **تفكير ناقد** ما عدد الصور المتكافئة التي يُمكنك فيها أن تكتب $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$؟ اكتب ثلاثة منها على الأقل.



55 **اكتب** استعمل $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ وَ $\cos(-\theta) = \cos\theta$ لتستنتج $\tan(-\theta) = -\tan\theta$.



56 أي مقدار يكافىء المقدار المثلثي $\tan\theta$؟

(أ) $\sin\theta$ (ب) $\cos\theta$ (ج) $\frac{1}{\cos\theta}$ (د) $\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta$

57 أي مقدار لا يكافىء المقادير الثلاثة الأخرى ؟

(أ) $\frac{1}{\cos\theta}\,\frac{1}{\sin\theta}$ (ب) $\frac{1}{\cos^2\theta}\,\frac{1}{\tan\theta}$ (ج) $\frac{\tan\theta}{\sin^2\theta}$ (د) $\cos^2\theta\tan\theta$

58 أي جملة مثلّثية ليست متطابقة؟

(أ) $1+\cos^2\theta=\sin^2\theta$ (ب) $\frac{1}{\sin^2\theta}-1=\frac{1}{\tan^2\theta}$ (ج) $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ (د) $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$

59 أي مقدار يكافىء $1-\frac{1}{\cos^2\theta}$.

(أ) $\tan^2\theta$ (ب) $-\tan^2\theta$ (ج) $\frac{1}{\tan^2\theta}$ (د) $-\frac{1}{\tan^2\theta}$

60 **جواب مختصر** تحقّق من أن $\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}\sin\theta+\cos\theta$. اكتب تبريرًا لكل خطوة.

تحدٍّ وتوسّع

اكتب المقدار على صورة كسر وحيد.

61 $\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}$ **62** $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ **63** $1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ **64** $\frac{1}{1-\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$

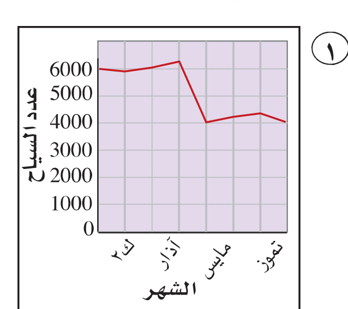
اكتب على أبسط صورة.

65 $\dfrac{\frac{1}{\sin^2\theta}-1}{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$ **66** $\dfrac{\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}}$ **67** $\dfrac{\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$ **68** $\dfrac{1-\frac{1}{\sin\theta}}{1-\frac{1}{\sin^2\theta}}$

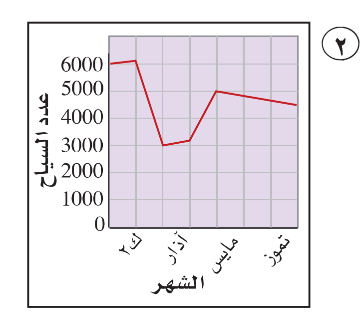
مراجعة لولبية

69 **سياحة** دوّن أحد الإحصائيين معطيات عن أعداد السياح الذين أمّوا جزيرة هاواي خلال 6 أشهر. اذكر الرسم البياني الذي يُعبِّر عن كل حالة. (الدرس 5–1)

(١)



(٢)



أ تنبّأت مصلحة الأرصاد الجوية بهبوب أعاصير في شهرَي آذار ونيسان.

ب أدى الارتفاع الشديد في درجات الحرارة خلال الصيف إلى إلغاء الكثير من الحجوز.

جِد كل احتمال. (الصفوف السابقة)

70 الحصول على 4 عند رمي حجر نرد، وعلى 4 أيضًا عند رمي حجر نرد آخر.

71 الحصول على الصورة مرتين عند رمي قطعة نقود معدنية مرتين.

جِد، لكل دالّة مثلّثية، 4 قيم للمتغيّر θ ، تجعل الدالّة غير معرّفة. (الدرس 7 –2)

72 $y=-\tan\theta$ **73** $y=\frac{1}{\cos(0.5\theta)}$ **74** $y=-\frac{1}{\sin\theta}$

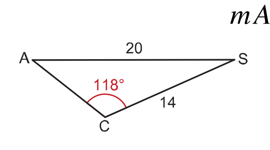
الفصل 7

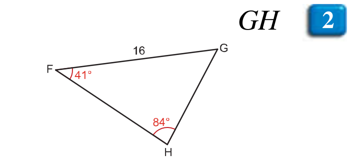


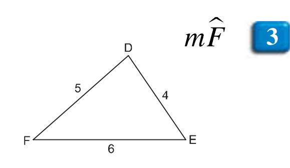
1-7 قانون الساين وقانون الكوساين

جِد كل قياس. قرّب الأطوال إلى أقرب عُشر وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

1 $m\hat{A}$ **2** GH **3** $m\hat{F}$



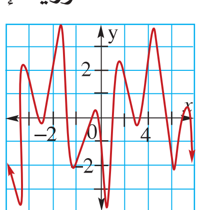




2-7 الدوال المثلّثية

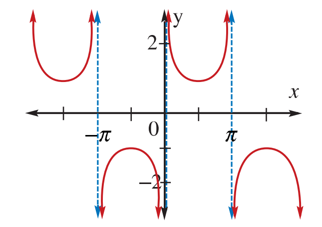
حدِّد إن كانت الدالة دورية. إذا كانت كذلك، جد زمنها الدوري.

4



5





استعمل بيانات الدوال المثلثية الأم لرسم بيان كل دالّة. حدِّد السعة والزمن الدوري.

6 $f(x)=\sin 4x$ **7** $g(x)=-3\sin x$ **8** $h(x)=0.25\sin \pi x$

استعمل بيانات الدوال المثلثية الأم لرسم بيان كل دالّة. حدّد التقاطعات الأفقية وانحراف الطور.

9 $f(x)=\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$ **10** $g(x)=\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$ **11** $f(x)=\cos\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)$

استعمل بيانات الدوال المثلّثية الأم لرسم بيان كل دالة. حدد التقاطعات الأفقية والمقاربات.

12 $f(x)=\frac{1}{2}\tan 4x$ **13** $f(x)=-2\tan \frac{1}{2}x$ **14** $f(x)=\tan \frac{1}{2}\pi x$

3-7 المتطابقات المثلّثية الأساسية

اثبت المتطابقة المثلّثية.

15 $\sin^2\theta \frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta}=\tan\theta$ **16** $\sin(-\theta)\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\tan\theta}=-1$ **17** $\dfrac{\frac{1}{\tan^2\theta}-1}{\frac{1}{\tan^2\theta}+1}=1-2\sin^2\theta$

اكتب المقدار باستعمال نسبة مثلّثية واحدة.

18 $\frac{1}{\tan\theta}\frac{1}{\cos\theta}$ **19** $\frac{1}{\cos(-\theta)}$ **20** $\dfrac{\frac{1}{\sin^2\theta}}{\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}}$

4-7 متطابقات المجموع والفرق

Sum and Difference Identities



الأهداف

يستعمل متطابقات المجموع والفرق لحساب قيم المقادير المثلّثية.

يستعمل مصفوفة الدوران ومتطابقات المجموع والفرق لإجراء دورانات.

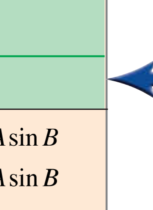
المفردات
Vocabulary

مصفوفة الدوران
Rotation Matrix

لماذا تتعلّم هذا الأمر؟

يُمكنك استعمال متطابقات المجموع والفرق بالإضافة إلى ضرب المصفوفات لإيجاد صورة شكل بدوران. (مثال 4).

يُشكل ضرب المصفوفات ومتطابقات المجموع والفرق أدوات لتحديد إحداثيات صور النقاط بدوران حول نقطة الأصل في المستوي الإحداثي.



متطابقات المجموع والفرق	
متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$	$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$
$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$	$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$
$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$	$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

مثـــال 1 حساب قيمة مقدار مثلثي باستعمال متطابقات المجموع والفرق

جِد القيمة المضبوطة لكل مقدار.

أ $\sin 75^\circ$

$\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)$ اكتب $75^\circ=30^\circ+45^\circ$ لأن النسب المثلثية للزاويتين 30° و 45° معروفة.

$=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ$ استعمل متطابقة ساين المجموع $\sin(A+B)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ عوّض.

$=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ بسّط.

ب $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)$ اكتب $-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}$

$=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$ استعمل متطابقة $\cos(A+B)$.

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ عوّض.

$=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ بسّط.

إضـاءة

هناك عدة طرق لكتابة $-\frac{\pi}{12}$. مثلاً: $\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)$ أو $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$



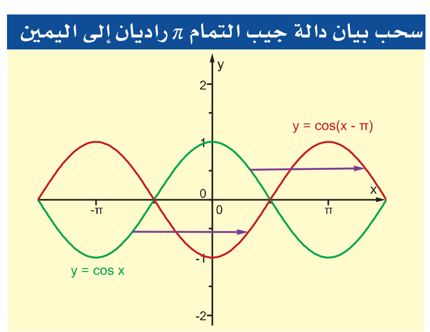
1. جِد القيمة المضبوطة لكل مقدار.

أ $\tan 150^\circ$ **ب** $\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)$

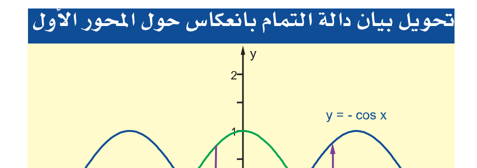


أن تسحب بيان دالة كوساين π راديان إلى اليمين يعادل أن تُحوّله بانعكاس حول المحور الأول.

سحب بيان دالة جيب التمام π راديان إلى اليمين



تحويل بيان دالة التمام بانعكاس حول المحور الأول

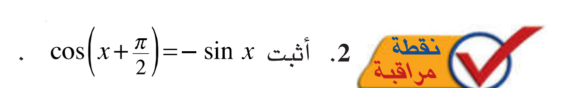


سوف تثبت هذا الأمر في المثال 2 باستعمال متطابقات الفرق.

مثال 2 إثبات متطابقة مثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

أثبت $\cos(x-\pi) = -\cos x$.

$\cos(x-n) =$	اختر الطرف الأيسر لتغيره.
$\cos x \cos\pi + \sin x \sin\pi =$	استعمل متطابقة $\cos(A-B)$.
$\cos x(-1) + \sin x(0) =$	عوّض.
$-\cos x = -\cos x$	بسّط.



2. أثبت $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

مثال 3 استعمال مبرهنة فيثاغوروس مع متطابقات المجموع والفرق

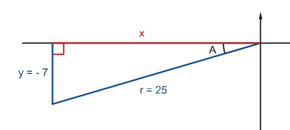
جِد قيمة المقدار $\tan(A+B)$ علمًا بأن $\sin A = -\frac{7}{25}$ وَ $180^\circ < A < 270^\circ$ وأن $\cos B = \frac{8}{17}$ وَ $0^\circ < B < 180^\circ$.

الخطوة 1 جِد $\tan A$ وَ $\tan B$.

استعمل الزاوية المرجعية وتعريف النسب المثلثيتين $\sin A = \frac{y}{r}$ و $\cos B = \frac{x}{r}$.

ارسم لكل زاوية مثلثًا قائمًا في الربع المناسب وعنون x وَ y وَ r .

في الربع الثالث، $180^\circ < A < 270^\circ$ وَ $\sin A = -\frac{7}{25}$.

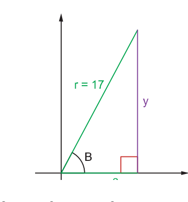


$x^2 + (-7)^2 = 25^2$

$x = -\sqrt{625-49} = -24$

إذن، $\tan A = \frac{y}{x} = \frac{7}{24}$

في الربع الأول، $0^\circ < B < 180^\circ$ وَ $\cos B = \frac{8}{17}$.



$8^2 + y^2 = 17^2$

$y = \sqrt{259-64} = 15$

إذن، $\tan B = \frac{y}{x} = \frac{15}{8}$

تذكّر

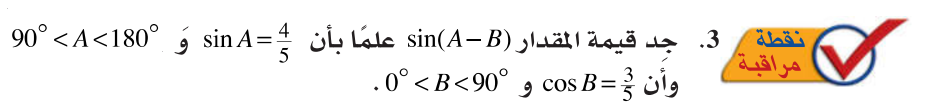
الزاوية المرجعية لزاوية θ هي الزاوية الحادة الموجبة التي يُشكلها الضلع النهائي للزاوية θ مع المحور الأول.

الخطوة 2 استعمل متطابقة المجموع.

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$ متطابقة تانجانت المجموع.

$$=\frac{\frac{7}{24}+\frac{15}{8}}{1-\frac{7}{24}\cdot\frac{15}{8}}$$ عوّض.

$$\tan(A+B)=\frac{\frac{52}{24}}{1-\frac{35}{64}}=\frac{416}{87}$$ بسّط.



نقطة مراقبة

3. جِد قيمة المقدار $\sin(A-B)$ علمًا بأن $\sin A=\frac{4}{5}$ وَ $90^\circ<A<180^\circ$ وأن $\cos B=\frac{3}{5}$ و $0^\circ<B<90^\circ$.

لكي تحصل على صورة نقطة $P(x, y)$ بدورانٍ زاويته θ حول نقطة الأصل، استعمل **مصفوفة الدوران**.

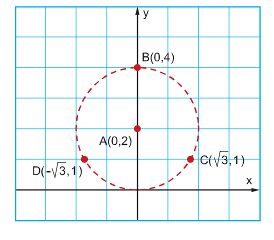


استعمال مصفوفة الدوران

الدوران حول نقطة الأصل بزاوية θ، يحوِّل كل نقطة $P(x, y)$ إلى النقطة $P'(x', y')$، وفق المعادلة:

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$$

مثــــال 4 استعمال مصفوفة الدوران

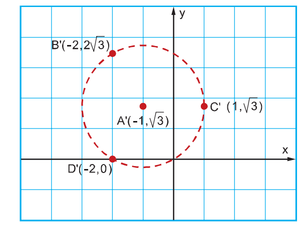


جِد إحداثيات صور النقاط التي يُبيّنها الشكل المقابل بدوران زاويته 30° حول نقطة الأصل.

الخطوة 1 اكتب مصفوفة الدوران R_{30} ومصفوفة النقاط S.

$$S=\begin{bmatrix}0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ 2 & 4 & 1 & 1\end{bmatrix}،\ R_{30}=\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ\\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{bmatrix}$$

الخطوة 2 اضرب المصفوفتين.



$$R_{30}xS=\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ\\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ 2 & 4 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1 & -2\\ \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0\end{bmatrix}$$

إحداثيات النقاط – الصور، هي كما يلي $A'\left(-1, \sqrt{3}\right)$ $B'\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$ ، $C'\left(1, \sqrt{3}\right)$، $D'(-2, 0)$.



4. جِد إحداثيات النقاط – الصور إذا كانت زاوية الدوران 60° .

فكر وناقش

1. **صف** 3 طرق مختلفة يُمكنك أن تستعمل فيها متطابقات الفرق لإيجاد $\sin 15^\circ$.
2. **أوضح** نقاط التشابه والتباين بين متطابقات الساين ومتطابقات الكوساين. كيف ترتبط إشارات الحدود بكون المتطابقة متطابقة مجموع أو متطابقة فرق.
3. **كن منظّمًا** انسخ المخطَّط أدناه ثم أكمله. اكتب لكل دالّة متطابقتي المجموع والفرق مع أمثلة.

tan

متطابقات المجموع والفرق

cos | sin



4-7 التمارين

تمارين موجّهة

1 يتطلب تعريف الدوران تحديد مركزه، وهو النقطة التي يتم الدوران حولها، وزاوايته واتجاهه. عند استعمال مصفوفة الدوران، ما مركز الدوران المفترض؟ وما اتجاهه المفترض؟

انظر المثال 1

جِد القيمة المضبوطة للمقدار.

2 $\cos 105^\circ$ **3** $\sin \frac{11\pi}{12}$ **4** $\tan \frac{\pi}{12}$ **5** $\cos(-75^\circ)$

انظر المثال 2

أثبت المتطابقة.

6 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ **7** $\tan(\pi+x)=\tan x$ **8** $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x$

انظر المثال 3

جِد قيمة المقدار، علمًا بأن $\sin A=\frac{-12}{13}$ وَ $180^\circ < A < 270^\circ$، وأن $\cos B=-\frac{4}{5}$ وَ $90^\circ < B < 180^\circ$.

9 $\sin(A+B)$ **10** $\cos(A-B)$ **11** $\tan(A+B)$ **12** $\tan(A-B)$

انظر المثال 4

13 جِد إحداثيات رؤوس صورة المثلث ABC ، حيث $A(0, 2)$ ، $B(0, -1)$ ، $C(3, 0)$ بدوران زاويته 120° ومركزه نقطة الأصل. قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

تمارين وحلّ مسائل

تمارين حرّة

لحل التمارين	انظر المثال
17–14	1
20–18	2
24–21	3
25	4

جِد القيمة المضبوطة لكل مقدار.

14 $\sin \frac{7\pi}{12}$ **15** $\tan 165^\circ$ **16** $\sin 195^\circ$ **17** $\cos \frac{11\pi}{12}$

أثبت المتطابقة.

18 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$ **19** $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$ **20** $\tan(x-2\pi)=\tan x$

جِد قيمة المقدار، علمًا بأن $\cos A = -\frac{12}{13}$ وَ $90^\circ < A < 180^\circ$، وأن $\sin B = -\frac{4}{5}$ وَ $270^\circ < B < 360^\circ$.

21 $\sin(A+B)$ **22** $\tan(A-B)$ **23** $\cos(A+B)$ **24** $\cos(A-B)$

25 جِد إحداثيات رؤوس صورة المثلث ABC ، حيث $A(0, 2)$ ، $B(1, 2)$ ، $C(0, 1)$ بدوران زاويته 45° ومركزه نقطة الأصل. قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

جِد القيمة المضبوطة للمقدار.

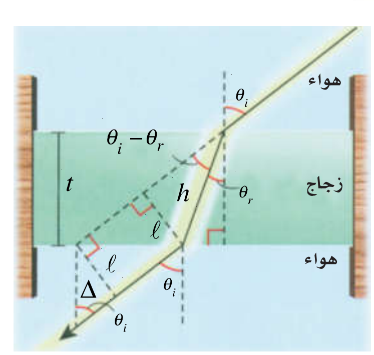
26 $\sin 165^\circ$ **27** $\tan(-105^\circ)$ **28** $\sin(-15^\circ)$ **29** $\cos \frac{19\pi}{12}$

30 $\tan \frac{5\pi}{12}$ **31** $\sin 255^\circ$ **32** $\tan 195^\circ$ **33** $\cos \frac{\pi}{12}$

جِد قيمة θ علمًا بأن $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$.

34 $\cos(\theta - 30^\circ) = \frac{1}{2}$ **35** $\cos(\theta + 20^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **36** $\sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}$

37 **فيزياء** يعبر الضوء الزجاج بزاوية θ_i ويخرج منه وفق الزاوية نفسها. إلا أن شعاع الضوء الخارج من الزجاج ينسحب من الشعاع الداخل بمسافة $\Delta = \left(\frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin\theta_i \cos\theta_r}\right)t$ كما في الرسم.



أ) اكتب المقدار Δ باستعمال النسبة المثلثية tan فقط، مستعملاً المتطابقات المثلثية.

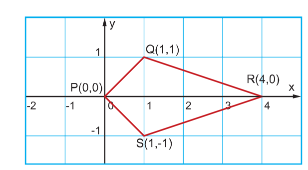
ب) استعمل الشكل المقابل لكتابة $\sin(\theta_i - \theta_r)$ بدلالة ℓ وَ h.

خطوات متعدّدة جِد قيمة كل من $\tan(A+B)$ وَ $\cos(A+B)$ وَ $\sin(A-B)$ في كل حالة.

38 $\sin A = -\frac{7}{25}$ وَ $180^\circ < A < 270^\circ$ ؛ $\cos B = \frac{12}{13}$ وَ $0^\circ < B < 90^\circ$.

39 $\sin A = -\frac{1}{3}$ وَ $270^\circ < A < 360^\circ$ ؛ $\sin B = \frac{4}{5}$ وَ $0^\circ < B < 90^\circ$.

40 سيتم تحويل الرباعي $PQRS$ عدة مرات لتشكيل شعار لمنتج جديد.



أ) اكتب مصفوفات الدوران حول نقطة الأصل لدورانات زواياها 90° وَ 180° وَ 270° على التوالي.

ب) استعمل المصفوفات لتحديد إحداثيات صورة الرباعي بكل من هذه الدورانات.

ج) ارسم، في المستوي الإحداثي نفسه، صور الرباعي بكل من الدورانات الثلاثة.

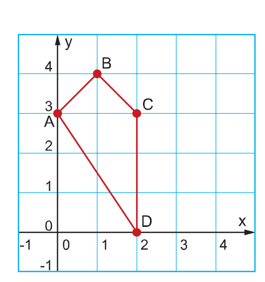
41 **تفكير ناقد** هل تستطيع إيجاد القيمة المضبوطة لـ $\sin\frac{11\pi}{24}$ باستعمال متطابقات المجموع أو الفرق؟ أوضح ذلك.

42 تُستعمل الدالّة $y(t) = 4.2\sin\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{2}\right)$ لإيجاد تمدُّد نابض تحت تأثير جسم معلّق به بدلالة الزمن مقيسًا بالثانية.

أ) ما سعة هذه الدالّة وما زمنها الدوري؟

ب) استعمل المتطابقات المثلثية لكتابة هذه الدالّة باستعمال كوساين فقط.

ج) ما التمدد بعد 8 ثوان؟



هندسة جِد إحداثيات رؤوس صورة الرباعي $ABCD$ ، حيث $A(0, 3)$ ، $B(1, 4)$ ، $C(2, 3)$ ، $D(2, 0)$ ، بكل دوران زاويته θ ومركزه نقطة الأصل. قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

43 $\theta = 45^\circ$ **44** $\theta = 60^\circ$ **45** $\theta = 120^\circ$ **46** $\theta = -30^\circ$

47 **اكتب** هل $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$؟ أعط مثالاً يدعم جوابك.



48 أي مما يلي هو قيمة المقدار المثلثي $\cos 15^\circ \cos 45^\circ - \sin 15^\circ \sin 45^\circ$؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ج) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (د) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

49 أي مما يلي هو قيمة x إذا كان $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \frac{1}{2}$؟

(أ) $\frac{\pi}{6}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ (ج) $\frac{\pi}{3}$ (د) $\frac{\pi}{2}$

50 جِد قيمة $\cos(A-B)$ علمًا بأن $\sin A = \frac{1}{2}$ وَ $0^\circ < A < 90^\circ$ وأنّ $\cos B = \frac{3}{5}$ وَ $0^\circ < B < 90^\circ$.

(أ) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$ (ب) $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$ (ج) $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ (د) $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$

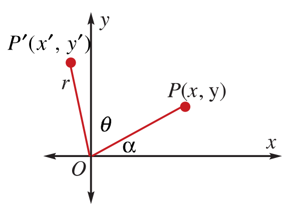
51 **جواب مختصر** جِد قيمة $\sin(-15^\circ)$ المضبوطة. بيّن خطواتك.

تحدٍّ وتوسّع

52 تحقق من أن مقلوب مصفوفة الدوران بزاوية θ هو مصفوفة الدوران بزاوية $-\theta$.

53 اثبت مبرهنة تانجانات المجموع $\tan(A+B)$.

54 بيِّن كيف تحصل على مصفوفة الدوران باستعمال متطابقات ساين المجموع وكوساين المجموع. تذكر من الصف العاشر أنك تستطيع كتابة كل نقطة $P(x, y)$ على صورة $P(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ باستعمال زاوية مرجعية.



جِد زاوية الدوران حول نقطة الأصل التي تحوّل المثلث ABC ، حيث $A(1,0)$ وَ $B(0,2)$ وَ $C(-1,0)$ إلى المثلث $A'B'C'$.

55 $A'(0, 1)$ ، $B'(-2, 0)$ ، $C'(0, -1)$

56 $A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ، $B'(-\sqrt{2}, 2)$ ، $C'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

57 $A'(-1, 0)$ ، $B'(0, -2)$ ، $C'(1, 0)$

58 $A'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ، $B'(-1, \sqrt{3})$ ، $C'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

مراجعة لولبية

اقسم مفترضًا أن جميع المقادير معرّفة. (الصفوف السابقة)

59 $\frac{3x^2}{7y^3} \div \frac{6x}{21y}$

60 $\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-8} \div \frac{x^2+3x+2}{x^2-3x-4}$

61 $\frac{9x^3y^2}{15xy^4} \div \frac{6x^4y}{3x^2y^5}$

اكتب المقدار باستعمال نسبة مثلّثية واحدة. (الدرس 7–3)

62 $\dfrac{\frac{1}{\tan\theta} \times \frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

63 $\frac{1}{\tan\theta}\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$

64 $\cos\theta \sin\theta \tan\theta$



5–7 متطابقات الضعف والنصف
Double-Angle and Half-Angle Identities

الأهداف

يستعمل متطابقات الضعف والنصف لحساب قيم المقادير المثلثية وكتابتها على أبسط صورة.

لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

يُمكنك استعمال متطابقة الضعف لحساب المسافة الأفقية لقذيفة مثل كرة الغولف. (تمرين 94)

يُمكنك استعمال متطابقات الجمع للوصول إلى متطابقات الضعف. مثلاً:

$$\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta)$$
$$= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$$
$$= 2\sin\theta\cos\theta$$

يُمكنك الوصول إلى متطابقات كوساين الضعف وتانجانت الضعف بالطريقة نفسها. لمتطابقة كوساين الضعف ثلاث صور يُمكن الوصول إليها باستعمال متطابقة كوساين المجموع والمتطابقة $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$. من الشائع كتابة المقادير المثلثية بدلالة θ.



متطابقات الضعف		
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$	$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

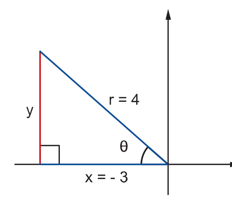
مثـــال 1 حساب قيمة مقدار مثلّثي باستعمال متطابقات الضعف

جِد القيمة المضبوطة لـ $\sin 2\theta$ وَ $\cos 2\theta$ علمًا بأن $\cos\theta = -\frac{3}{4}$ وَ $90° < \theta < 180°$.

الخطوة 1 جِد $\sin\theta$ لتجد قيمة $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.

طريقة أولى استعمل الزاوية المرجعية.

في الربع الثاني، $90° < \theta < 180°$، وَ $\cos\theta = -\frac{3}{4}$



$(-3)^2 + y^2 = 4^2$ مبرهنة فيثاغورس.

$y = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$ احسب y.

$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ خذ الجذر الموجب.

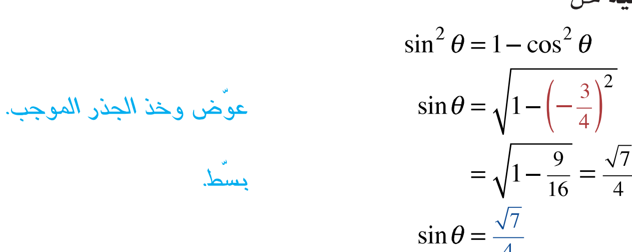
طريقة ثانية حُلّ

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\sin\theta = \sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}$ عوّض وخذ الجذر الموجب.

$= \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ بسّط.

$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$



انتبـــه!

تتحدد إشارة كل من x وَ y تبعًا لوقوع الضلع النهائي لـ θ في الوضع المثالي.

الربع	sin	cos
الأول ←	+	+
الثاني ←	+	−
الثالث ←	−	−
الرابع ←	−	+

الخطوة 2 جِد قيمة $\sin 2\theta$.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ متطابقة ساين الضعف.

$\sin 2\theta = 2\frac{\sqrt{7}}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)$ عوّض.

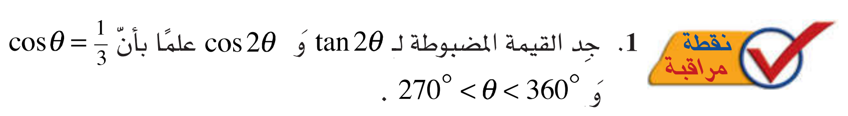
$= -\frac{3\sqrt{7}}{8}$ بسّط.

الخطوة 3 جِد قيمة $\cos 2\theta$.

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ متطابقة كوساين الضعف.

$\cos 2\theta = 2\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$

نقطة مراقبة



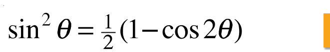
1. جِد القيمة المضبوطة لـ $\tan 2\theta$ وَ $\cos 2\theta$ علمًا بأنّ $\cos\theta = \frac{1}{3}$ وَ $270^\circ < \theta < 360^\circ$.

يُمكنك استعمال متطابقات الضعف لإثبات متطابقات مثلّثية.

مثـــال 2 إثبات المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات الضعف

أثبت المتطابقة.

أ $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$



$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ اختر الطرف الأيمن لتغييره.

$= \frac{1}{2}(1-(1-2\sin^2\theta))$ استعمل متطابقة كوساين الضعف.

$= \frac{1}{2}(2\sin^2\theta)$ بسّط.

$\sin^2\theta = \sin^2\theta$

ب $(\cos\theta+\sin\theta)^2 = 1+\sin 2\theta$ اختر الطرف الأيسر لتغييره.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta =$ انشر المربع الكامل.

$(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + (2\cos\theta\sin\theta) =$ جمّع.

$1+\sin 2\theta$ استعمل متطابقة ساين الضعف

$1+\sin 2\theta = 1+\sin 2\theta$ والمتطابقة الفيثاغورية.

إضـــاءة

اختر طرفًا واحدًا لتغييره وليس الطرفين معًا.

نقطة مراقبة

2. أثبت المتطابقة.

أ $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos 2\theta$ ب $\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

يُمكنك استعمال متطابقة كوساين الضعف للوصول إلى متطابقات النصف، باستعمال $\frac{\theta}{2}$ عوضًا عن θ .

برهنت في المثال 2 أن $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$. كذلك يمكنك أن تستعمل $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ لتبرهن أن $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$. إذا عوّضت عن θ بِـ $\frac{\theta}{2}$ تحصل على متطابقات النصف:





متطابقات النصف		
$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$	$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

يتم تحديد الإشارة وفقًا لموقع الضلع النهائي لـ $\frac{\theta}{2}$ في الوضع المثالي.

تساعد متطابقات النصف على حساب القيم المضبوطة لكل مقدار.

مثـــال 3 حساب قيم المقادير المثلّثية باستعمال متطابقات النصف

استعمل متطابقات النصف لإيجاد القيمة المضبوطة للمقدار.

أ $\cos 165^\circ$

$\cos\frac{330^\circ}{2}$

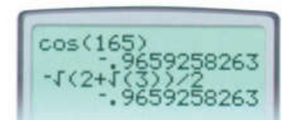
$-\sqrt{\frac{1+\cos 330^\circ}{2}}$ سالب لأن 165° في الربع الثاني.

$-\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}}$

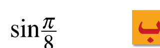
$-\sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$ $\cos 330^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ بسّط.

تحقَّق باستعمال الحاسبة

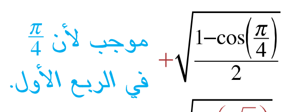


ب $\sin\frac{\pi}{8}$



$\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$+\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}$ موجب لأن $\frac{\pi}{4}$ في الربع الأول.



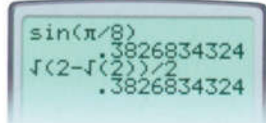
$\sqrt{\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}}$

$\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$ $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$



تحقَّق باستعمال الحاسبة





3. استعمل متطابقات النصف لإيجاد القيمة المضبوطة للمقدار.

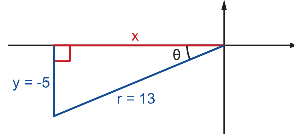
أ $\tan 75^\circ$ **ب** $\cos\frac{5\pi}{8}$

مثـــال 4 استعمال مبرهنة فيثاغورس مع متطابقات النصف

جِد قيمة $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\tan\frac{\theta}{2}$ **علمًا بأنّ** $\sin\theta=-\frac{5}{13}$ و $180^\circ<\theta<270^\circ$.



الخطوة 1 جِد $\cos\theta$ لكي تستعمل متطابقات النصف.



استعمل الزاوية المرجعية.

في الربع الثالث، $180^\circ<\theta<270^\circ$ و $\sin\theta=-\frac{5}{13}$

$x^2+(-5)^2=13^2$ مبرهنة فيثاغورس.

$x=-\sqrt{169-25}=-12$ احسب قيمة x.

إذن $\cos\theta=-\frac{12}{13}$

الخطوة 2 احسب قيمة $\sin\frac{\theta}{2}$.

$\sin\frac{\theta}{2}$

$+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ $\sin\frac{\theta}{2}$ موجب لأن $90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$

$\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{12}{13}\right)}{2}}$ عوّض.

$\sqrt{\left(\frac{25}{13}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$ بسّط.

$\sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$ بسط

الخطوة 3 احسب قيمة $\tan\frac{\theta}{2}$.

$\tan\frac{\theta}{2}$

$-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ $\tan\frac{\theta}{2}$ سالب لأن $90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$

$-\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{12}{13}\right)}{1+\left(-\frac{12}{13}\right)}}$ عوّض.

$-\sqrt{\left(\frac{25}{13}\right)\left(\frac{13}{1}\right)}$ بسّط.

$-\sqrt{25}$

-5

انتبه!

كن دقيقًا في تحديد إشارة كل من $\sin\frac{\theta}{2}$ وَ $\cos\frac{\theta}{2}$.
إذا كان $180^\circ < \theta < 270^\circ$
فإنّ $90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$.



4. جِد قيمة $\sin\frac{\theta}{2}$ وَ $\cos\frac{\theta}{2}$ علمًا بأن $\tan\theta = \frac{4}{3}$ وَ $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

فكِّر وناقش

1. **اوضح** أي متطابقة ضعف تستعمل لتبسيط $\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$.
2. **صِف** كيف تحدِّد إشارة $\sin\frac{\theta}{2}$ وإشارة $\cos\frac{\theta}{2}$.
3. **كن منظّمًا** انسخ المخطط أدناه ثم أكمله. اكتب في كل إطار متطابقة.



متطابقات كوساين الضعف

5–7 التمارين

تمارين موجّهة

جِد قيم $\sin 2\theta$ وَ $\cos 2\theta$ وَ $\tan 2\theta$.



1 $\cos\theta = -\frac{5}{13}$ ؛ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

2 $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ؛ $0^\circ < \theta < 90^\circ$

أثبت المتطابقة.

انظر المثال 2

3 $2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$

4 $\sin^2\theta = 1 - \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$

5 $\frac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$

6 $\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

جِد قيمة المقدار باستعمال متطابقات النصف.

انظر المثال 3



7 $\cos 67.5^\circ$

8 $\cos\frac{\pi}{12}$

9 $\tan\frac{3\pi}{8}$

10 $\sin 112.5^\circ$

جِد قيم $\sin\frac{\theta}{2}$ وَ $\cos\frac{\theta}{2}$ و $\tan\frac{\theta}{2}$.



11 $\sin\theta = -\frac{24}{25}$ ؛ $180^\circ < \theta < 270^\circ$

12 $\cos\theta = \frac{1}{4}$ ؛ $270^\circ < \theta < 360^\circ$

تمارين وحلُّ مسائل

جِد قيم $\sin 2\theta$ وَ $\cos 2\theta$ وَ $\tan 2\theta$.

13 $\cos\theta = -\frac{7}{25}$ ؛ $90^\circ < \theta < 180^\circ$

14 $\tan\theta = \frac{20}{21}$ ؛ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

أثبت متطابقة.

15 $\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$

16 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$

17 $\tan\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

18 $\tan\theta = \frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

جِد قيمة المقدار باستعمال متطابقات النصف.

19 $\sin\frac{7\pi}{12}$

20 $\cos\frac{5\pi}{12}$

21 $\sin 22.5^\circ$

22 $\tan 15^\circ$

جِد قيم $\sin\frac{\theta}{2}$ وَ $\cos\frac{\theta}{2}$ و $\tan\frac{\theta}{2}$.

23 $\tan\theta = -\frac{12}{35}$ ؛ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

24 $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ ؛ $180^\circ < \theta < 270^\circ$

خطوات متعددة اكتب المقدار على أبسط صورة، باستعمال النسب المثلثية لـ θ عوضًا عن مضاعفات θ .

25 $\sin 3\theta$

26 $\sin 4\theta$

27 $\cos 3\theta$

28 $\cos 4\theta$

29 $\cos 2\theta + 2\sin^2\theta$

30 $\cos 2\theta + 1$

31 $\tan 2\theta\left(2 - \frac{1}{\cos^2\theta}\right)$

32 $\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$

33 $\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

34 $\frac{\cos 2\theta - 1}{\sin^2\theta}$

تمارين حرة

لحل التمارين	انظر المثال
14-13	1
18-15	2
22-19	3
24-23	4

35 تُشكّل الدالّة $y(t)=3.1\sin 2t$ نموذجًا لقياس تمدُّد نابض تحت تأثير جسم معلّق به بدلالة الزمن t مقيسًا بالثواني.

أ) اكتب هذه الدالّة بدلالة النسب المثلثية لـ t بدلاً من $2t$ باستعمال متطابقات الضعف.

ب) تُشكّل الدالّة $w(t)=3.8\cos t$ نموذجًا لقياس تمدُّد نابض آخر تحت تأثير جسم معلّق به. تم تعليق الجسمين بالنابضين في اللحظة نفسها $t=0$. متى يتساوى تمدُّد النابضين للمرة الأولى؟

ج) كم يبلغ التمدُّد عند هذه اللحظة؟

خطوات متعددة جِد قيم $\sin 2\theta$ وَ $\cos 2\theta$ وَ $\tan 2\theta$ وَ $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ وَ $\tan\frac{\theta}{2}$.

36 $\cos\theta=-\frac{3}{8}$، $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

37 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ ؛ $180^\circ<\theta<270^\circ$

38 $\sin\theta=\frac{2}{5}$ ؛ $0^\circ<\theta<90^\circ$

39 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$ ؛ $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$

جِد القيمة المضبوطة للمقدار باستعمال متطابقات النصف.

40 $\cos\frac{7\pi}{8}$

41 $\sin\frac{11\pi}{12}$

42 $\cos 105^\circ$

43 $\sin(-15^\circ)$

44 $\cos(-135)$

اثبت المتطابقة.

45 $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{\sin^2\theta}{2(1-\cos\theta)}$

46 $\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

47 $\frac{\tan\theta+\sin\theta}{2\tan\theta}=\cos^2\frac{\theta}{2}$

48 **حاسبة بيانية** ارسم بيان $y=\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{\sin 2x}$ لتكتشف متطابقة مثلثية. أثبت هذه المتطابقة جبريًّا.

49 **خطوات متعددة** قُذفت كرة مضرب بسرعة أصلية v_0 قدم في الثانية، وفق زاوية ارتفاع θ. تُستعمل الدالّة $d(\theta)=\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{16}$ لحساب المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة.

أ) اكتب الدالة السابقة باستعمال النسب المثلثية لـ 2θ .

ب) احسب المسافة الأفقية التي تقطعها كرة مضرب قُذفت بسرعة أصلية مقدارها 80 قدمًا في الثانية وبزوايا الارتفاع التالية: 15° ، 30° ، 45° ، 60° ، 75° .

ج) اذا كانت السرعة الأصلية ثابتة، فأي زاوية تؤمّن أكبر مسافة أفقية؟

د) **ماذا لو ... ؟** لو أن السرعة الأصلية كانت 80 قدمًا في الثانية، فبين أي زاويتين يجب أن تكون زاوية الارتفاع لكي لا تقل المسافة الأفقية المقطوعة عن 175 قدمًا؟

50 **تفكير ناقد** أوضح كيف تجد القيمة المضبوطة لـ $\sin 7.5^\circ$.



51 **اكتب** كيف تعرف متى تستعمل متطابقات الضعف، ومتى تستعمل متطابقات النصف؟



52 ما قيمة $\sin 2\theta$ إذا كان $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ وَ $90^\circ < \theta < 180^\circ$؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ج) 1 (د) -1

53 ما قيمة $\cos 2\theta$ إذا كان $\cos\theta = \sin\theta$؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) $2\sin^2\theta$ (د) $2\cos^2\theta$

54 ما قيمة $\sin\frac{\theta}{2}$ علمًا بأن $\cos\theta = -\frac{12}{13}$ وَ $90^\circ < \theta < 180^\circ$؟

(أ) $\frac{\sqrt{26}}{26}$ (ب) $-\frac{\sqrt{26}}{26}$ (ج) $\frac{5\sqrt{26}}{26}$ (د) $-\frac{5\sqrt{26}}{26}$

55 ما القيمة المضبوطة لـ $\sin 157.5^\circ$؟

(أ) $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (ج) $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (د) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

56 **جواب مختصر** تحقَّق من صحة $\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \cos\theta - \sin\theta$ حيث $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

تحدٍّ وتوسّع

57 استخلص متطابقة النصف لـ $\tan 2\theta$، باستعمال متطابقة التانجانت ومتطابقتي الضعف للساين والكوساين.

58 استخلص متطابقة النصف لـ $\tan\frac{\theta}{2}$ باستعمال متطابقة التانجانت ومتطابقتي النصف للساين والكوساين.

استعمل متطابقات النصف لإيجاد القيمة المضبوطة للمقدار.

59 $\tan 7.5^\circ$ **60** $\tan\frac{\pi}{16}$ **61** $\sin\frac{\pi}{24}$ **62** $\cos 11.25^\circ$

63 **اكتب** جد قيم θ التي تحقِّق $\sin 2\theta = 2\sin\theta$. أوضح الأمر باستعمال الرسم البياني أوّلاً، ثم بحل المعادلة.

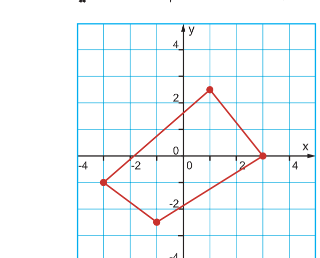
64 استعمل متطابقات المجموع والفرق لاستخلاص المتطابقتين.

$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$ وَ $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

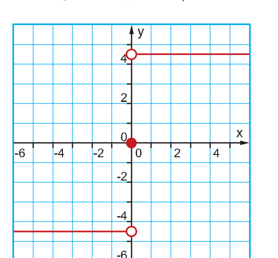
مراجعة لولبية

استعمل اختبار المستقيم العمودي لتحدِّد إن كانت العلاقة دالة أم لا. (الصفوف السابقة)

65



66



اجمع أو اطرح. حدِّد قيم x التي تجعل المقدار غير معرّف. (الصفوف السابقة)

67 $\frac{3x-2}{x+7} + \frac{2x+14}{x+7}$ **68** $\frac{4x-1}{x} + \frac{6x-2}{2x}$ **69** $\frac{7x+4}{x+1} - \frac{5x+8}{x-3}$ **70** $\frac{x+9}{x^2} - \frac{x}{x+2}$

جِد القيمة المضبوطة للمقدار. (الدرس 7–4)

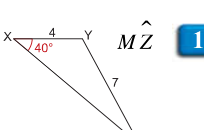
71 $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ **72** $\sin 105^\circ$ **73** $\cos\frac{7\pi}{12}$ **74** $\cos 255^\circ$

الفصل 7

دليل الدراسة : مراجعة

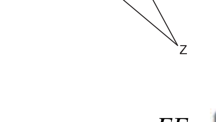
جد كل قياس. قرّب الطول إلى أقرب عُشر وقياس الزاوية إلى أقرب درجة.

1 $M\hat{Z}$

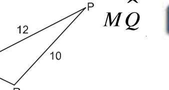


2 MN

3 EF



4 $M\hat{Q}$



استعمل بيانات الدوال المثلثية الأم لرسم بيان الدالّة. حدّد السعة والزمن الدوري.

5 $f(x)=\cos 3x$

6 $g(x)=\cos \frac{1}{2}x$

7 $f(x)=-\frac{1}{3}\sin 3x$

8 $f(x)=2\sin \pi x$

9 $h(x)=\frac{1}{2}\cos 2x$

10 $g(x)=\frac{\pi}{2}\sin \pi x$

استعمل بيانات الدوال المثلثية الأم لرسم بيان الدالّة. حدّد التقاطعات الأفقية وانحراف الطور.

11 $f(x)=\cos(x+\pi)$

12 $g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

13 $h(x)=\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$

14 $f(x)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$

أحياء في عملية البناء الضوئي، تُحوّل النباتات ثاني أوكسيد الكاربون CO_2 والماء إلى سكّر وأوكسجين. تُدرس هذه العملية بقياس كمية الكاربون C ، التي تمتصُّها النبتة مقيسة بالمايكرومول (Micromole) في المتر المربع في الثانية. تشكّل الدالّة $C(t)=1.2\sin\frac{\pi}{12}(t-6)+7$ نموذجًا لقياس هذه الكمية بدلالة الزمن t بالساعات.

15 ارسم بيان الدالّة على مدى دورتين.

16 ما الزمن الدوري لهذه الدالّة؟

17 ما القيمة العظمى لهذه الدالّة ومتى تتحقّق؟

استعمل بيانات الدوال المثلثية الأم لرسم بيان الدالّة. حدّد التقاطعات الأفقية والمحاذيات.

18 $f(x)=\frac{1}{4}\tan x$

19 $f(x)=\tan \pi x$

20 $f(x)=\tan \frac{1}{2}\pi x$

أثبت المتطابقة المثلثية.

21 $\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta\frac{1}{\tan\theta}=1$

22 $\frac{\sin^2(-\theta)}{\tan\theta}=\sin\theta\cos\theta$

23 $\left(\frac{1}{\cos\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)=\tan^2\theta$

24 $1+\cos^2\theta\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$

25 $\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}$

26 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$

27 $\sin^2\theta\tan\theta=\tan\theta-\sin\theta\cos\theta$

28 $\frac{\tan\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$

اكتب المقدار باستعمال دالّة مثلّثية واحدة.

29 $\frac{1}{\tan\theta\cos\theta}$

30 $\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta\tan\theta$

31 $\tan(-\theta)\sin(-\theta)\cos(-\theta)$

32 $\frac{\cos\theta\frac{1}{\tan\theta}}{\frac{1}{\sin^2\theta}-1}$

جِد القيمة المضبوطة للمقدار.

33 $\sin\frac{19\pi}{12}$

34 $\cos 165^\circ$

35 $\cos 15^\circ$

36 $\tan\frac{\pi}{12}$

جِد قيمة المقدار علمًا، بأن $0^\circ < A < 90^\circ$ و $\tan A=\frac{3}{4}$ وأن $90^\circ < B < 180^\circ$ وَ $\tan B=-\frac{5}{12}$

37 $\sin(A+B)$

38 $\cos(A+B)$

39 $\tan(A-B)$

40 $\tan(A+B)$

41 $\sin(A-B)$

42 $\cos(A-B)$

جِد إحداثيات رؤوس صورة الرباعي $ABCD$ ، حيث $A(0,0)$ ، $B(3,0)$ ، $C(4,2)$ ، $D(1,2)$ ، بدوران مركزه نقطة الأصل وزاويته θ . قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

43 $\theta = 30^\circ$

44 $\theta = 45^\circ$

45 $\theta = 60^\circ$

46 $\theta = 90^\circ$

جِد إحداثيات رؤوس صورة الرباعي $ABCD$، حيث $A(0,0)$ ، $B(5,2)$ ، $C(0,4)$، $D(-5,2)$ ، بدوران مركزه نقطة الأصل وزاويته θ . قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

47 $\theta = 120^\circ$

48 $\theta = 180^\circ$

49 $\theta = 240^\circ$

50 $\theta = 270^\circ$

جِد قيمة المقدار، علمًا بأن $0^\circ < \theta < 90^\circ$ و $\tan\theta = \frac{3}{4}$.

51 $\sin 2\theta$

52 $\cos 2\theta$

53 $\tan\frac{\theta}{2}$

54 $\sin\frac{\theta}{2}$

جِد قيمة المقدار علمًا بأن $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ وَ $\cos\theta=\frac{3}{4}$.

55 $\tan 2\theta$

56 $\cos 2\theta$

57 $\cos\frac{\theta}{2}$

58 $\sin\frac{\theta}{2}$

استعمل متطابقات النصف لإيجاد القيمة المضبوطة للمقدار.

59 $\sin\frac{\pi}{12}$

60 $\cos 75^\circ$

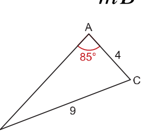
الفصل 7



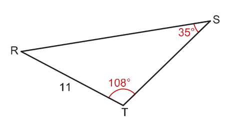
اختبار الفصل

جِد كل قياس. قرّب الطول إلى أقرب عشر وقياس الزاوية إلى أقرب درجة.

1 $m\hat{B}$



2 RS



3 $m\hat{M}$

N L M 7 10 15

4 استعمل بيان الدالة $f(x)=\cos x$ لرسم بيان الدالة $g(x)=\frac{1}{2}\cos 2x$. حدّد السعة والزمن الدوري.

5 استعمل بيان الدالة $f(x)=\sin x$ لرسم بيان الدالة $g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. حدّد التقاطعات الأفقية وانحراف الطور.

6 استعمل بيان الدالة $f(x)=\tan x$ لرسم بيان الدالة $g(x)=2\tan \pi x$. حدّد الزمن الدوري والتقاطعات الأفقية والمحاذيات.

7 أثبت المتطابقة المثلثية $\frac{1}{\tan\theta}=\cos^2\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\cos\theta}$.

اكتب المقدار باستعمال نسبة مثلّثية واحدة.

8 $\left(\frac{1}{\cos\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)$

9 $\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}$

جد قيمة المقدار علمًا بأن $0° < A < 90°$ وَ $\tan A = \frac{3}{4}$، وأن $180° < B < 270°$ وَ $\tan B = \frac{12}{13}$.

10 $\sin(A+B)$

11 $\cos(A-B)$

12 جِد إحداثيات رؤوس صورة الرباعي $ABCD$ حيث $A(0, 1)$ ، $B(2, 1)$ ، $C(3, 3)$ ، $D(-1, 3)$ ، بدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها $30°$. قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

جِد قيمة المقدار علمًا بأن $90° < \theta < 180°$ وَ $\tan\theta = -\frac{12}{5}$.

13 $\sin 2\theta$

14 $\cos 2\theta$

15 $\cos\frac{\theta}{2}$

16 استعمل متطابقات النصف لإيجاد القيمة المضبوطة للمقدار $\sin\frac{3\pi}{8}$.



1 ما القيمة المضبوطة للمقدار $\tan 15^\circ$ ؟

أ) $\frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{4}$
ج) $\frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4}$
ب) $2+\sqrt{3}$
د) $2-\sqrt{3}$

2 أين تقع محاذيات الدالّة $y=\frac{1}{3\tan 2x}$ ؟

أ) $2\pi n$
ب) $\frac{\pi n}{2}$
ج) $3\pi n$
د) $\frac{\pi n}{3}$

3 ما الزمن الدوري للدالّة $y=5\cos\frac{1}{3}x$ ؟

أ) $\frac{2\pi}{5}$
ب) $\frac{5}{3}$
ج) $\frac{2\pi}{3}$
د) 6π

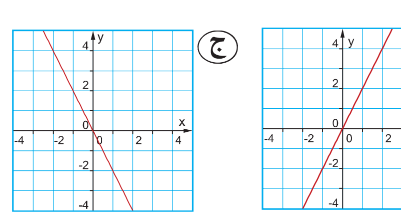
4 يتألف الفيلم من 14 مشهدًا حواريًّا وَ 10 مشاهد إيمائيّة، ولا يتضمن أي شيء آخر. تم اختيار مشهد بشكل عشوائي. ما احتمال أن يكون مشهدًا إيمائيًّا؟

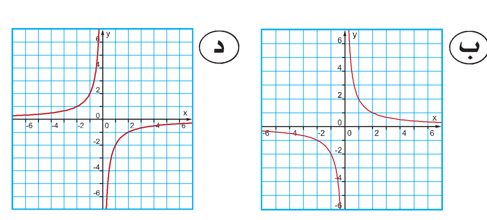
أ) $\frac{5}{12}$
ب) $\frac{7}{12}$
ج) $\frac{5}{7}$
د) $\frac{7}{5}$

5 ما قيمة الدالّة $f(x)=3x^3+4x^2+7x+10$ عندما $x=-2$ ؟

أ) -44
ج) -12
ب) 0
د) 36

6 أي مما يلي بيان دالّة تغيّر عكسي، حيث $y=2$ وَ $x=-1$ ؟


أ) ج)


ب) د)

7 استعمل متطابقات النصف لإيجاد القيمة المضبوطة لـ $\cos 157.50^\circ$.

أ) $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
ب) $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
ج) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
د) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

8 ما إحداثيّا رأس بيان الدالّة $f(x)=x^2+6x-4$ ؟

أ) $(0, -4)$
ب) $(-3, -13)$
ج) $(-3, 5)$
د) $(3, 5)$

9 $ABCDE$ خماسي محدَّب. $\hat{A}\cong\hat{B}\cong\hat{C}$ ، $\hat{D}\cong\hat{E}$ ، $m\hat{A}=2m\hat{D}$ ما قياس $\hat{C}$ ؟

أ) 67.5°
ج) 154.3°
ب) 135°
د) 225°

10 أي مما يلي لا يساوي $\sin 60^\circ$ ؟

(أ) $\cos 30^\circ$

(ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

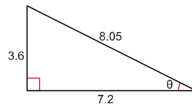
(ج) $\frac{\tan 30^\circ}{\sin 30^\circ}$

(د) $(\cos 60^\circ)(\tan 60^\circ)$

جواب مختصر

11 ما قيمة x، حيث $5\sqrt{2x-7}+4=9$؟

12 ما قيمة $\cos\theta$ ؟ قرّب الجواب إلى أقرب جزء من ألف.



13 جِد مجموع المتسلسلة الحسابية $\sum_{k=1}^{14}(3k-5)$.

14 في المثلثين ABC وَ DEF، $\hat{A}\cong\hat{F}$ وَ $\hat{B}\cong\hat{D}$. إذا كان $EF=4.5$ وَ $DF=3$ وَ $AC=1.5$، كم يجب أن يكون طول $\overline{AB}$ لكي يكون المثلثان متشابهين؟

جواب قصير

15 يضم نادي الشطرنج في ثانوية السليمانية 12 عضوًا. ينبغي لمدير المدرسة اختيار لاعبَيْن للاشتراك في بطولة العراق للشطرنج.

أ بكم طريقة يُمكنه اختيار اللاعبَيْن؟

ب أوضح لماذا حللت المسألة بالطريقة التي اخترتها.

16 استعمل المتتالية ... ، 324 ، 108 ، 36 ، 12 ، 2

أ اكتب تعريفًا معلنًا للحد النوني.

ب ما الحد العاشر؟

17 استعمل الرسم لإيجاد كل قياس. قرّب الطول إلى أقرب عُشر من السنتيمتر.

أ طول $\overline{DC}$

ب طول $\overline{AB}$

جواب مفصَّل

18 يُبيِّن الجدول أدناه الدرجات التي حصل عليها طلاب الصف الحادي عشر في مادة الرياضيات.

90	85	72	86	94	96
85	95	94	68	71	85
93	98	84	83	80	89

أ جِد المتوسّط.

ب جِد الوسيط.

ج جِد المنوال.

د جِد التباين.

هـ جِد الانحراف المعياري.

و جِد المدى.